T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZEL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BİNOM KATSAYILAR

SABAHATTİN VATANBEKÇİSİ

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

YOZGAT – ARALIK 2021

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZEL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BİNOM KATSAYILAR

SABAHATTİN VATANBEKÇİSİ

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

YOZGAT – ARALIK 2021

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Sabahattin VATANBEKÇİSİ

27/12/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZEL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİLİ GENELLEŞTİRİLMİŞ BİNOM KATSAYILAR

SABAHATTİN VATANBEKÇİSİ

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. FUNDA TAŞDEMİR

Bu tez çalışmasında, özel sayı dizileri olan Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve tribonacci sayı dizileri ve bu sayı dizileri ile ilişkili polinomlar ve ilişkili binom katsayıları çalışılmıştır. Ayrıca Fibonacci polinomları ile oluşturulmuş binomiyel katsayılar olan gibonomiyel katsayılar verilmiştir. Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışma ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, çalışma ile ilgili temel bilgilere, tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, binom katsayılar ve bu katsayıların özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, genelleştirilmiş binom katsayılarından olan Fibonomiyel katsayılar ve Gauss binomiyel katsayılar detaylı olarak verilmiştir. Beşinci bölümde, özel sayı dizileri ile ilişkili polinomlar olan Fibonacci polinomları, Lucas polinomları, Pell polinomları, Pell-Lucas polinomları, tribonacci polinomları ve gibonacci (genelleştirilmiş Fibonacci) polinomları çalışılmıştır. Son olarak altıncı bölümde ise, Fibonacci polinomları ile ilişkili binom katsayıları olan gibonomiyel katsayılar verilmiştir. Yedinci bölüm olan Sonuç ve Öneriler bölümünde ise yapılan çalışma özetlenmiş, değerlendirmeler yapılmış ve ileride yapılabilecek çalışmalar ile ilgili bazı önerilerde bulunulmuştur.

2021, x+52

ANAHTAR KELİMELER: Genelleştirilmiş binom katsayılar, Fibonomiyel katsayılar, Gauss binomiyel katsayılar, Gibonomiyel katsayılar.

ABSTRACT

MASTER THESIS

GENERALIZED BINOMIAL COEFFICIENTS RELATED TO SPECIAL NUMBER SEQUENCES

SABAHATTİN VATANBEKÇİSİ

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. FUNDA TAŞDEMİR

In this thesis, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas and tribonacci number sequences, which are special number sequences, and their associated polynomials and associated binomial coefficients are studied. In addition, gibonomial coefficients, which are binomial coefficients created with Fibonacci polynomials, are given. This thesis consists of seven chapters. In the first chapter, literature information about the study is given. In the second chapter, basic information about the study, definitions and theorems are given. In the third chapter, binomial coefficients and their properties are examined. In the fourth chapter, Fibonomial coefficients and Gaussian binomial coefficients, which are generalized binomial coefficients, are given in detail. In the fifth chapter, Fibonacci polynomials, Lucas polynomials, Pell polynomials, Pell-Lucas polynomials, tribonacci polynomials and gibonacci (generalized Fibonacci) polynomials, which are polynomials associated with special number sequences, are studied. Finally, in the sixth section, gibonomial coefficients, which are binomial coefficients associated with Fibonacci polynomials, are given. In the seventh chapter, the Conclusion and Suggestions, the study is summarized, evaluations are made and some suggestions are made regarding the future studies.

2021, x+52

KEYWORDS: Generalized binomial coefficients, Fibonomial coefficients, Gaussian binomial coefficients, Gibonomial coefficients.

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve her safhasında bilgisine başvurduğum danışmanım Sayın Hocam Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim. Yine bu çalışmanın hazırlanması aşamasında düşünce ve önerileriyle desteklerini esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yusuf Ali TANDOĞAN ve Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ hocalarıma şükranlarımı sunarım. Ayrıca kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'ndeki bütün hocalarıma, eğitimim boyunca yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Sabahattin
VATANBEKÇİSİ

27/12/2021

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Tez Onay Sayfası…….. ii

Tez Beyanı…… iii

Özet…….. iv

Abstract…… v

Önsöz…… vi

İçindekiler……. vii

Tablolar Listesi……..… ix

Simgeler ve Kısaltmalar Listesi…… x

1. GİRİŞ…… 1

2. TEMEL BİGİLER……..……... 4

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları …….……... 4

3. BİNOM KATSAYILARI ……..… 7

3.1. Binom Katsayısı ……..…..……. 7

3.2. Kombinasyon Özellikleri …….…..……. 7

3.3. Pascal Üçgeni …….. 8

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİNOM KATSAYILARI ..…….. 12

4.1. Fibonomiyel Katsayı …….…….. 12

4.1.1. Fibonomiyel Pascal Üçgeni ..…….…… 16

4.2. Gauss Binomiyel (q-Binomiyel) Katsayı ……...……. 17

4.2.1. Gauss Binomiyel Pascal Üçgeni ……..... 19

5. ÖZEL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİLİ POLİNOMLAR …….…… 23

5.1. Fibonacci ve Lucas Polinomları …….. 23

5.1.1. Fibonacci ve Lucas Polinomları için Binet Benzeri Formüller……. 29

5.1.2. Fibonacci ve Lucas Polinomlarında Pascal Üçgeni ……. 30

5.2. Pell ve Pell-Lucas Polinomları ……..... 33

Sayfa

5.2.1. Pell ve Pell-Lucas Polinomlarında Binet Benzeri Formüller 35

5.3. Tribonacci Sayı Dizisi ve Polinomları ..…… 35

5.3.1. Tribonacci Sayıları ….…….. 35

5.3.2. Tribonacci Polinomları ……..... 38

5.3.2.1. Tribonacci Dizisi ……... 39

5.4. Gibonacci Polinomları ……..…… 41

5.4.1. Gibonacci Toplama Formülü ……... 42

5.4.2. Gibonacci Toplamaları …… 44

6. GİBONOMİYEL KATSAYILAR ……...…….. 45

6.1. Merkezi Gibonomiyel Katsayılar ...……...…… 48

6.2. David Yıldızı Özelliği ……. 48

7. SONUÇ ve ÖNERİLER …… 50

8. KAYNAKLAR……...…… 51

ÖZGEÇMİŞ

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo		Sayfa
Tablo 3.1.	Binom katsayılar	10
Tablo 5.1.	İlk 10 Fibonacci polinomu	24
Tablo 5.2.	İlk 10 Lucas polinomu	25
Tablo 5.3.	Üçgensel A dizisi	25
Tablo 5.4.	Üçgensel B dizisi	28
Tablo 5.5.	İlk 10 Pell ve Pell-Lucas sayısı	34
Tablo 5.6.	İlk 10 Pell ve Pell-Lucas polinomu	34
Tablo 5.7.	İlk 10 tribonacci sayısı	36
Tablo 5.8.	İlk 10 tribonacci polinomu	38
Tablo 5.9.	Tribonacci dizisi	39

SİMGELER VE KISALTMALAR

Çalışma boyunca kullanılan simgeler aşağıda verilmiştir.

Simgeler	Açıklamalar
$\boldsymbol{F_n}$	: n. Fibonacci Sayısı
$\boldsymbol{F_n}!$	: n. Fibonacci Faktöriyel
$\boldsymbol{f_n(x)}$	: n. Fibonacci Polinomu
$\boldsymbol{g_n(x)}$	: n. Gibonacci (genelleştirilmiş Fibonacci) Polinomu
$\boldsymbol{L_n}$	: n. Lucas Sayısı
$\boldsymbol{l_n(x)}$	: n. Lucas Polinomu
$\boldsymbol{P_n}$	: n. Pell Sayısı
$\boldsymbol{p_n(x)}$	: n. Pell Polinomu
$\boldsymbol{Q_n}$	: n. Pell-Lucas Sayısı
$\boldsymbol{q_n(x)}$	: n. Pell-Lucas Polinomu
$\boldsymbol{T_n}$	: n. Tribonacci Sayısı
$\boldsymbol{t_n(x)}$	: n. Tribonacci Polinomu
$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$	: Binom Katsayı
$\binom{n}{k}_{\boldsymbol{F}}$	: Fibonomiyel Katsayı
$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{q}}$	: Gauss Binomiyel Katsayı
$\left[\!\binom{n}{k}\!\right]$	: Gibonomiyel katsayı

1. GİRİŞ

Fibonacci, Ortaçağ Avrupa'sının önde gelen matematikçilerinden biridir. 1170 yılında İtalya'nın Pisa şehrinde, zengin bir tüccar ailesi olan Bonacci ailesinin çocuğu olarak dünyaya gelmiştir ("Fibonacci" ismi Bonacci'lerin oğlu anlamına gelen "Filius Bonacci" isminin kısaltılmasıdır). Babası Afrika'nın kuzey kıyısında Bugia'de gümrük tahsildarıyken Fibonacci'yi Hint - Arap sayı sistemi ve hesaplama yöntemleri ile tanıştırdı. Yaygın seyahat ve hesaplamalı sistemlerin kapsamlı çalışmasından sonra Fibonacci, 1202'de önde gelen eseri olan Liber Abaci (Abaküs Kitabı) adlı kitabını yazmıştır. Kitap, temel cebir ve aritmetik bilgilerini içermekte olup, Hint - Arap sayı sistemini ve aritmetik algoritmalarını Avrupa'ya tanıtan kitap olarak bilinmektedir. Fibonacci, kitabında tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir problem ortaya atar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğindeki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapamazlar. Üçüncü aydan itibaren her çift tavşan her ay bir çift yavru yapar. Tavşanların hiç ölmedikleri gibi ideal varsayımlar altında herhangi bir n. ayda çiftlikte toplam kaç çift tavşan vardır? Buna göre belli bir aydaki çift sayısı önceki iki ayın toplamına eşittir. O halde tavşan çifti sayıları aylara göre bir yıl içinde 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 olacaktır. Bu sayı dizisi 6. yüzyıldan beridir Hint matematikçiler tarafından bilinmekteydi ancak Avrupa'ya ilk olarak Fibonacci tarafından tanıtılmıştır (Parmanand, 1985;1986). Fibonacci'nin kendisi bu sayı dizisi üzerinde bir çalışma yapmamıştır. Hatta bu sayı dizisi üzerinde 19 uncu yüzyılın başlarına kadar ciddi bir araştırma yapılmadığı da belirtilmektedir. 19. yüzyılda Fransız matematikçi Edouard Lucas bu sayı örüntüsüne Fibonacci dizisi adını verdi. Edouard Lucas var olan Fibonacci sayı dizisindeki başlangıç değerlerini değiştirerek Lucas sayılarını oluşturmuştur. Bunlar; 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, … dir.

Fibonacci sayıları üç nedenden dolayı büyük önem arz etmektedir. Birincisi dizinin ilk elemanlarının doğada bitkilerde, böceklerde kısacası birçok yerde karşımıza çok sık çıkmasıdır. İkinci olarak dizinin bir terimini kendinden önceki terime böldüğümüzde hep aynı oranı vermesidir. "Altın oran" denilen bu sayı vücudumuzdaki oranlardan Mısır'daki piramitlere kadar sayısız alanda karşımıza çıkmaktadır. Üçüncü olarak bu sayıların sayılar teorisinde çok ilginç özelliklerinin bulunmasıdır.

n eleman arasından kaç farklı biçimde k elemanın seçilebileceğinin sayısı olan binom katsayıları oldukça geniş bir çalışma alanına sahiptir. Bu nedenle, binom katsayılarının genelleştirilmeleri de son yıllarda oldukça popüler olmuştur. Bu anlamda ilk olarak 1915 yılında Fontene, genelleştirilmiş binomiyel katsayılarını tanımlamıştır (Fontené, 1915). Daha sonra Ward tarafından 1936 da bu katsayılar yeniden tanımlamıştır (Ward, 1936). 1969'da Gould bu sayılara Fontené-Ward binomiyel katsayılar ismini vermiştir (Gould, 1969). Krot (Krot, 2004) ve Gould (Gould, 1974) Fibonomiyel katsayılar ile ilgili önemli çalışmalar yapmıştır. Seibert ve Trojovsky (Seibert, Trojovsky, 2005), binomiyel katsayılarında olduğu gibi Fibonomiyel katsayılarda da Pascal üçgeni oluşturulabileceğini ve binomiyel özdeşliklerin Fibonomiyel katsayılara da uygulanabileceğini göstermiştir. Dziemianczuk (Dziemianczuk, 2009), Fibonomiyel katsayıların bazı özelliklerini vermiştir. Kwansniewski (Kwansniewski, 2009), binom açılımının Fibonomiyel katsayılar için de sağlandığını göstermiştir.

Fibonacci ve Lucas dizilerine benzer olarak tanımlanan ve bu dizilerin genellemeleri olan başka sayı dizileri de vardır. Fibonacci ve Lucas sayılarında iki başlangıç koşulu ile her bir sayının kendisinden önceki iki sayının toplamı olması söz konusu olduğu biliniyor. Bunun yerine üç başlangıç koşulu ile her bir sayının kendisinden önceki üç sayının toplamı olması durumu düşünülmüştür. Bu dizi Feinberg (Feinberg, 1963) tarafından 1963 yılında tanımlanan triboncci dizisidir (Koshy, 2016).

Fibonacci polinomları ilk olarak 1883 yılında Belçikalı matematikçi Eugene C. Catalan ve daha sonra Alman matematikçi Ernst Jacobsthal (1882–1965) tarafından araştırıldı. Aynı derecede ünlü Lucas polinomları 1970 yılında Marjorie Bicknell tarafından çalışılmıştır (Bicknell, 1970). Fibonacci ve Lucas sayıları gibi özel sayı dizileriyle oluşturulan polinomlara 1973 yılında Hoggatt ve Bicknell (Hoggatt, Bicknell, 1973) ortak çalışmalarında yer vermişlerdir. Fibonacci ve Lucas polinomları, daha geniş bir tamsayı ailesi olan gibonacci (genelleştirilmiş Fibonacci) polinomları ailesine aittir (Koshy, 2019).

Son zamanlarda çalışılan genelleştirilmiş binom katsayılarından olan gibonomiyel katsayılar Fibonacci polinomları ile ilişkili binom katsayılarıdır (Koshy, 2019).

Bu çalışmada binomiyel katsayılar, Fibonomiyel katsayılar, Gauss binomiyel katsayılar ve gibonomiyel katsayılar detaylı olarak incelenmiştir. Bu konular ele alınmadan önce özel sayı dizileri ile oluşturulan polinomlar olan Fibonacci polinomlar, Lucas

polinomlar, Pell polinomlar, Pell-Lucas polinomlar, tribonacci polinomlar ve son olarak gibonacci polinomları da incelenmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas sayılarından ve bu sayı dizilerinin kullanım alanlarından bahsedilecektir.

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları

Tanım 2.1.1. (Fibonacci Sayıları)

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Fibonacci sayıları denir ve n. Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir.

Başlıca Fibonacci sayıları:

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ şeklindedir.

Tanım 2.1.2. (Lucas Sayıları)

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Lucas sayıları denir ve n. Lucas sayısı L_n ile gösterilir.

Başlıca Lucas sayıları:

$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \ldots$ şeklindedir.

Tanım 2.1.3. (Pell Sayıları)

$P_0 = 0$, $P_1 = 1$, $n \geq 2$ için $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Pell sayıları denir ve n. Pell sayısı P_n ile gösterilir.

Başlıca Pell sayıları:

$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, \ldots$ şeklindedir.

Tanım 2.1.4. (Pell-Lucas Sayıları)

$Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$, $n \geq 2$ için $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Pell-Lucas sayıları denir ve n. Pell-Lucas sayısı Q_n ile gösterilir.

Başlıca Pell-Lucas sayıları:

$2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, \ldots$ şeklindedir.

Tanım 2.1.5. (Altın Oran)

Altın oran, matematik ve sanatta, bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. İlk olarak kimler tarafından keşfedildiği bilinmese de, Mısırlılar'ın ve Yunanlılar'ın bu konu üzerinde yapmış oldukları bazı çalışmalar olduğu görülmektedir. Öklid, milattan önce 300'lü yıllarda yazdığı "Elementler" adlı tezinde "uç ve önemli oranda bölmek" olarak altın oranı ifade etmiştir. Mısırlıların Keops Piramidinde, Leonardo da Vinci'nin "İlahi Oran" adlı çalışmada sunduğu resimlerde kullanıldığı bilinen "altın oran" , "Fibonacci Sayıları" olarak da bilinmektedir.

Bu oranın kısaca gösterimi:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

şeklindedir.

Bir Fibonacci sayısının kendinden önceki Fibonacci sayısına bölümü ile elde edilen sonuç, 1,618…'dir. Örneğin; 6765 / 4181 = 1,618… sonucunu vermektedir. Bu durum, 89'dan daha küçük olan Fibonacci sayıları için 0,01 gibi küçük bir farklılıkla ortaya çıksa da, büyük sayıların tamamında sonuç aynıdır. Yani dizideki ardışık iki sayının oranı, sayılar büyüdükçe Altın Oran'a yani 1.618'e yaklaşır, 89/55 ve sonrasında ise 1.618...'de sabitlenir.

Teorem 2.1.6. (Binet Formülleri)

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri α ve β olmak üzere F_n ve L_n için Binet formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir (Özvatan, 2018).

Burada

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir.

Benzer şekilde $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri γ ve δ olmak üzere P_n ve Q_n için Binet formülleri sırasıyla

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

ve

$$Q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

dir. Burada

$$\gamma = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \delta = 1 - \sqrt{2}$$

dir.

F_n ve L_n için Binet formüllerinden

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n \quad \text{ve} \quad L_{-n} = (-1)^n L_n$$

P_n ve Q_n için Binet formüllerinden

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n \quad \text{ve} \quad Q_{-n} = (-1)^n Q_n$$

elde edilir.

Tanım 2.1.7. (Gibonacci Sayıları)

$G_1 = a$, $G_2 = b$, $n \geq 3$ için $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan sayılara gibonacci sayıları denir ve n. gibonacci sayısı G_n ile gösterilir.

Başlıca gibonacci sayıları:

$a,\ b,\ a+b,\ a+2b,\ 2a+3b$ *ve* $3a+5b, \ldots$

şeklindedir (Benjamin, 1999).

3. BİNOM KATSAYILARI

Binom sözcüğü iki terim içeren ifadeler için kullanılan Yunanca "binome" sözcüğünden gelmektedir.

3.1. Binom Katsayısı

Tanım 3.1.1.

n ve k negatif olmayan tam sayılar olsun. $0 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

ifadesine binom katsayısı denir.

$n < k$ ise $\binom{n}{k} = 0$ ve $0! = 1$ olarak tanımlanır.

Örneğin, düzlemde herhangi üç tanesi aynı doğru üzerinde bulunmayan n tane noktadan $\binom{n}{2}$ tane doğru geçer.

3.2. Kombinasyon Özellikleri

Teorem 3.2.1.

n ve k negatif olmayan tamsayılar olsun. $0 \leq k \leq m \leq n$ olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır (Eren, 2015).

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

4) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

5) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

Teorem 3.2.2. (Pascal Özdeşliği)

$k \leq n$ olmak üzere *n* ve *k* pozitif tamsayılar olsun. Bu durumda aşağıdaki özdeşlik sağlanır.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

İspat

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$= \frac{k(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)(n-k-1)!}$$

$$= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{k}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.3.

Her $n \geq 0$ tamsayısı için $\binom{n}{k}$ tamsayıdır.

3.3. Pascal Üçgeni

Binom katsayılarından oluşan üçgensel bir dizidir. Fransız matematikçi Blaise Pascal'ın soyadıyla anılsa da Pascal'dan önce Hindistan, İran, Çin, Almanya ve İtalya'da matematikçiler tarafından çalışılmıştır. Ömer Hayyam tarafından oluşturulmuştur. Aşağıdaki şekillerde Pascal Üçgeni verilmiştir.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Pascal Üçgeni

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Pascal Üçgeni

Başlıca binom katsayıları aşağıdaki tablo ile de verilebilir.

Tablo 3.1. Binom katsayıları

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\sum$
0	1									1
1	1	1								2
2	1	2	1							4
3	1	3	3	1						8
4	1	4	6	4	1					16
5	1	5	10	10	5	1				32
6	1	6	15	20	15	6	1			64
7	1	7	21	35	35	21	7	1		128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

Pascal üçgenin birçok ilginç özelliği de vardır. Bunlardan bazıları:

- Her satır 1 ile başlayıp 1 ile biter.
- Pascal üçgeni, ortasından geçen dikey bir çizgi etrafında simetriktir. Bu Teorem 3.2.1. (2) ye göre de böyledir.
- Her satırdaki herhangi bir sayı, bir önceki satırdaki o sayının hemen solundaki ve sağındaki sayıların toplamıdır. Bu, Pascal'ın özdeşliğinden de doğrulanır.
- n. satırdaki sayıların toplamı 2^n dir.

Şimdi verilecek olan teorem ile $(x+y)^n$ binom açılımını bulmada binom katsayılarından nasıl yararlanıldığı gösterilecektir. İspatı tümevarım yöntemi veya kombinatorik kullanılarak yapılabilir. Birincisi biraz uzun, ikincisi ise daha kısadır.

Teorem 3.3.1. (Binom Teoremi)

x, y reel sayılar ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}$$

dir.

Binom teoreminin bazı ilginç ve faydalı sonuçları vardır. Bu sonuçlar aşağıda ispatsız olarak verilmiştir.

Sonuç 3.3.2.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

$$(1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k$$

Sonuç 3.3.3.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$\sum_{k\ tek} \binom{n}{k} = \sum_{k\ çift} \binom{n}{k}$$

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ BİNOM KATSAYILARI

$n \geq k$ doğal sayıları için U_n dizinin n. terimini göstermek üzere

$$\binom{n}{k}_U = \binom{n}{k} = \frac{U_n U_{n-1} \dots U_{n-k+1}}{U_k U_{k-1} \dots U_1}$$

ve

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \; n < k \text{ veya } k < 0 \text{ için } \binom{n}{k} = 0$$

ile tanımlanan sayılara genelleştirilmiş binomiyel (Fontené-Ward) katsayılar denir (Gould, 1969). Bu katsayılardan bazıları:

$U_n = n$ için binomiyel katsayılar,

$U_n = F_n$ için Fibonomiyel katsayılar,

$U_n = L_n$ için Lucanomiyel katsayılar,

$U_n = 1 - q^n$ için Gauss binomiyel katsayılardır.

4.1. Fibonomiyel Katsayı

Tanım 4.1.1. (Fibonacci Faktöriyel)

$n \geq k$ doğal sayıları, F_n, n. Fibonacci sayısı ve $F_0! = 1$ olmak üzere

$$F_n! = F_n F_{n-1} \dots F_2 F_1$$

ifadesine n. Fibonacci faktöriyel denir. (Akkuş, 2011)

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n!}{F_k! \, F_{n-k}!} = \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+1}}{F_k F_{k-1} \dots F_1} = \prod_{j=1}^{k} \frac{F_{n-j+1}}{F_j}$$

ifadesine Fibonomiyel katsayı denir.

Aşağıda Fibonomiyel katsayıların özellikleri verilmektedir.

Özellikler $0 \leq k \leq n$ olmak üzere,

Özellik 1

$$\binom{n}{0}_F = \binom{n}{n}_F = 1$$

dir.

Örnek,

$$\binom{3}{0}_F = \frac{F_3!}{F_{3-0}!\,F_0!} = \frac{F_3!}{F_3!\,F_{3-3}!} = \binom{3}{3}_F = \frac{F_3!}{F_3!} = 1$$

Özellik 2

$$\binom{n}{k}_F = \binom{n}{n-k}_F$$

dir.

İspat

$$\binom{n}{k}_F = \frac{F_n!}{F_k!\,F_{n-k}!} = \frac{F_n!}{F_{n-(n-k)}!\,F_{n-k}!} = \binom{n}{n-k}_F$$

olup ispat tamamlanır.

Özellik 3

$$\binom{n}{k}_F = \binom{n}{k-1}_F \frac{F_{n-k+1}}{F_k}$$

dir.

İspat

$$\binom{n}{k-1}_F \frac{F_{n-k+1}}{F_k} = \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+2}}{F_{k-1}!} \cdot \frac{F_{n-k+1}}{F_k}$$

$$= \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+1}}{F_k!} = \binom{n}{k}_F$$

bulunur.

Özellik 4

$$\binom{n}{m}_F \binom{m}{k}_F = \binom{n}{k}_F \binom{n-k}{n-m}_F$$

dir (Dziemianczuk, 2009).

Örnek,

$$\binom{5}{3}_F \binom{3}{2}_F = \binom{5}{2}_F \binom{5-2}{5-3}_F = \binom{5}{2}_F \binom{3}{2}_F.$$

$$\frac{F_5!}{F_3!\,F_2!}\frac{F_3!}{F_2!\,F_1!} = \frac{F_5!}{F_2!\,F_3!}\frac{F_3!}{F_2!\,F_1!}$$

Özellik 5

$$F_{n-k}\binom{n}{k}_F = F_n\binom{n-1}{k}_F$$

dir.

İspat

$$F_{n-k}\binom{n}{k}_F = F_{n-k}\frac{F_nF_{n-1}\dots F_{n-k+1}}{F_k!}$$

$$= \frac{F_nF_{n-1}\dots F_{n-k+1}F_{n-k}}{F_k!}$$

$$= F_n\frac{F_{n-1}\dots F_{n-k+1}F_{n-k}}{F_k!}$$

$$= F_n\binom{n-1}{k}_F$$

bulunur.

Özellik 6

$$F_k\binom{n}{k}_F = F_n\binom{n-1}{k-1}_F$$

İspat

$$F_k\binom{n}{k}_F = F_k\frac{F_nF_{n-1}\dots F_{n-k+1}}{F_k!}$$

$$= \frac{F_n F_{n-1} \dots F_{n-k+1} F_k}{F_k!}$$

$$= F_n \frac{F_{n-1} \dots F_{n-k+1}}{F_{k-1}!}$$

$$= F_n \binom{n-1}{k-1}_F$$

bulunur.

Özellik 7

$$F_k \binom{n}{k}_F = F_{n-k+1} \binom{n}{k-1}_F$$

dir (Gould, 1974).

Özellik 8 (Pascal Kuralı)

$$\binom{n}{k}_F = F_{n-k-1} \binom{n-1}{k-1}_F + F_{k+1} \binom{n-1}{k}_F$$

dir (Kwansniewski, 2009). Bu özellik aynı zamanda Fibonacci katsayıları için rekürans bağıntısıdır.

Özellik 9

$n = i_1 + i_2 + \cdots + i_k$ olmak üzere

$$\binom{n}{i_1, i_2, \dots, i_k}_F = \binom{n}{i_1}_F + \binom{n-i_1}{i_2}_F + \cdots + \binom{n-i_1-i_2-\cdots-i_{k-1}}{i_k}_F$$

dir (Dziemianczuk, 2009).

4.1.1. Fibonomiyel Pascal Üçgeni

Fibonomiyel katsayılar, binom katsayılarında olduğu gibi bir simetrik Pascal üçgenine sahiptirler.

$$\binom{0}{0}_F$$

$$\binom{1}{0}_F \quad \binom{1}{1}_F$$

$$\binom{2}{0}_F \quad \binom{2}{1}_F \quad \binom{2}{2}_F$$

$$\binom{3}{0}_F \quad \binom{3}{1}_F \quad \binom{3}{2}_F \quad \binom{3}{3}_F$$

$$\binom{4}{0}_F \quad \binom{4}{1}_F \quad \binom{4}{2}_F \quad \binom{4}{3}_F \quad \binom{4}{4}_F$$

$$\binom{5}{0}_F \quad \binom{5}{1}_F \quad \binom{5}{2}_F \quad \binom{5}{3}_F \quad \binom{5}{4}_F \quad \binom{5}{5}_F$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Fibonomiyel Pascal Üçgeni

1

1 1

1 1 1

1 2 2 1

1 3 6 3 1

1 5 15 15 5 1

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Fibonomiyel Pascal Üçgeni

Teorem 4.1.1. (Binom Teoremi)

x, y reel sayılar ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$(x+y)_F{}^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_F x^k y^{n-k}$$

dir (Kwansniewski, 2009).

Örnek

$$\begin{aligned}(x+y)_F{}^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}_F x^k y^{3-k} \\ &= \binom{3}{0}_F y^3 + \binom{3}{1}_F xy^2 + \binom{3}{2}_F x^2y + \binom{3}{3}_F x^3 \\ &= y^3 + 2xy^2 + 2x^2y + x^3\end{aligned}$$

4.2. Gauss Binomiyel (q-Binomiyel) Katsayı

Bu bölümde q-binomiyel katsayıları ve özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.2.1.

n, k negatif olmayan tam sayılar olmak üzere,

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1$$

şeklinde tanımlansın.

$$[n]! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ [n][n-1][n-2] \dots [1], & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

için

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[k]!} = \frac{[n][n-1][n-2] \dots [n-k+1]}{[k][k-1][k-2] \dots [1]}$$

ile tanımlanan ifadeye Gauss binomiyel (q-binomiyel) katsayı denir.

Burada $q \to 1^-$ yaklaştığında,

$$\lim_{q \to 1^-} [n] = \lim_{q \to 1^-} (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1) = n$$

ve

$$\lim_{q\to 1^-} \binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}$$

olur.

Örnek

$$\binom{3}{2}_q = \frac{[3]!}{[1]!\,[2]!} = \frac{[3]}{[1]} = \frac{(q^3-1)}{(q-1)} = q^2+q+1$$

Özellikler $0 \le k \le n$ olmak üzere,

Özellik 1

$$\binom{n}{0}_q = \binom{n}{n}_q = 1$$

dir.

Özellik 2

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q$$

dir.

İspat

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[k]!} = \frac{[n]!}{[n-k]!\,[n-(n-k)]!} = \binom{n}{n-k}_q$$

Özellik 3 (q-Pascal Kuralı)

$1 \le k \le n-1$ olmak üzere,

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q$$

ve

$$\binom{n}{k}_q = q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}[n] &= q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1 \\ &= q^{n-1} + \cdots + q^{k+1} + q^k + \cdots + 1 \\ &= (q^{k-1} + q^{k-2} + \cdots + 1) + q^k(q^{n-k-1} + q^2 + q + 1) \\ &= [k] + q^k[n-k]\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

O halde

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}_q &= \frac{[n]!}{[n-k]!\,[k]!} = \frac{[n][n-1]!}{[k]!\,[n-k]!} = \frac{[n-1]!\,([k] + q^k[n-k])}{[k]!\,[n-k]!} \\ &= \frac{[n-1]!}{[k-1]!\,[n-k]!} + \frac{q^k[n-1]!}{[k]!\,[n-k-1]!} \\ &= \binom{n-1}{k-1}_q + q^k\binom{n-1}{k}_q\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}_q &= \binom{n}{n-k}_q \\ &= \binom{n-1}{n-k-1}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{n-k}_q \\ &= \binom{n-1}{k}_q + q^{n-k}\binom{n-1}{n-k}_q\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.1. Gauss Binomiyel Pascal Üçgeni

Tıpkı binom katsayılarında ve Fibonacci katsayılarında olduğu gibi q −binom katsayılarında da Pascal üçgeni elde edilebilir. Ayrıca yukarıdaki Özellik 2'de de görüldüğü gibi bu üçgen simetriktir.

$$1$$

$$1 \qquad 1$$

$$1 \qquad 1+q \qquad 1$$

$$1 \qquad 1+q+q^2 \qquad 1+q+q^2 \qquad 1$$

$$1 \qquad 1+q+q^2+q^3 \qquad (1+q+q^2)(1+q^2) \qquad 1+q+q^2+q^3 \qquad 1$$

.

.

.

Gauss Binomiyel (q −Binomiyel) Pascal üçgeni

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

formülünün binom katsayıları için genel formül olduğunu biliyoruz. Şimdi q −Binom katsayıları içinde genel bir formül verilsin.

Tanım 4.2.1.1.

$n \geq 1$ olmak üzere,

$$(x+y)_q^n = (x+y)_q + (x+qy)_q + (x+q^2y)_q + \cdots + (x+q^{n-1}y)_q$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^{n-k} y^k$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 4.2.1.2.

q, x ve y ile komütatif ve $yx = qyx$ ise

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k}$$

dir (Kızılateş, 2012).

İspat

İspatını tümevarım yöntemi ile yapalım.

$n = 1$ için sağlandığı açıktır.

$$(x + y) = \binom{1}{0}_q y + \binom{1}{1}_q x = y + x$$

$$y^k x = y^{k-1} yx = y^{k-1} qyx = qy^{k-1} yx = qy^{k-2} yxy = qy^{k-2} qxy^2 = \cdots = q^k xy^k$$

elde edilir.

n için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)^n (x + y)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k} \right) (x + y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k} x + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k (q^{n-k} x y^{n-k}) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1}_q q^{n-k+1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k+1})$$

$$= \binom{n}{n+1-1}_q x^{n+1} + \binom{n}{0}_q y^{n+1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(q^{n-k+1} \binom{n}{k-1}_q + \binom{n}{k}_q \right) x^k y^{n-k+1}$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(q^{n-k+1} \binom{n}{k-1}_q + \binom{n}{k}_q \right) x^k y^{n-k+1}$$

$$= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k}_q x^k y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}_q x^k y^{n+1-k}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.3.

q , x ile komütatif bir değişken olmak üzere,

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \binom{n}{k}_q x^k = \prod_{r=0}^{n-1}(1 + xq^r)$$

(Corcino, 2008) dir.

Örnek

$n = 2$ için teoremi uygulayalım.

$$\sum_{k=0}^{2} q^{\binom{k}{2}} \binom{2}{k}_q x^k = q^{\binom{0}{2}} \binom{2}{0}_q x^0 + q^{\binom{1}{2}} \binom{2}{1}_q x^1 + q^{\binom{2}{2}} \binom{2}{2}_q x^2$$

$$= 1 + (q + 1)x + qx^2$$

$$= (1 + xq^0)(1 + xq)$$

$$= \prod_{r=0}^{1}(1 + xq^r)$$

dir.

5. ÖZEL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİLİ POLİNOMLAR

5.1. Fibonacci ve Lucas Polinomları

Fibonacci polinomları $f_n(x)$ ilk olarak 1883 yılında Belçikalı matematikçi Eugene C. Catalan ve daha sonra Alman matematikçi Ernst Jacobsthal (1882–1965) tarafından araştırıldı. Aynı derecede ünlü Lucas polinomları $l_n(x)$ 1970 yılında Marjorie Bicknell tarafından çalışılmıştır. Fibonacci ve Lucas polinomları, daha geniş bir tamsayı ailesi olan gibonacci (genelleştirilmiş Fibonacci) polinomları $g_n(x)$ ailesine aittir. Gibonacci polinomları sonraki bölümde detaylı olarak verilecektir.

Tanım 5.1.1.

$n \geq 2$ olmak üzere

$$g_n(x) = xg_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısında başlangıç değerleri olan $g_0(x) = 0$ ve $g_1(x) = 1$ olarak alındığında $g_n(x) = f_n(x)$ Fibonacci polinomu elde edilir.

Örneğin $f_2(x)$ve $f_3(x)$ polinomları

$f_2(x) = xf_1(x) + f_0(x) = x.1 + 0 = x$

ve benzer şekilde,

$$f_3(x) = xf_2(x) + f_1(x) = x.x + 1 = x^2 + 1$$

dir

İlk 10 Fibonacci polinomu aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5.1. İlk 10 Fibonacci polinomu

n	$f_n(x)$
1	1
2	x
3	x^2+1
4	x^3+2x
5	x^4+3x^2+1
6	x^5+4x^3+3x
7	$x^6+5x^4+6x^2+1$
8	$x^7+6x^5+10x^3+4x$
9	$x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1$
10	$x^9+8x^7+21x^5+20x^3+5x$

$g_0(x)=2$ ve $g_1(x)=x$ olarak alındığında $g_n(x)=l_n(x)$ Lucas polinomu elde edilmiş olur.

Örneğin $l_2(x)$ ve $l_3(x)$ polinomları

$l_2(x)=xl_1(x)+l_0(x)=x.x+2=x^2+2$

ve benzer şekilde,

$$l_3(x)=xl_2(x)+l_1(x)=x(x^2+2)+x=x^3+3x$$

dir.

İlk 10 Lucas polinomu aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5.2. İlk 10 Lucas polinomu

n	$l_n(x)$
1	x
2	x^2+2
3	x^3+3x
4	x^4+4x^2+2
5	x^5+5x^3+5x
6	$x^6+6x^4+9x^2+2$
7	$x^7+7x^5+14x^3+7x$
8	$x^8+8x^6+20x^4+16x^2+2$
9	$x^9+9x^7+27x^5+30x^3+9x$
10	$x^{10}+10x^8+35x^6+50x^4+25x^2+2$

Açık olarak $F_n = f_n(1)$ ve $L_n = l_n(1)$ dir.

Dikkat çekici bir diğer özellik ise n tek ise f_n çift bir fonksiyon, n çift ise f_n tek bir fonksiyondur. Yine n tek ise l_n tek bir fonksiyon, n çift ise l_n çift bir fonksiyondur.

Tablo 5.3. Üçgensel A dizisi

n \ k	0	1	2	3	Katsayılar Toplamı
1	1				1
2	1				1
3	1	1			2
4	1	2			3
5	1	3	1		5
6	1	4	3		8
7	1	5	6	1	13
8	1	6	10	4	21

Tablo 5.2. ve Tablo 5.3. incelendiğinde bazı özel durumlar içerdiği görülmektedir. Bunları görmek için, Fibonacci polinomlarının sıfır olmayan katsayılarını sola dayalı bir A

dizisinde Tablo 5.3. deki gibi düzenleriz. Dizinin 2. sütunu $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ üçgen sayılarından oluşur ve n'inci satır toplamı F_n yani Fibonacci sayılarını göstermektedir.

$a_{n,k}$ dizininin n. satır k. sütunundaki elemanları göstersin. Burada $a_{n,k}$, f_n deki x^{n-2k-1} nın katsayısıdır. Yani, $a_{n,k} = \binom{n-k-1}{k}$ dır. Burada hatırlatalım ki

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n-k-1}{k} = F_n$$

dir (Koshy, 2017).

Sonuç olarak $n \geq 3$ ve $k \geq 1$ olmak üzere

$$a_{1,0} = a_{2,0} = 1$$

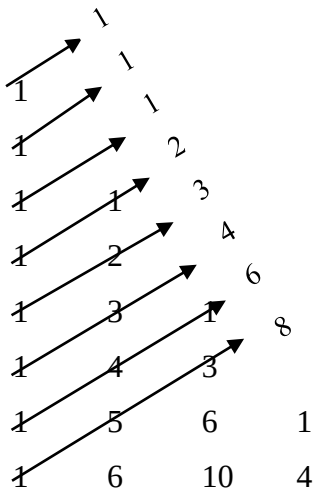
$$a_{n,k} = a_{n,-1k} + a_{n-2,k-1}$$

olarak tanımlanabilir.

n. artan köşegen toplamı d_n ile gösterelim. d_n dizisi 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19… şeklinde ilginç bir model gösterir. Aynı zamanda d_n dizisi $n \geq 4$ için aşağıdaki indirgeme bağıntısı ile tanımlanabilir,

$$d_1 = d_2 = d_3 = 1$$

$$d_n = d_{n-1} + d_{n-3}$$



$$a_{n,k} = \binom{n-k-1}{k}$$

olduğundan

$$d_n = \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3 \rfloor} a_{n-k,k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor} \binom{n-2k-1}{k}$$

olur.

Örnekler ile açıklayacak olursak

$$d_8 = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{8-1}{3} \right\rfloor} \binom{8-2k-1}{k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{7-2k}{k}$$

$$= \binom{7}{0} + \binom{5}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 5 + 3 = 9$$

bulunur.

$$d_{11} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{11-1}{3} \right\rfloor} \binom{11-2k-1}{k}$$

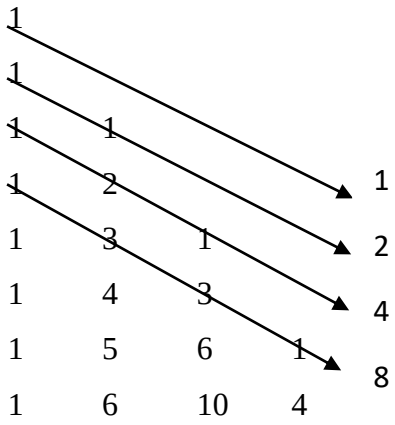
$$= \sum_{k=0}^{3} \binom{10-2k}{k}$$

$$= \binom{10}{0} + \binom{8}{1} + \binom{6}{2} + \binom{4}{3}$$

$$= 1 + 8 + 15 + 4 = 28$$

bulunur.

Azalan köşegen toplamları aşağıdaki dizide de görüleceği gibi yine ilginç bir dizilim sergiler. Bu toplamları q_n ile gösterelim. q_n dizisi: 1, 2, 4, 8, 16, 32…şeklindedir.



$n \geq 1$ için n'inci azalan köşegen toplamı

$$q_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n+k,k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$$

dır.

Lucas polinomlarının sıfır olmayan katsayıları da ilginç özellikler gösterir.

Tablo 5.4. Üçgensel B dizisi

n \ k	0	1	2	3	4	Katsayılar Toplamı
1	1					1
2	1	2				3
3	1	3				4
4	1	4	2			7
5	1	5	5			11
6	1	6	9	2		18
7	1	7	14	7		29
8	1	8	20	16	2	47

Yukarıdaki Tablo 5.4.'de Lucas polinomlarının sıfır olmayan katsayılarını sola dayalı bir dizide düzenlenerek oluşturuluyor. Burada katsayılar toplamı L_n yani Lucas sayılarını göstermektedir.

$n \geq 1$ ve $k \geq 0$ için $b_{n,k}$ dizininin $n.$ satırındaki ve $k.$ sütunundaki elemanını göstersin. Sonuç olarak:

1)$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} b_{n,k} = L_n$ dir.

2) $b_{n,k} = b_{n-1,k} + b_{n-2,k-1}$ dır. Burada $b_{1,0} = 1 = b_{2,0}$, $b_{2,1} = 2, n \geq 3$ ve $k \geq 0$.

3) x_n n'inci artan köşegen toplamını göstersin. Bu durumda, $x_1 = 1 = x_2$, $x_3 = 3$ ve $n \geq 4$ için genel denklemi $x_n = x_{n-1} + x_{n+3}$ dir.

4) $x_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor {(n-1)}/{3} \right\rfloor} \frac{n-k}{n-2k} \binom{n-2k}{k}$ dir.

Örneğin,

$$x_7 = \sum_{k=0}^{\left\lfloor {7-1}/{3} \right\rfloor} \frac{7-k}{7-2k} \binom{7-2k}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor 2 \rfloor} \frac{7-k}{7-2k} \binom{7-2k}{k}$$

$$= \frac{7}{7}\binom{7}{0} + \frac{6}{5}\binom{5}{1} + \frac{5}{3}\binom{3}{2} = 12$$

5.1.1. Fibonacci ve Lucas Polinomları için Binet Benzeri Formüller

$g_n = xg_{n-1} + g_{n-2}$ indirgeme bağıntısını ve başlangıç değerlerini kullanarak f_n ve l_n polinomları için Binet formülleri sırasıyla

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$l_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir. Burada

$$\alpha = \alpha(x) = \frac{x+\Delta}{2}, \qquad \beta = \beta(x) = \frac{x-\Delta}{2}$$

$t^2 - xt - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri ve $\Delta = \Delta(x) = \sqrt{x^2+4}$ dir. Dikkat edilirse $\alpha + \beta = x,\ \alpha - \beta = \Delta$ ve $\alpha\beta = -1$ dir.

$\alpha = \alpha f_1 + f_0$ ve $\alpha^2 = \alpha x + 1$ olduğundan $n \geq 1$ için tümevarım yönteminden $\alpha^n = \alpha f_n + f_{n-1}$ olduğu kolaylıkla görülür. Benzer olarak $\beta^n = \beta f_n + f_{n-1}$ olur.

f_n ve l_n için Binet formülleri kullanılarak Fibonacci ve Lucas polinomlarının tanımları negatif indislerine genişletilerek

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n \quad \text{ve} \quad l_{-n} = (-1)^n l_n$$

ile tanımlanır.

Şimdi Fibonacci polinomların katsayılarının Pascal üçgeniyle ilişkisini vereceğiz.

5.1.2. Fibonacci ve Lucas Polinomlarında Pascal Üçgeni

Fibonacci ve Lucas polinomlarını farklı olarak aşağıdaki şekilde de tanımlayabiliriz:

$$f_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-k}{k} x^{n-2k};$$

$$l_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$$

dir. İspatı tümevarım yöntemi ile kolaylıkla gösterilebilir.

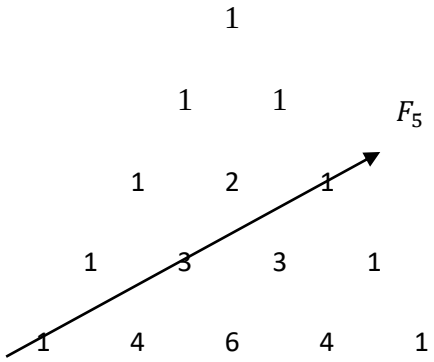
Örneğin,

$$f_5 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{3}{1} x^2 + \binom{2}{2} x^0$$

$$= x^4 + 3x^2 + 1$$

f_5 polinomunun katsayılar toplamı $1 + 3 + 1 = 5 = F_5$ dir.

Aşağıdaki Pascal üçgeninin kuzeydoğu köşegeni boyunca yazılan sayılar Fibonacci polinomlarımızın katsayılarını vermektedir. Bu durum Fibonacci sayılarının Pascal üçgeni ile güzel bir ilişkisini daha ortaya çıkarmaktadır.



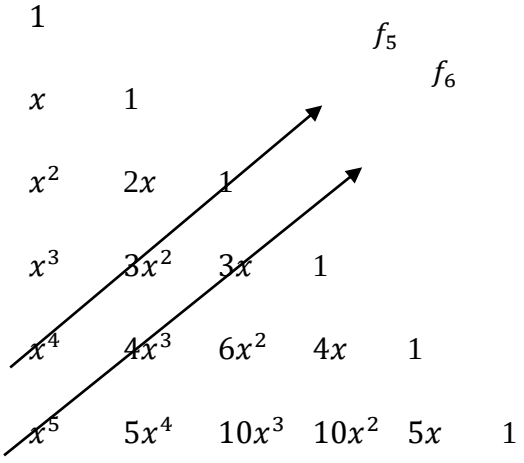
Pascal Üçgeni

Fibonacci polinomunu bulmanın bu yöntemi, farklı bir şekilde de ifade edilebilir. Bu kez sola dayalı bir üçgen dizi oluşturacağız.

x'in azalan kuvvetlerine göre ve Pascal üçgeni katsayılı olarak aşağıdaki binom açılım ile oluşturduğumuz polinom dizisinde n'inci kuzeydoğu köşegenlerinde n'inci Fibonacci polinomunun elde ediyoruz.

$$(x+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-r}$$

Örneğin,



$A(n,r)$, A dizisinin n. satır ve r. sütununu göstermek üzere, $A(n,r) = \binom{n}{r}x^{n-r}$ formülü ile yukarıdaki tablonun istenilen terimini bulmak mümkün oluyor. Burada $0 \leq r \leq n$ dir.

A dizisi $0 \leq r \leq n$ ve $n \geq 1$ için

$A(0,0) = 1, A(1,0) = x$

$A(n,r) = x\,A(n-1,r) + A(n-1,r-1)$

indirgeme bağıntısı ile verilebilir.

$n \geq 0$ için dizinin n. artan köşegen toplamı $d_n(x)$

$$d_n(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} A(n-r,r)$$

$$= \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-r}{r} x^{n-2r}$$

$$= f_{n+1},$$

Örneğin,

$$d_5(x) = \sum_{r=0}^{\lfloor 5/2 \rfloor} A(5-r,r)$$

$$= \sum_{r=0}^{2} \binom{5-r}{r} x^{5-2r}$$

$$= x^5 + 4x^3 + 3x = f_6$$

Şimdi de Lucas polinomları için inceleyelim**.**

$$\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$$

olduğundan

$$l_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} x^{n-2k}$$

olup

$$l_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right] x^{n-2k}$$

elde edilir.

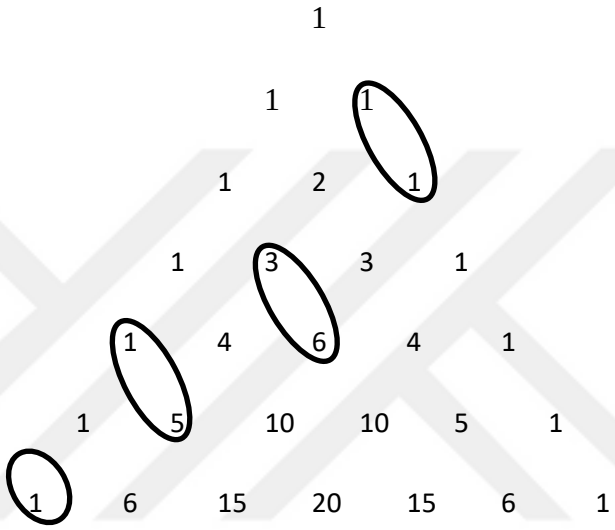
Örneğin,

$$l_6 = (1+0)x^6 + (5+1)x^4 + (6+3)x^2 + (1+1)x^0$$

$$= 1x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2;$$

Elde ettiğimiz polinomun katsayılar toplamına bakarsak $1+6+9+2 = 18 = L_6$ dır.

l_6 Lucas polinomunun katsayılarının Pascal üçgeni üzerindeki yerini aşağıdaki tabloda inceleyelim.



Pascal Üçgeni

5.2. Pell ve Pell-Lucas Polinomları

Pell polinomu $p_n(x)$ ve Pell-Lucas polinomu $q_n(x)$ ile gösterilsin. $p_n(x) = f_n(2x)$ ve $q_n(x) = l_n(2x)$ olarak tanımlanır. $n \geq 2$ için hem Pell polinomu $p_n(x)$ hem de Pell-Lucas Polinomu $q_n(x)$

$$g_n(x) = 2xg_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

aynı ikinci mertebeden indirgeme bağıntısını sağlarlar.

$g_0(x) = 0$ ve $g_1(x) = 1$ alındığında

$$g_n(x) = p_n(x)$$

Benzer şekilde, $g_0(x) = 2$ ve $g_1(x) = 2x$ alındığında

$$g_n(x) = q_n(x)$$

olacaktır.

Pell sayıları P_n ve Pell-Lucas sayıları Q_n olmak üzere $P_n = p_n(1) = f_n(2)$, $2Q_n = q_n(1) = l_n(2)$ dir.

Aynı ifadeyi $p_n(1/2) = F_n,\ q_n(1/2) = L_n$ şeklide ifade edebiliriz.

İlk on Pell ve Pell-Lucas sayıları aşağıdaki Tablo 5.5.'de, ilk on Pell ve Pell-Lucas polinomları Tablo 5.6.'da gösterilmiştir.

Tablo 5.5. İlk 10 Pell ve Pell-Lucas sayıları

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
Q_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363

Tablo 5.6. İlk 10 Pell ve Pell-Lucas polinomları

n	$p_n(x)$	$q_n(x)$
1	1	$2x$
2	$2x$	$4x^2 + 2$
3	$4x^2 + 1$	$8x^3 + 6x$
4	$8x^3 + 4x$	$16x^4 + 16x^2 + 2$
5	$16x^4 + 12x^2 + 1$	$32x^5 + 40x^3 + 10x$
6	$32x^5 + 32x^3 + 6x$	$64x^6 + 94x^4 + 36x^2 + 2$
7	$64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1$	$128x^8 + 224x^5 + 112x^3 + 14x$
8	$128x^8 + 192x^5 + 80x^3 + 8x$	$256x^8 + 512x^6 + 320x^4 + 64x^2 + 2$
9	$256x^8 + 448x^6 + 240x^4 + 40x^2 + 1$	$512x^9 + 1152x^7 + 864x^5 + 240x^3 + 18x$
10	$512x^9 + 1024x^7 + 672x^5 + 160x^3 + 10x$	$1024x^{10} + 2560x^8 + 2240x^6 + 800x^4 + 100x^2 + 2$

Pell-Lucas sayıları, Pell ve Lucas ile hiçbir ilgisi olmamasına rağmen hem Pell hem de Lucas'tan adını alır. Fibonacci ve Lucas sayıları gibi, Pell ve Pell-Lucas sayıları da, ikiz sayılar gibi davranır ve birçok ortak formül ve bağlantıları mevcuttur.

5.2.1. Pell ve Pell-Lucas Polinomlarında Binet Benzeri Formüller

Pell ve Pell–Lucas polinomları ve bunlara karşılık gelen sayılar Binet benzeri formüllerle de tanımlanabilir.

$\gamma(x) = x + D,\ \delta(x) = x - D,\ D = \sqrt{x^2+1}$ için

$$p_n = \frac{\gamma^n(x) - \delta^n(x)}{\gamma(x) - \delta(x)} \text{ ve } q_n = \gamma^n(x) + \delta^n(x)$$

ve $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$ için

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta} \ ve\ Q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

dir.

Burada $\gamma(x) + \delta(x) = 2x$, $\gamma(x) - \delta(x) = 2D$ ve $\gamma(x)\delta(x) = -1$ olduğu açıktır.

Ardışık Fibonacci ve Lucas sayılarının ve polinomlarının oranı sonsuzda limitlendiğinde, limit değerleri α ve $\alpha(x)$ oluyordu. Sonsuz limit durumu bu kez de Pell ve Pell-Lucas sayıları ve polinomları için incelendiğinde

$\alpha(2x) = \gamma(x)$ ve $\beta(2x) = \delta(x)$ olduğundan $|\gamma(x)| > |\delta(x)|$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{Q_{n+1}}{Q_n}$$

bulunur.

5.3. Tribonacci Sayı Dizisi ve Polinomları

5.3.1. Tribonacci Sayıları

Hem Fibonacci hem de Lucas sayıları söz konusu olduğunda, iki başlangıç koşulu olduğunu ve birbirini takip eden her sayının, kendisinden önce gelen iki sayının toplamı olduğunu biliyoruz. Bununla birlikte, bize üç başlangıç koşulu verildiğini ve bir sayı dizisi oluşturmak için ardışık sayıları hesaplamak için kendisinden önceki üç sayıyı topladığımızı varsayalım. Böyle bir dizi, ilk olarak M. Feinberg tarafından 1963'te Pennsylvania'daki Susquehanna Township Junior Lisesi'nde 14 yaşında dokuzuncu sınıf öğrencisiyken

incelenen tribonacci dizisidir (Feinberg, 1963),(Koshy, 2016). Bu bizi tribonacci sayılarının tanımına götürür.

Tanım 5.3.1.1. (Tribonacci Sayıları)

$T_1 = T_2 = 1\,, T_3 = 2$ $n \geq 4$ için $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara tribonacci sayıları denir ve n. tribonacci sayısı T_n ile gösterilir.

Ardışık Fibonacci ve Lucas sayılarının oranlarının altın oran α ya yakınsaması gibi, T_{n+1}/T_n tribonacci oranları da 1.83928675521416… irrasyonel sayıya yakınsar.

İlk 10 Tribonacci sayısını aşağıdaki tabloda veriyoruz,

Tablo 5.7. İlk 10 Tribonacci sayısı

n	T_n
1	1
2	1
3	2
4	4
5	7
6	13
7	24
8	44
9	81
10	149

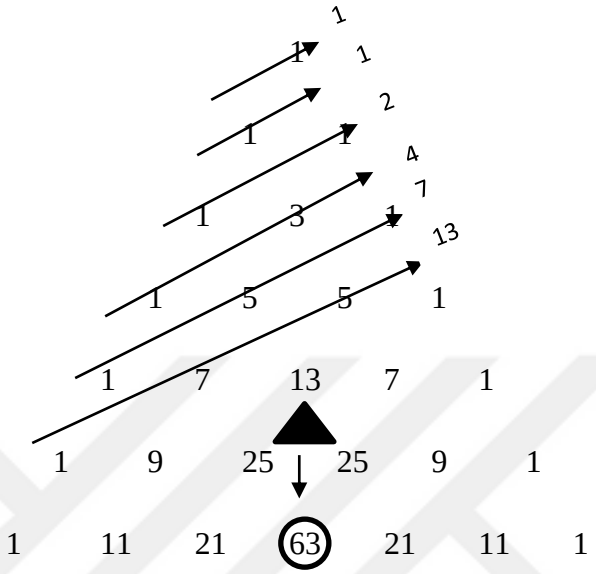
Pascal üçgeninin artan köşegenlerini kullanarak Fibonacci (ve dolayısıyla Lucas) sayılarını hesaplayabiliriz. Benzer şekilde, benzer bir üçgen dizi olan bir tribonacci dizisinin artan köşegenleri üzerindeki elemanları toplayarak tribonacci sayılarını hesaplayabiliriz.

Dizinin her elemanı $t\,(\,i\,,j\,)$ aşağıdaki gibi tekrarlı olarak tanımlanır, burada $i\,, j\ \geq\ 0$ dir.

$$t\,(\,i\,,j\,) = \begin{cases} 0, & i > j \; veya \; j < 0 \; ise \\ 1, & i = j \; ise \\ t\,(\,i\,-\,1, j\,-\,1) + t\,(\,i\,-\,1, j\,) + t\,(\,i\,-\,2, j\,-\,1), & i \geq 2 \; ise \end{cases}$$

Dizinin her elemanı önceki iki satırdaki üç yakın komşunun toplanmasıyla elde edilebilir. Örneğin, $63 = 25 + 25 + 13$. Artan köşegen toplamlar aslında tribonacci sayılarıdır.

Örneğin,



Tüm tribonacci sayılarını veren başka bir üçgen dizi daha vardır. Bu diziyi oluşturmak için, önce birkaç $n \geq 0$ değeri için $(1 + x + x^2)$ in açılımlarını bulalım:

$$(1 + x + x^2)^0 = 1$$

$$(1 + x + x^2)^1 = 1 + x + x^2$$

$$(1 + x + x^2)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$$

$$(1 + x + x^2)^3 = 1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6$$

$$(1 + x + x^2)^4 = 1 + 4x + 10x^2 + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8$$

Yukarıda verilen polinomların katsayılarından aşağıdaki tabloyu oluşturuyoruz. Tabloda x'in artan derecelerine göre katsayıları sütunlara yerleştirdik.

Yine tabloda görebileceğimiz ayrı bir durum ise katsayıların simetrik olmasıdır. İlk iki satır hariç, her satır bir önceki satırdan elde edilebilir. Örneğin, $19 = 6 + 7 + 6$ gibi.

Ayrıca tablodaki artan köşegendeki sayılar toplamı da tribonacci sayılarını verecektir.

$$b_1 = b_2 = b_3 = 1$$

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$$

b_n dizisinin ilk 12 terimi 1,1,1,3,5,9,17,31,57,105,193 ve 355 dir.

Burada ilginç bir gözlem yapıyoruz. Diyelim ki bu sayıları ilk üçü hariç arka arkaya yazıyoruz; sonra ilk on tribonacci sayısını, birincisi hariç, hemen alta sıra halinde yazıyoruz; sonra iki satırı ekliyoruz,

	3	5	9	17	31	57	105	193	355	
+	1	2	4	7	13	24	44	81	149	
	4	7	13	24	44	81	149	274	504	$\leftarrow T_n$

Ortaya çıkan toplamlar, $n \geq 4$ olan tribonacci sayıları T_n'dir.

5.3.2. Tribonacci Polinomları

1973 yılında Hoggatt ve Bicknell, tribonacci polinomları olarak adlandırılan bir tamsayı polinomları ailesi t_n tanıttı (Hoggatt, Bicknell, 1973).

Tribonacci polinomları $t_0(x) = 0, t_1(x) = 1$ ve $t_2(x) = x^2$ başlangıç şartları ve aşağıdaki indirgeme bağıntısı ile verilir:

$$t_n(x) = x^2 t_{n-1}(x) + x t_{n-2}(x) + t_{n-3}(x).$$

Ayrıca $t_n(1) = T_n$ olacaktır.

İlk 10 tribonacci polinomunu aşağıdaki tabloda veriyoruz,

Tablo 5.8. İlk 10 Tribonacci polinomları

n	$t_n(x)$
1	1
2	x^2
3	$x^4 + x$
4	$x^6 + 2x^3 + 1$
5	$x^8 + 3x^5 + 3x^2$
6	$x^{10} + 5x^7 + 6x^4 + 2x$
7	$x^{12} + 5x^9 + 10x^6 + 7x^3 + 1$
8	$x^{14} + 6x^{11} + 15x^8 + 16x^5 + 6x^2$
9	$x^{16} + 7x^{13} + 21x^{10} + 30x^7 + 19x^4 + 3x$
10	$x^{18} + 8x^{15} + 28x^{12} + 50x^9 + 45x^6 + 16x^3 + 1$

5.3.2.1. Tribonacci Dizisi

Tribonacci polinomlarının katsayıları aşağıdaki tabloda da görüldüğü gibi sola yaslanmış bir dizi olarak kullanılabilir. Tabi ki burada katsayılar toplamı Tribonacci sayılarını verecektir.

Tablo 5.9. Tribonacci dizisi

k / n	0	1	2	3	4	5	6	Katsayılar Toplamı
1	1							1
2	1							1
3	1	1						2
4	1	2	1					4
5	1	3	3					7
6	1	4	6	2				13
7	1	5	10	7	1			24
8	1	6	15	16	6			44
9	1	7	21	30	19	3		81
10	1	8	28	50	45	16	1	149

Burada $T(n,j)$, $n > j \geq 0$ olmak üzere dizinin n. satır ve j. sütunundaki elemanını göstersin. $n \geq 4$ için aşağıdaki indirgeme bağıntısı sağlanır:

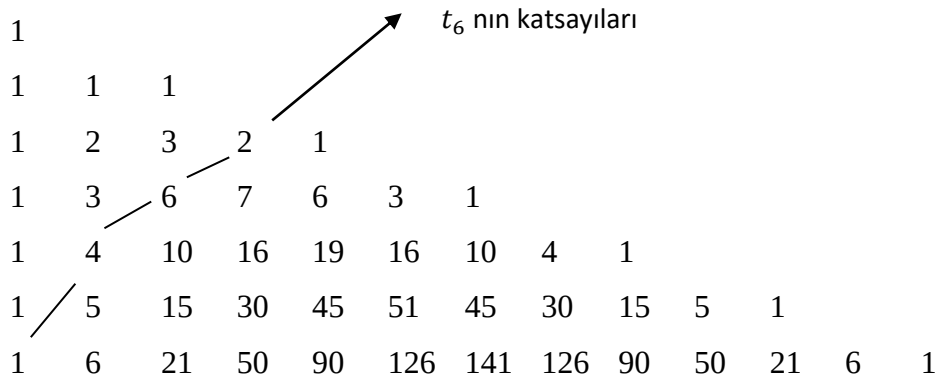
$$T(n,j) = T(n-1,j) + T(n-2,j-1) + T(n-3,j-2)$$

Örneğin,

$$T(9,4) = T(8,4) + T(7,3) + T(6,2)$$

$$30 = 16 + 10 + 4$$

dir.



Açıkçası, her satır simetriktir. İlk iki satır hariç, her satır bir önceki satırdan alınabilir. Bu diziden tribonacci dizisini, her sütunu bir önceki sütundan bir seviye fazla düşürerek elde edebiliriz. Sonuç olarak, üç terimli katsayı dizisinin artan köşegen toplamları da tribonacci sayılarını verir. Bu nedenle, artan her köşegenin toplamı bir tribonacci sayısıdır.

Tribonacci polinomu için açık bir formül geliştirebiliriz:

$$t_{n+1} = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor} T(n+1, j) x^{2n-3j}$$

dir.

Örneğin,

$$t_5 = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor} T(5, j) x^{8-3j}$$

$$= \sum_{j=0}^{2} T(5, j) x^{8-3j}$$

$$= T(5,0)x^8 + T(5,1)x^5 + T(5,2)x^2$$

$$= x^8 + 3x^5 + 3x^2$$

dir.

Bu şekilde istediğimiz tribonacci polinomunu bulabiliyoruz.

5.4. Gibonacci Polinomları

$n \geq 2$ olmak üzere

$$g_n(x) = xg_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

ikinci mertebeden rekürans (indirgeme) bağıntısı ile verilen Fibonacci polinomlarının geniş bir ailesi olan $g_n(x)$ gibonacci (genelleştirilmiş Fibonacci) polinomları verilmişti.

Şimdi bu aileyi daha da genişleterek ilginç özdeşliklerin polinom genişlemelerini içeren bir dizi önemli özellik çıkarıyoruz.

Tanım 5.4.1.

$a(x)$ ve $b(x)$ tam sayı katsayılı keyfi polinomlar olmak üzere

$$g_1 = a = a(x), \qquad g_2 = b = b(x)$$

olsun. Bu durumda $g_0 = b - ax$ dir. Ortaya çıkan g_n polinomlarına genelleştirilmiş Fibonacci polinomları veya kısaca gibonacci polinomları denir.

$a = 1 \; ve \; b = x$ olarak alınırsa $g_n(x) = f_n(x)$ ve $a = x$ ve $b = x^2 + 2$ olursa $g_n(x) = l_n(x)$, Üstelik, $p_n(x) = f_n(2x)$ ve $q_n(x) = l_n(2x)$ olduğunu hatırlayalım.

İlk altı gibonacci polinomunu aşağıda verilmiştir:

$$g_1 = a$$

$$g_2 = b$$

$$g_3 = a + bx$$

$$g_4 = ax + b(x^2 + 1)$$

$$g_5 = a(x^2 + 1) + b(x^3 + 2x)$$

$$g_6 = a(x^3 + 2x) + b(x^4 + 3x^2 + 1)$$

$G_n = g_n(1)$ sayısı n. gibonacci sayısıdır. İlk altı gibonacci sayısı $a,\ b,\ a + b,\ a + 2b,$ $2a + 3b \; ve \; 3a + 5b$ dir.

Gibonacci polinomlarındaki indirgeme bağıntıları kullanılarak, şimdi çift sayı ve tek sayı indisli gibonacci polinomları için indirgeme bağıntılarını bulalım.

$$\begin{aligned} g_{2n} &= xg_{2n-1} + g_{2n-2} \\ &= x(xg_{2n-2} + g_{2n-3}) + g_{2n-2} \\ &= (x^2+1)g_{2n-2} + (g_{2n-2} - g_{2n-4}) \\ &= (x^2+2)g_{2n-2} - g_{2n-4} \end{aligned}$$

Özel olarak $n = 4$ ve $g_n = l_n$ olsun.

$$\begin{aligned} (x^2+2)l_6 - l_4 &= (x^2+2)(x^6+6x^4+9x^2+2) - (x^4+4x^2+2) \\ &= x^8+8x^6+20x^4+16x^2+2 \\ &= l_8 \end{aligned}$$

Benzer şekilde g_{2n-1} in de dördüncü mertebeden indirgeme bağıntısını sağladığını görebiliriz.

$$\begin{aligned} g_{2n-1} &= xg_{2n-2} + g_{2n-3} \\ &= x(xg_{2n-3} + g_{2n-4}) + g_{2n-3} \\ &= (x^2+1)g_{2n-3} + xg_{2n-4} \\ &= (x^2+1)g_{2n-3} + g_{2n-3} - g_{2n-5} \\ &= (x^2+2)g_{2n-3} - g_{2n-5} \end{aligned}$$

Benzer şekilde $n = 4$ ve $g_n = f_n$ alınırsa,

$$\begin{aligned} (x^2+2)f_5 - f_3 &= (x^2+2)(x^4+3x^2+1) - (x^2+1) \\ &= x^6+5x^4+6x^2+1 = f_7 \end{aligned}$$

Şimdi gibonacci polinomları için bir toplama formülü veriyoruz.

5.4.1. Gibonacci Toplama Formülü

Teorem 5.4.1.1.

g_n, n. gibonacci polinomu ve $n \geq 2$ olsun. Bu durumda,

$$g_n = af_{n-2} + bf_{n-1}$$

dir.

Örneğin,

$$g_6 = af_4 + bf_5$$
$$= a(x^3 + 2x) + b(x^4 + 3x^2 + 1)$$
$$= \begin{cases} x^5 + 4x^3 + 3x = f_6\,, & a = 1\ ve\ b = x\ ise \\ x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2 = l_6\,, & a = x\ ve\ b = x^2 + 2\ ise \end{cases}$$

Teorem 5.4.1.2

$g_n, n.$ gibonacci polinomu ve $m, n \geq 0$ olsun. Bu durumda,

$$g_{n+m} = f_{m+1}g_n + f_m g_{n-1}$$

dir (Koshy, 2019).

Bunu bir örnekle açıklayalım. Gibonacci polinomları için indirgeme bağıntılarını tekrarlı olarak kullanılarak,

$$g_{n+4} = f_2 g_{n+3} + f_1 g_{n+2}$$
$$= f_2(xg_{n+2} + g_{n+1}) + f_1 g_{n+2}$$
$$= (xf_2 + f_1)g_{n+2} + f_2 g_{n+1}$$
$$= f_3(xg_{n+1} + g_n) + f_2 g_{n+1}$$
$$= (xf_3 + f_2)g_{n+1} + f_3 g_n$$
$$= f_4(xg_n + g_{n-1}) + f_3 g_n$$
$$= (xf_4 + f_3)g_n + f_4 g_{n-1}$$
$$= f_5 g_n + f_4 g_n$$
$$= (x^4 + 3x^2 + 1)g_n + (x^3 + 2x)g_{n-1}$$

Fibonacci, Lucas, Pell ve Pell-Lucas polinomları için geleneksel toplama formülleri bu teoremden de görülür: $f_{n+m} = f_{m+1}f_n + f_m f_{n-1}$;

$$l_{n+m} = f_{m+1}l_n + f_m l_{n-1};$$
$$p_{n+m} = f_{m+1}p_n + f_m p_{n-1};$$
$$q_{n+m} = f_{m+1}q_n + f_m q_{n-1}$$

dir.

5.4.2. Gibonacci Toplamaları

İlk n gibonacci polinomunun toplamı aşağıdaki teorem ile verilsin.

Teorem 5.4.2.1

$$x\sum_{k=1}^{n} g_k = g_{n+1} + g_n - g_1 - g_0$$

dir (Koshy, 2019).

İspat

İki teleskop toplam formülünü kullanarak ispat yapılır:

$$\begin{aligned} xg_k &= g_{k+1} - g_{k-1} \\ &= (g_{k+1} - g_k) + (g_k - g_{k-1}) \end{aligned}$$

olup

$$x\sum_{k=1}^{n} g_k = \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k) + (g_k - g_{k-1})$$

$$= (g_{n+1} - g_1) + (g_n - g_0)$$

$$= g_{n+1} + g_n - g_1 - g_0$$

elde edilip ispat tamamlanır.

Benzer şekilde bu toplamları Fibonacci ve Lucas polinomlarında uygulayacak olursak,

$$x\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+1} + f_n - 1$$

$$x\sum_{k=0}^{n} l_k = l_{n+1} + l_n - x - 2$$

6. GİBONOMİYEL KATSAYILAR

Tanım 6.1.

x bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda, f_n de pozitif bir tamsayıdır. $f_n^* = f_n f_{n-1} \dots f_2 f_1$ ve $f_0^* = 1$ olsun. Bu durumda

$$\left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right] = \begin{cases} 0, & k < 0 \text{ veya } n < k \; ise \\ 1, & k = 0 \text{ veya k} = n \; ise \\ \dfrac{f_n^*}{f_k^* f_{n-k}^*} = \dfrac{f_n f_{n-1} \dots f_{n-k+1}}{f_k f_{k-1} \dots f_2 f_1}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlanan $\left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right]$ ifadesine gibonomiyel katsayı denir (Koshy, 2017).

Tanımdan da görüldüğü gibi $\left[\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}\right] = 1$ ve $\left[\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}\right] = 1$ olarak tanımlanır.

Özellikler $0 \leq k \leq n$ olmak üzere,

Özellik 1

$$\left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}\right]$$

dır.

Örneğin,

$$\left[\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right] = \frac{f_3^*}{f_2^* f_1^*} = x^2 + 1 = \left[\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$$

ve benzer şekilde

$$\left[\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right] = \frac{f_4^*}{f_2^* f_2^*} = \frac{f_4 f_3 f_2^*}{f_2^* f_2 f_1} = \frac{f_4 f_3}{f_2 f_1} = \frac{(x^3 + 2x)(x^2 + 1)}{x} = x^4 + 3x^2 + 2$$

olur.

Özellik 2

$$\left[\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}\right] f_{k+1} + \left[\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}\right] f_{n-k-1}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}\right] f_{k-1} + \left[\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}\right] f_{n-k+1}$$

Örneğin,

$$\left[\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right] f_3 + \left[\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right] f_0 = x^2 + 1;$$

$$\left[\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right] f_1 + \left[\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right] f_3 = (x^2+1) + (x^2+1)^2 = x^4 + 3x^2 + 2$$

Gibonomiyel katsayıları kullanarak aşağıdaki gibonomiyel üçgeni oluşturalım.

1

1 1

1 x 1

1 x^2+1 x^2+1 1

1 x^3+2x x^4+3x^2+2 x^3+2x 1

Gibonomiyel Üçgen

Sonuç 6.2.

1)

$$\left[\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}n-1\\1\end{bmatrix}\right] f_0 + \left[\begin{bmatrix}n-1\\0\end{bmatrix}\right] f_n$$

$$= f_n = \left[\begin{bmatrix}n\\n-1\end{bmatrix}\right]$$

olur. Böylece, $n \geq 1$ için hem artan hem de azalan köşegen 1, f_n den oluşur.

2)

$$\left[\begin{bmatrix}n\\2\end{bmatrix}\right] = \frac{f_n^*}{f_2^* f_{n-2}^*} = \frac{1}{x} f_n f_{n-1}$$

dir. Yani üçgenin ikinci köşegeninde bulunan tüm elemanlar, birinci köşegen üzerindeki ardışık iki elemanın çarpımının x'e bölünmesiyle bulunur. $f_n f_{n-1}$ polinomlarında x çarpanı bulunduğundan $\frac{f_n^*}{f_2^* f_{n-2}^*}$ nin tamsayı katsayılı bir polinom olduğu ortaya çıkar.

Örneğin,

$$\left[\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}\right] = x^6 + 5x^4 + 7x^2 + 2$$

$$= \frac{1}{x}(x^4 + 3x^2 + 1)(x^3 + 2x)$$

$$= \tfrac{1}{x} f_5 f_4 = \left[\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\right]$$

3)

Özellik 2 den de görüldüğü gibi her gibonomiyel katsayının tamsayı değerli bir polinom olduğunu söyleyebiliriz.

4)

$f_{k+1} + f_{k-1} = l_k$ olduğundan Özellik 2 den

$$2\left[\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}n-1\\r\end{bmatrix}\right] l_r + \left[\begin{bmatrix}n-1\\r-1\end{bmatrix}\right] l_{n-r}$$

olur. Sonuç olarak, önceden bilinen $2f_n = f_{n-r} l_r + f_r l_{n-r}$ denklemi elde edilir. Ayrıca buradan

$$2\binom{n}{r}_F = \binom{n-1}{r}_F L_r + \binom{n-1}{r-1}_F L_{n-r}$$

sonucu çıkar.

6.1. Merkezi Gibonomiyel Katsayılar

Merkezi gibonomiyel katsayılar $\left[\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}\right]$ şeklinde olup birçok özellik içerir. Özellik 2 den,

$$\left[\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}2n-1\\n\end{bmatrix}\right] f_{n+1} + \left[\begin{bmatrix}2n-1\\n-1\end{bmatrix}\right] f_{n-1}$$

$$= \left[\begin{bmatrix}2n-1\\n\end{bmatrix}\right] f_{n+1} + \left[\begin{bmatrix}2n-1\\n\end{bmatrix}\right] f_{n-1}$$

$$= \left[\begin{bmatrix}2n-1\\n\end{bmatrix}\right] (f_{n+1} + f_{n-1})$$

$$= \left[\begin{bmatrix}2n-1\\n\end{bmatrix}\right] l_n.$$

Böylece merkezi gibonomiyel katsayı $\left[\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix}\right]$, gibonomiyel dizisindeki kuzeydoğu (veya kuzeybatı) komşusu ile l_n'nin çarpımıdır.

Örneğin,

$$\left[\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}\right] = x^9+8x^7+22x^5+23x^3 + 6x$$

$$= (x^6+5x^4 + 7x^2 + 2)(x^3 + 3x) = \left[\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix}\right] l_3$$

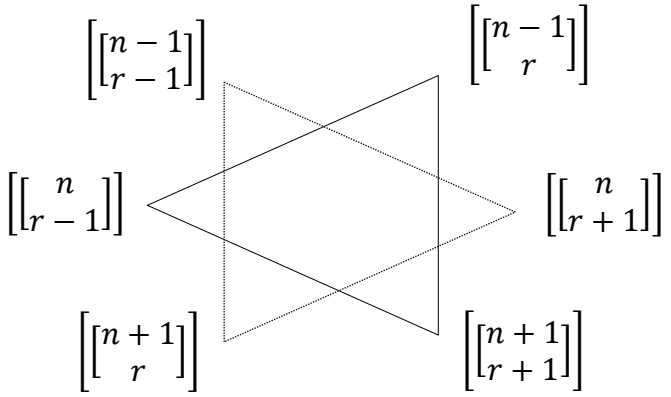
Buradan önceden bilinen $f_{2n} = f_n l_n$ olduğu da görülür.

6.2. David Yıldızı Özelliği

Gibonomial katsayılar David Yıldızı özelliğini sağlar:

$$\left[\begin{bmatrix}n-1\\r-1\end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix}n\\r+1\end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix}n+1\\r\end{bmatrix}\right] = \left[\begin{bmatrix}n-1\\r\end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix}n+1\\r+1\end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix}n\\r-1\end{bmatrix}\right]$$

Bunu aşağıdaki şekilde de görebiliriz:



Bu özellik cebirsel olarak da kurulabilir:

$$\left[\begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} n \\ r+1 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}\right] = \frac{f_{n-1}^*}{f_{r-1}^* f_{n-r}^*} \cdot \frac{f_n^*}{f_{r+1}^* f_{n-r-1}^*} \cdot \frac{f_{n+1}^*}{f_r^* f_{n-r+1}^*}$$

$$= \frac{f_{n-1}^*}{f_r^* f_{n-r-1}^*} \cdot \frac{f_{n+1}^*}{f_{r+1}^* f_{n-r}^*} \cdot \frac{f_n^*}{f_{r-1}^* f_{n-r+1}^*}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} n+1 \\ r+1 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix}\right]$$

Örneğin,

$$\left[\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}\right] = (x^4+3x^2+2)(x^4+3x^2+1)(x^6+5x^4+7x^2+2)(x^3+3x)$$

$$= (x^{11}+9x^9+30x^7+45x^5+29x^3+6x)(x^6+5x^4+7x^2+2)$$

$$= (x^3+2x)(x^6+6x^4+10x^2+3)(x^2+1)(x^6+5x^4+7x^2+2)$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}\right]\left[\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}\right]$$

dır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada özel sayı dizileri olan Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas ve tribonacci sayı dizileri ve bu sayı dizileri ile ilişkili polinomlar ve ilişkili binom katsayıları çalışıldı. Polinomlar ile ilgili verilen teoremler ve özdeşlikler, tablolar ve örnekler yardımıyla daha sade ve anlaşılır hale getirilmeye çalışıldı. Fibonomiyel, Gauss binomiyel ve gibonomiyel katsayılar üzerinde duruldu. Binomiyel katsayılar ile genelleştirilmiş binomiyel katsayıların özellikleri benzer ve farklı yönleri gösterildi. Fibonacci dizileri ile ilişkili binom katsayıları olan genelleştirilmiş Fibonomiyel katsayılar (gibonomiyel) detaylı olarak incelendi.

Öneri olarak ileride farklı özel sayı dizileri ile ilişkili binom katsayıları üzerine çalışmalar yapılabilir. Yine, genelleştirilmiş Fibonacci polinomları gibi diğer özel sayı dizileriyle ilişkili polinomların binom katsayılarla ilişkisi üzerinde de çalışmalar yapılabilir.

8. KAYNAKLAR

Akkuş, İ. (2011). *Binom Katsayılarının Dizisel Genelleştirmeleri* (Doktora Tezi), 4 Ankara Üniversitesi. Ankara.

Bicknell, M. (1970). A Primer for the Fibonacci Numbers: Part VII, *The Fibonacci Quarterly*, 407–420.

Benjamin, A.T., Quinn J.J. (1999). Recounting Fibonacci and Lucas Identities, *The College Mathematics Journal*, 359–366.

Corcino, R.B. (2008). On $p-q$ Binomial Coefficients, *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory,* 8-16.

Dziemianczuk, M. (2009). Generalization of Fibonomial Coefficients, *Math.co*. arXiv0908.3248D, 1-3.

Eren, Y. (2015). *Binom Katsayılarının Bazı Genelleştirmeleri* (Yüksek Lisans Tezi), 32-33 Kırıkkale Üniversitesi. Kırıkkale.

Feinberg, M. (1963). Fibonacci–Tribonacci, *The Fibonacci Quarterly*, 70–74.

Fontené, G. (1915). Généralisation d'une formule concune, *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 110-112.

Gould, H. W. (1969). The Bracket Function and Fontené-Ward Generalized Binomial Coefficients with Applications to Fibonomial Coefficients, *The Fibonacci Quarterly*, 23-40.

Gould, H. W. (1974). Generalization of Hermite's divisibility theorems and the Mann-Shanks primality criterion for $s-$Fibonomial Arrays, *The Fibonacci Quarterly*, 157-166.

Hoggatt, Jr. V.E., Bicknell, M. (1973). Generalized Fibonacci Polynomials, *The Fibonacci Quarterly*, 457–465.

Kızılateş, C. (2012). *Gauss Binomiyel ve Fibonomiyel Katsayıların Özellikleri* (Yüksek Lisans Tezi), 6-8, Gazi Üniversitesi. Ankara.

Koshy, T. (2016) *Combinatorial Models for Tribonacci Polynomials,* 101–107, 287-290, The Mathematical Scientist.

Koshy T. (2017) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications Vol. 1*, 125-130, 202-204, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Koshy T. (2019) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications Vol. 2*, 145-148, 195-198, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Krot, E. (2004). An Introduction to Finite Fibonomial Calculus, *Central European Journal of Mathematics*, 754-766.

Kwansniewski A. K.,(2009). Fibonomial Cumulative Connection Constants, *Math.co*. arXiv:math/0406006v6

Özvatan, M. (2018). *Generalized Golden-Fibonacci Calculus And Appiıcations* (Yüksek Lisans Tezi), 72-73, 9 Eylül Üniversitesi İzmir.

Parmanand, S. (1986). Acharya Hemachandra and the (so called) Fibonacci Numbers, *Math. Ed. Siwan*, 28-30.

Parmanand, S. (1985). The So-called Fibonacci numbers in ancient and medieval India, *Historia Mathematica*, 29–44.

Seibert, J., Trojovsky, P. (2005). On certain identities for The Fibonomial Coefficients, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, 119-127.

Ward, M. (1936). A calculus of sequences, *American Journal of Mathematics*, 255-266.