

MINKOWSKI 4-UZAYINDA SPACE-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR

MURAT SELVİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

2020

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI 4-UZAYINDA SPACE-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR

MURAT SELVİ

Tez Danışmanı

DOÇ. DR. MURAT BABAARSLAN

YOZGAT- 2020

Her hakkı saklıdır

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Murat SELVİ

23/12/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI 4-UZAYINDA SPACE-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR

MURAT SELVİ

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. MURAT BABAARSLAN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Tezin birinci bölümünde; loksodromların uygulamalarından ve tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir. Tezin ikinci bölümünde; Minkowski 4-uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. Ayrıca Minkowski 4-uzayındaki dönel yüzeyler oluşturulmuştur. Tezin üçüncü bölümünde; Minkowski 4-uzayındaki space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların denklemleri elde edilmiştir. Tezin dördüncü bölümünde; elde edilen loksodromlara örnekler verilmiş, loksodromların yay uzunlukları hesaplanmış ve loksodromların grafikleri Mathematica programı yardımıyla çizilmiştir. Şimdiye kadar Minkowski 4-uzayında space-like dönel yüzeyler üzerindeki loksodromlarla ilgili çalışma yapılmadığından bu tez çalışmanın sonuçlarının navigasyon çalışmalarına katkı sağlaması beklenmektedir.

2020, 22 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Loksodrom, Dönel Yüzey, Minkowski 4-Uzayı.

ABSTRACT

MASTER THESIS

SPACE-LIKE LOXODROMES ON SPACE-LIKE ROTATIONAL SURFACES IN MINKOWSKI 4-SPACE

MURAT SELVİ

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. MURAT BABAARSLAN

This thesis study consists of four parts. In the first part of the thesis; the application areas of loxodromes and historical development of loxodromes were mentioned. In the second part of the thesis; the fundamental definitions related to the curves and surfaces in Minkowski 4-space were given. Also rotational surfaces in Minkowski 4-space were obtained. In the third part of the thesis; the equations of space-like loxodromes on space-like rotational surfaces in Minkowski 4-space were obtained. In the fourth part of the thesis; the examples were given for obtained loxodromes, arc lengths of loxodromes were calculated and graphs of loxodromes were drawn with the help of Mathematica program. Until now there has been no study on loxodromes on space-like rotational surfaces in Minkowski 4-space so these results are expected to contribute to navigation.

2020, 22 PAGE

KEYWORDS: Loxodrome, Rotational Surface, Minkowski 4-Space.

ÖNSÖZ

Minkowski 4-uzayında space-like dönel yüzeyler üzerindeki loksodromlarla ilgili şimdiye kadar bir çalışma yapılmamıştır. Bu tez çalışmasının sonuçlarının navigasyon çalışmalarına katkı sağlaması beklenmektedir.

Yüksek lisans ve tez sürecinde emeğini benden hiç esirgemeyen, her koşulda desteğini sunan her zaman yapıcı olup bilgi ve birikimlerinden faydalandığım çok kıymetli akıl hocam, danışmanım Doç. Dr. Murat BABAARSLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu yolda beni yalnız bırakmayan değerli yol arkadaşım Murat GÜMÜŞ'e bana kattıklarından dolayı teşekkür ederim.

Kıymetli babam Mustafa SELVİ ve biricik annem Tekmile SELVİ'ye bana her zaman güç verdikleri, çıktığım her yolda daima yanımda oldukları gerek akademik gerekse insani yönden beni yetiştirdikleri için sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, Yozgat Bozok Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 6601-FBE/19-292 nolu Tez Destek Projesi ile desteklenmiştir.

Murat SELVİ

23/12/2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
ABSTRACT v
ÖNSÖZ vi
İÇİNDEKİLER vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ viii
SİMGELER VE KISALTMALAR ix
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 3
3. SPACE-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR 9
3.1. Eliptik Tip Space-like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-like Loksodromlar 9
3.2. Hiperbolik Tip Space-like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-like Loksodromlar 11
3.3. Parabolik Tip Space-like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-like Loksodromlar 12
4. ÖRNEKLER 16
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 21
KAYNAKLAR 22

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 1.1. Loksodromun steografik izdüşümü 1
Şekil 4.1. Eliptik tip space-like dönel yüzey,
Space-like loksodrom (yeşil), Space-like meridyen (mavi)..... 17
Şekil 4.2. Hiperbolik tip space-like dönel yüzey
Space-like loksodrom (yeşil), Space-like meridyen (mavi)..... 18
Şekil 4.3. Parabolik tip space-like dönel yüzey
Space-like loksodrom (yeşil), Space-like meridyen (mavi)..... 20

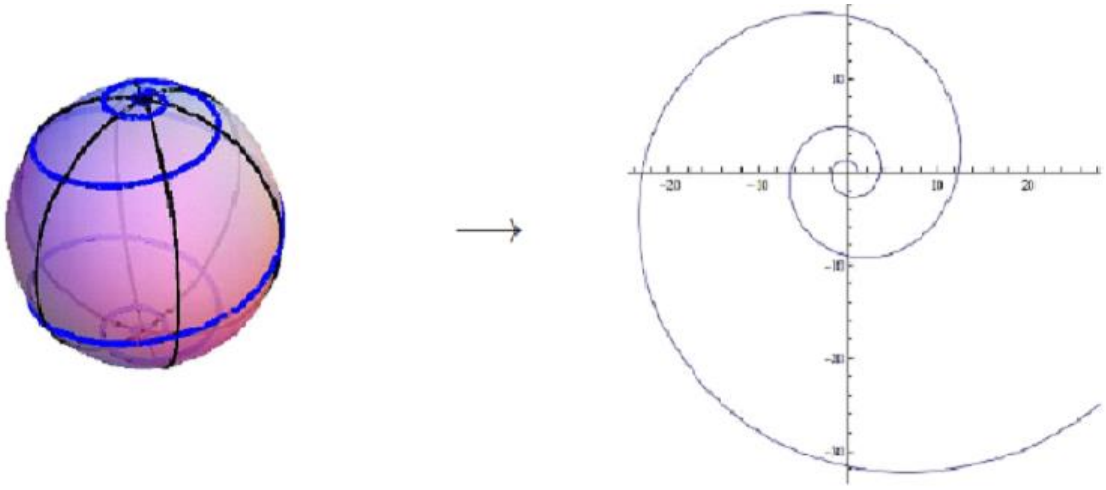
SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{E}_1^4$	Minkowski 4-uzayı (Minkowski uzay-zaman)
$\mathbb{E}_1^3$	Minkowski 3-uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\langle .,. \rangle$	Skalar çarpım
$\| \cdot \|$	Bir vektörün normu
β_i	Profil eğrisi
P_i	Düzlem
Π_i	Hiperdüzlem
S	Yüzey
R_i	Dönel yüzey
ds^2	Metrik tensör (Birinci temel form)
E, F, G	Birinci temel form katsayıları
s	Yay uzunluğu
θ	Space-like iki vektör arasındaki Lorentzian space-like açı
α_i	Space-like loksodrom

1. GİRİŞ

Loksodromlar dünya yüzeyi üzerindeki bütün meridyenleri aynı açıyla kesen eğrilerdir. Loksodromlar büyük çember yayları (geodezikler) değildirler. Bu yüzden dünya yüzeyi üzerindeki en kısa mesafeyi vermezler. Ancak bir noktadan başka bir noktaya gitmek için uygun bir mesafe verdiklerinden navigasyonda sık sık kullanılırlar. Günümüzde Küresel Konumlandırma Sistemi (GPS)'in kullanılabilirliğine rağmen loksodromlar uçak pilotları ve gemi kaptanları tarafından bilinmelidir (Alexander, 2004). Denizcilikte asıl amaç geminin hareket noktasından varış noktasına en kısa ve en güvenli yoldan ulaşmaktır. Burada doğru konum ve yön bilgisi denizcilerin ihtiyaç duyduğu en önemli bilgilerdir. Öte yandan, başlangıç ve varış noktasının bulunduğu büyük çember yayı (geodezik) denizcinin hedefine varmak için ihtiyaç duyduğu en kısa mesafeyi oluşturacaktır. Ancak bu durumda denizciler her seferinde yön değiştirmelidirler. Bunun nedeni ise geminin izleyeceği büyük çember yayı, geçecekleri her meridyenle farklı bir açıya sahip olmasıdır. Bundan dolayı denizciler, eğer gidecekleri yol çok uzamayacaksa, meridyenleri hep aynı açıyla kesen loksodromdan (kerte hattı) ilerlemeyi tercih ederler (Darkot, 1957).

1905 yılında Noble, Öklid 3-uzayında dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemlerini bulmuştur (Noble, 1905). Dönel yüzey olan küre üzerindeki loksodromların stereografik izdüşümleri logaritmik spirallerlerdir (Şekil 1.1).



Şekil 1.1 Loksodromun steografik izdüşümü (Babaarslan ve Munteanu, 2015)

Babaarslan ve Munteanu, Minkowski 3-uzayındaki dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların denklemlerini araştırmıştır (Babaarslan ve Munteanu, 2015). Ayrıca Babaarslan ve Yaylı, Minkowski 3-uzayındaki dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların

denklemlerini bulmuştur (Babaarslan ve Yaylı, 2014). Öklid 4-uzayındaki dönel yüzeyler üzerindeki loksodromlar, Babaarslan tarafından çalışılmıştır (Babaarslan, 2019). Minkowski 4-uzayındaki eliptik, hiperbolik ve parabolik tip space-like dönel yüzeylerin geometrik özellikleri Dursun ve Bektaş tarafından incelenmiştir (Dursun ve Bektaş, 2014).

Minkowski uzay-zamanı adını ünlü Alman matematikçi Hermann Minkowski'den almıştır. Hermann Minkowski, Albert Einstein'in özel izafiyet (görelilik) teorisinden yola çıkarak üç boyutlu uzaya, zaman boyutunu da katarak dört boyutlu uzay-zamanı keşfetmiştir. Keşfedilen bu uzayın kendine özgü bir metriği bulunmaktadır (Bilgin, 2015). Minkowski uzay-zamanı olarak nitelendirilmesinde etkili olan unsur ise klasik üç boyuttan oluşan uzay kavramı yerine buna zamanı da ekleyerek dördüncü boyutu oluşturmasıdır (Dağlı, 2012).

Bu tez çalışmasında, Minkowski 4-uzayında (Minkowski uzay-zaman) space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen loksodromlara örnekler verilmiş, loksodromların yay uzunlukları hesaplanmış ve loksodromların grafikleri Mathematica programı yardımıyla çizilmiştir. Şimdiye kadar Minkowski 4-uzayında space-like dönel yüzeyler üzerindeki loksodromlarla ilgili çalışma yapılmadığından bu tez çalışmasının sonuçlarının navigasyon çalışmalarına katkı sağlaması beklenmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümünde, Minkowski 4-uzayındaki eğriler ve yüzeyler ile ilgili temel tanımlar verilmiştir. Ayrıca Minkowski 4-uzayındaki dönel yüzeyler oluşturulmuştur.

Tanım 2.1. V bir vektör uzayı olmak üzere $\forall x \in V$ için $g(x, y) = 0$ olacak şekilde V nin en az bir $y \neq 0$ vektörü varsa g simetrik bilineer formuna V de dejeneredir denir. Aksi halde non-dejenere ismi verilir (Ferrandez vd, 2001a).

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^4$, dört boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ vektörleri için

$$g(x, y) = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 \tag{1}$$

Lorentz metriği (non-dejenere) ile verilen uzaya, Minkowski 4-uzayı denir ve $\mathbb{E}_1^4$ ile gösterilir (Ractliffe, 2006).

Bu metriğin işaret matrisi ise

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Ractliffe, 2006).

Tanım 2.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında x keyfi bir vektör olmak üzere;

i. $\langle x,x \rangle > 0$ ise bu vektöre space-like,

ii. $\langle x,x \rangle < 0$ ise bu vektöre time-like,

iii. $\langle x,x \rangle = 0$ ise bu vektöre light-like (null) vektör adı verilir.

Ayrıca bu kategoriye vektörün kozsul karakteri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında keyfi bir x vektörü alınsın. Bu x vektörünün normu;

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x,x \rangle|} \tag{2}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bir x birim vektörü için $\langle x,x \rangle = \pm 1$ dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında x ve y, space-like bir düzlemi geren space-like vektörler olsunlar. Bu durumda,

$$\left|\langle x,y\rangle\right| = \|x\|\|y\|\cos\theta \tag{3}$$

olacak şekilde bir tek $\theta \in 0,\pi$ reel sayısı vardır, burada $\theta \in 0,\pi$, u ve v vektörleri arasındaki Lorentzian space-like açı olarak adlandırılır (Ractliffe, 2006).

Tanım 2.6. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olmak üzere $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^4$ bir eğri olsun. α nın her noktada türevleri var ve sürekli, ayrıca $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisi düzgün ve regüler eğri olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.7. Düzgün ve regüler bir $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^4$ eğrisi için;

i. $\langle \dot{\alpha},\dot{\alpha}\rangle > 0$ ise bu eğriye space-like,

ii. $\langle \dot{\alpha},\dot{\alpha}\rangle < 0$ ise bu eğriye time-like,

iii. $\langle \dot{\alpha},\dot{\alpha}\rangle = 0$ ise bu eğriye light-like (null) eğri adı verilir.

Burada $\dot{\alpha} = d\alpha / dt$ dır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.8. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}_1^4$ düzgün ve regüler bir eğri olmak üzere β eğrisinin t_0 ve t arasındaki yay uzunluğu

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\beta'(t)\| dt \tag{4}$$

dir. $\|\beta'(s)\| = 1$ ise β eğrisine birim hızlı bir eğri denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.9. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, $U \subset \mathbb{R}^2$ açık alt küme olmak üzere $S : U \to \mathbb{E}_1^4$ düzgün S yüzeyi için;

i. S yüzeyinin birinci temel formu pozitif tanımlı ise S yüzeyine space-like,

ii. S yüzeyinin birinci temel formu 1 indeksli non-dejenere ise bu yüzeye time-like bir yüzey denir.

S yüzeyinin birinci temel formu non-dejenere ise bu yüzeye non-dejenere bir yüzey denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.10. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık ve $\Pi \subset \mathbb{E}_1^4$ bir hiperdüzlem olmak üzere $\beta : I \to \Pi$ düzgün profil eğrisini ve Π hiperdüzleminde bir P düzlemini alalım. β profil eğrisinin P düzlemi etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeye $\mathbb{E}_1^4$ uzayında bir dönel yüzey denir (Dursun ve Bektaş, 2014).

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında G işaret matrisi ve P_i düzlem olmak üzere P_i düzlemini invaryant bırakan A dönme matrisi aşağıdaki üç şartı sağlar:

i. $A^t.G.A = G$,

ii. $A.P_i = P_i$,

iii. $det\, A = 1$ (Ractliffe, 2006).

Böylece $\mathbb{E}_1^4$ uzayında üç tip dönel yüzey vardır.

Eliptik tip dönel yüzey şu şekildedir:

$\mathbb{E}_1^4$ uzayının standart ortonormal bazı $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ olsun. Burada $\eta_1 = (1,0,0,0)$, $\eta_2 = (0,1,0,0)$, $\eta_3 = (0,0,1,0)$, $\eta_4 = (0,0,0,1)$ dır. Π_1 hiperdüzlemi, η_1, η_3, η_4 bazı ve P_1 düzlemi, η_3, η_4 bazı tarafından gerilsin. P_1 düzlemi invaryant bırakan dönme matrisi

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

$u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $x(u) > 0$ olacak şekilde Π_1 hiperdüzleminde bir $\beta_1(u) = (x(u), 0, z(u), w(u))$ profil eğrisi alalım. Böylece, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında oluşan dönel yüzeye eliptik tip dönel yüzey denir ve R_1 eliptik tip dönel yüzeyin parametrik denklemi

$$X_1(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \\ w(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u)\cos v \\ x(u)\sin v \\ z(u) \\ w(u) \end{bmatrix}$$

veya

$$X_1(u,v) = x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u), w(u) \tag{5}$$

ile verilir (Dursun ve Bektaş, 2014).

Hiperbolik tip dönel yüzey şu şekildedir:

Π_2 hiperdüzlemi, η_1, η_2, η_4 bazı ve P_2 düzlemi, η_1, η_2 bazı tarafından gerilsin. P_2 düzlemini invaryant bırakan dönme matrisi

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & 0 & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix}$$

dır.

$u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $w(u) > 0$ olacak şekilde Π_2 hiperdüzleminde bir $\beta_2(u) = (x(u),\ y(u),\ 0,\ w(u))$ profil eğrisi alalım. O halde $\mathbb{E}_1^4$ uzayında oluşan dönel yüzeye hiperbolik tip dönel yüzey denir ve R_2 hiperbolik tip dönel yüzeyin parametrik denklemi

$$X_2(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & 0 & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \\ w(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ w(u)\sinh v \\ w(u)\cosh v \end{bmatrix}$$

veya

$$X_2(u,v) = x(u), y(u), w(u)\sinh v, w(u)\cosh v \tag{6}$$

şeklindedir (Dursun ve Bektaş, 2014).

Parabolik tip dönel yüzey şu şekildedir:

$\mathbb{E}_1^4$ uzayının yarı-ortonormal bazı $\eta_1,\eta_2,\xi_3,\xi_4$ olsun. Burada $\xi_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_4-\eta_3)$ ve $\xi_4=\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_3+\eta_4)$ dir. Π_3 hiperdüzlemi, η_1,ξ_3,ξ_4 ve P_3 düzlemi η_1,ξ_3 bazları tarafından gerilsin. P_3 düzlemini invaryant bırakan dönme matrisi

$$A_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2}v \\ 0 & \sqrt{2}v & 1 & v^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır.

$u\in I\subset\mathbb{R}$ ve $w(u)>0$ olacak şekilde Π_3 hiperdüzleminde bir $\beta_3(u)=(x(u)\eta_1+z(u)\xi_3+w(u)\xi_4)$ profil eğrisi alalım. O halde $\mathbb{E}_1^4$ uzayında oluşan dönel yüzeye parabolik tip dönel yüzey denir ve R_3 parabolik tip dönel yüzeyin parametrik denklemi

$$X_3(u,v)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{2}v \\ 0 & \sqrt{2}v & 1 & v^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \\ w(u) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x(u) \\ \sqrt{2}vw(u) \\ z(u)+v^2w(u) \\ w(u) \end{bmatrix}$$

veya

$$X_3(u,v)=x(u)\eta_1+\sqrt{2}vw(u)\eta_2+\ z(u)+v^2w(u)\ \xi_3+w(u)\xi_4\ \ u\in I,\ v\in\mathbb{R} \tag{7}$$

şeklindedir (Dursun ve Bektaş, 2014).

Tanım 2.11. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında bir yüzey S ve S deki lokal koordinat sistemi (u,v) olmak üzere

$$E=\langle X_u,X_u\rangle,\ F=\langle X_u,X_v\rangle \text{ ve } G=\langle X_v,X_v\rangle \tag{8}$$

eşitliklerine S nin birinci temel form katsayıları denir. Böylece birinci temel form

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{9}$$

eşitliği ile verilir (O'Neill, 1983).

Ayrıca $EG\text{-}F^2 > 0$ ise yüzey space-like, $EG\text{-}F^2 < 0$ ise yüzey time-like dır (Lopez, 2014).

Tanım 2.12. $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki bir non-dejenere S yüzeyi üzerindeki light-like olmayan bir eğrinin u_1 ile u_2 noktaları arasındaki yay-uzunluğu

$$s = \left| \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left| E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \right|} du \right| \tag{10}$$

dir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.13. R, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında space-like bir dönel yüzey olmak üzere R üzerindeki bütün space-like meridyenleri aynı Lorentzian space-like açı ile kesen eğriye space-like loksodrom denir.

3. SPACE-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR

Bu bölümde space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların denklemleri elde edilecektir.

3.1. Eliptik Tip Space-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-Like Loksodromlar

$$X_1(u,v) = (x(u)cosv, x(u)sinv, z(u), w(u)) \tag{11}$$

ile parametrelendirilmiş R_1 eliptik tip dönel yüzeyi ele alalım.

$u \in J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere β_1 profil eğrisini birim hızlı alalım. Yani $(x'(u))^2 + (z'(u))^2 - (w'(u))^2 = 1$ olsun.

R_1 dönel yüzeyinin kısmi türevleri;

$$X_{1u}(u) = (x'(u)cosv, x'(u)sinv, z'(u), w'(u)) \tag{12}$$

ve

$$X_{1v}(v) = (-x(u)sin\, v, x(u)cos\, v, 0, 0) \tag{13}$$

şeklinde bulunur.

R_1 dönel yüzeyinin birinci temel form katsayıları;

$$\begin{aligned} E &= < X_{1u}, X_{1u} > = 1, \\ F &= < X_{1u}, X_{1v} > = 0, \\ G &= < X_{1v}, X_{1v} > = x^2(u). \end{aligned} \tag{14}$$

şeklindedir.

$EG\text{-}F^2 = x^2(u) > 0$ olur ki buradan R_1 yüzeyinin space-like bir dönel yüzey olduğu anlaşılır.

Birinci temel form katsayılarından yararlanılarak R_1 yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = du^2 + x^2(u)dv^2 \tag{15}$$

eşitliğiyle ifade edilebilir.

R_1 yüzeyi üzerindeki space-like loksodrom $\alpha_1(t) = X_1(u(t),v(t))$ eşitliğiyle verilsin. $\alpha_1(t)$ eğrisinin R_1 yüzeyi üzerindeki bir space-like meridyenle kesiştiği $p = X_1\ u,v$ noktasındaki Lorentzian space-like açı θ olmak üzere bu noktada;

$$cos\theta = \frac{du}{\sqrt{du^2 + x^2(u)dv^2}} \tag{16}$$

eşitliği elde edilir.

Bu denklemi kullanarak eliptik tip space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemi

$$x^2(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = tan^2\theta \tag{17}$$

şeklinde bulunur. Bu denklemin genel çözümü $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$v = v(u) = \varepsilon\, tan\theta \int_{u_0}^{u} \frac{1}{x(u)} du \tag{18}$$

dır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında eliptik tip space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromlar

$$\alpha_1(u) = (x(u)cosv(u), x(u)sinv(u), z(u), w(u)) \tag{19}$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $v = v(u) = \varepsilon\, tan\theta \int_{u_0}^{u} \frac{1}{x(u)} du$ dir.

3.2. Hiperbolik Tip Space-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-Like Loksodromlar

$$X_2(u,v) = (x(u), y(u), w(u)sinh\, v, w(u)cosh\, v) \tag{20}$$

parametrizasyonu ile verilen R_2 hiperbolik tip space-like dönel yüzeyi göz önüne alalım.

$u \in J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere β_2 profil eğrisi birim hızlı olsun, yani $(x'(u))^2 + (y'(u))^2 - (w'(u))^2 = 1$ olarak alalım.

$X_2(u,v)$ nin kısmi türevleri sırasıyla

$$X_{2u}(u) = (x'(u), y'(u), w'(u)\sinh v, w'(u)\cosh v) \tag{21}$$

ve

$$X_{2v}(v) = (0,0, w(u)\cosh v, w(u)\sinh v) \tag{22}$$

şeklinde elde edilir.

Bu eşitliklerden faydalanılarak R_2 yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= < X_{2u}, X_{2u} > = 1, \\ F &= < X_{2u}, X_{2v} > = 0, \\ G &= < X_{2v}, X_{2v} > = w^2(u). \end{aligned} \tag{23}$$

şeklindedir.

$EG\text{-}F^2 = w^2(u) > 0$ olduğundan R_2 yüzeyi space-like bir dönel yüzeydir. Yukarıdaki katsayılardan ve (9) eşitliğinden yararlanarak R_2 yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = du^2 + w^2(u)dv^2 \tag{24}$$

şeklinde elde edilir.

$\alpha_2(t) = X_2(u(t), v(t))$ eğrisinin R_2 yüzeyi üzerindeki bir space-like meridyenle kesiştiği $p = X_2(u,v)$ noktasındaki Lorentzian space-like açı θ olmak üzere bu noktada

$$\cos\theta = \frac{du}{\sqrt{du^2 + w^2(u)dv^2}} \tag{25}$$

dir.

(25) eşitliğinden faydalanarak hiperbolik tip space-like dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların diferansiyel denklemi;

$$w^2(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = tan^2\theta \tag{26}$$

olarak hesaplanır. (26) eşitliğinin genel çözümü $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$v = v(u) = \varepsilon \tan\theta \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)} du \tag{27}$$

şeklindedir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında hiperbolik tip space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromlar

$$\alpha_2(u) = (x(u), y(u), w(u)\sinh v(u), w(u)\cosh v(u)) \tag{28}$$

burada $v = v(u) = \varepsilon \tan\theta \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)} du$ dir.

3.3. Parabolik Tip Space-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-Like Loksodromlar

$$X_3(u,v) = x(u)\eta_1 + \sqrt{2}vw(u)\eta_2 + (v(u) + v^2 w(u))\xi_3 + v(u)\xi_4 \tag{29}$$

eşitliğiyle verilen R_3 parabolik tip space-like dönel yüzeyi göz önüne alalım.

$u \in J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere β_3 profil eğrisinin yay uzunluğu parametresini $(x'(u))^2 - 2z'(u)w'(u) = 1$ olacak şekilde alalım.

$X_3(u,v)$ in kısmi türevleri

$$X_{3u}(u) = x'(u)\eta_1 + \sqrt{2}vw'(u)\eta_2 + (v'(u) + v^2 w'(u))\xi_3 + v(u)\xi_4 \tag{30}$$

ve

$$X_{3v}(v) = \sqrt{2}w(u)\eta_2 + 2vw(u)\xi_3 \tag{31}$$

şeklindedir.

Buradan R_3 dönel yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$E = < X_{3u}, X_{3u} > = 1,$$

$$F = < X_{3u}, X_{3v} > = 0, \tag{32}$$

$$G = < X_{3v}, X_{3v} > = 2w^2(u)$$

elde edilir.

$EG\text{-}F^2 = 2w^2(u) > 0$ olduğundan R_3 yüzeyinin space-like bir dönel yüzey olduğu anlaşılır.

R_3 yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = du^2 + 2w^2(u)dv^2 \tag{33}$$

şeklindedir.

R_3 yüzeyi üzerindeki space-like loksodromun $\alpha_3(t) = X_3(u(t), v(t))$ eşitliğiyle verildiğini varsayarsak, $\alpha_3(t)$ eğrisinin R_3 yüzeyi üzerindeki space-like meridyenlerle kesiştiği $p = X_3\ u,v$ noktasındaki Lorentzian space-like açı θ ise bu noktada

$$\cos\theta = \frac{du}{\sqrt{du^2 + 2w^2(u)dv^2}}. \tag{34}$$

eşitliği vardır. (34) eşitliğinden space-like loksodromların diferansiyel denklemi

$$2w^2(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \tan^2\theta \tag{35}$$

şeklindedir.

(35) eşitliğinin genel çözümü $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere;

$$v = v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon \tan\theta \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)}du \tag{36}$$

şeklinde bulunur.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında parabolik tip space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromlar

$$\alpha_3(u) = x(u)\eta_1 + \sqrt{2}vw(u)\eta_2 + (v(u) + v^2 w(u))\xi_3 + v(u)\xi_4 \tag{37}$$

şeklindedir, burada $v = v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon \tan\theta \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)} du$ *dir.*

Ayrıca aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 3.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların u_1 ve u_2 noktaları arasındaki yay uzunlukları

$$s = \left| \frac{u_2 - u_1}{\cos\theta} \right| \tag{38}$$

dir.

İspat. (14) eşitliklerinden eliptik tip dönel yüzeyin birinci temel form katsayıları E, F, G ler sırası ile 1, 0, $x^2(u)$ olarak bulunmuştu. (17) eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \tan^2\theta \frac{1}{x^2(u)} \tag{39}$$

eşitliği elde edilir.

$$s = \left| \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left| E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \right|} du \right|$$

eşitliğinde E, F, G katsayıları yerine yazılarak;

$$s = \left| \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left| 1 + 2.0\frac{dv}{du} + x^2(u)\left(\frac{\tan^2\theta}{x^2(u)}\right) \right|} du \right|$$

$$= \left| \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left| 1 + \tan^2 \theta \right|} du \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\cos \theta} \int_{u_1}^{u_2} du \right|$$

$$= \left| \frac{u_2 - u_1}{\cos \theta} \right|$$

eşitliği elde edilir. Benzer hesaplamalar yapılarak hiperbolik ve parabolik tip space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların yay uzunlukları da elde edilebilir.

4. ÖRNEKLER

Örnek 4.1. $\mathbb{E}_1^4$ de, β_1 space-like profil eğrisini, $\beta_1(u) = (\sqrt{2}cosu, 0, \sqrt{2}sinu, u)$ alalım.

Buradan R_1 eliptik tip space-like dönel yüzeyi

$$X_1(u,v) = (\sqrt{2}cosucosv, \sqrt{2}cosusinv, \sqrt{2}sinu, u) \tag{40}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1 de, $\varepsilon = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$ alalım. Ayrıca $u_0 = 0$ ise $v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} log(\frac{cos\frac{u}{2} + sin\frac{u}{2}}{cos\frac{u}{2} - sin\frac{u}{2}})$ dır.

Böylece $u \in (-1,1)$ için $v \in (-0.867048, 0.867048)$ bulunur.

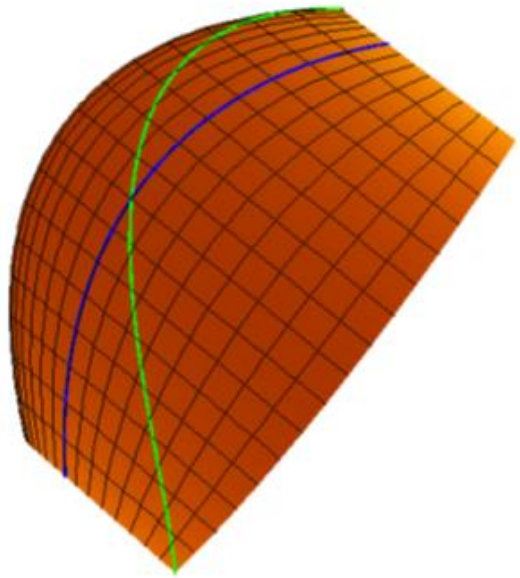
O halde space-like loksodromun parametrik denklemi

$$\alpha_1(u) = (\sqrt{2}cosucosv(u), \sqrt{2}cosusinv(u), \sqrt{2}sinu, u) \tag{41}$$

şeklindedir. Burada $v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} log(\frac{cos\frac{u}{2} + sin\frac{u}{2}}{cos\frac{u}{2} - sin\frac{u}{2}})$ dir.

Önerme 3.1. den, space-like loksodromun $u \in (-1,1)$ aralığındaki yay uzunluğu 2.82843 olarak elde edilir.

$\mathbb{E}_1^4$ de ki space-like dönel yüzeyin, space-like meridyenin $(v = 0)$ ve space-like loksodromun $\mathbb{E}_1^3$ uzayına izdüşümleri; $ParametricPlot3D\left[\{x(u,v)+y(u,v), z(u,v), w(u,v)\}, \{u,a,b\}, \{v,c,d\}\right]$ Mathematica komutu yardımıyla aşağıdaki gibi verilir.



Şekil 4.1. Eliptik tip space-like dönel yüzey, Space-like loksodrom (yeşil), Space-like meridyen (mavi)

Örnek 4.2. β_2 space-like profil eğrisini, $\beta_2(u)=(\frac{\sqrt{2}}{2}sinh(u),\frac{\sqrt{2}}{2}u,0,\frac{\sqrt{2}}{2}cosh(u))$ şeklinde alalım. Buradan R_2 hiperbolik tip space-like dönel yüzeyi

$$X_2(u,v)=(\frac{\sqrt{2}}{2}sinh(u),\frac{\sqrt{2}}{2}u,\frac{\sqrt{2}}{2}cosh(u)sinh(v),\frac{\sqrt{2}}{2}cosh(u)cosh\,v) \tag{42}$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.2. ifadesinde, $\varepsilon=1$ ve $\theta=\frac{\pi}{4}$ alalım. Ayrıca $u_0=0$ ise $v(u)=2\sqrt{2}\left[arc\tan(tanh(\frac{u}{2}))\right]$ ve $u\in(-1,1)$ aralığı için $v\in(-1.2243,1.2243)$ şeklinde bulunur.

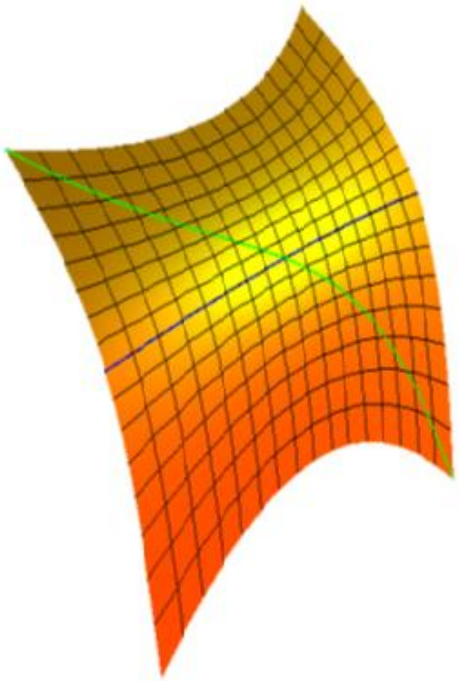
O halde space-like loksodromun denklemi

$$\alpha_2(u)=(x(u),y(u),w(u)sinh\,v(u),w(u)cosh\,v(u)) \tag{43}$$

olarak bulunur. Burada $v(u)=2\sqrt{2}\left[arc\tan(tanh(\frac{u}{2}))\right]$ dir.

Space-like loksodromun $u\in(-1,1)$ aralığındaki yay uzunluğu 2.82843 dir.

$\mathbb{E}_1^4$ deki hiperbolik tip space-like dönel yüzeyin, space-like meridyenin $(v=0)$ ve space-like loksodromun $\mathbb{E}_1^3$ uzayına izdüşümleri alınarak, Mathematica programında; $ParametricPlot3D\left[\{x(u,v)+y(u,v),z(u,v),w(u,v)\},\{u,a,b\},\{v,c,d\}\right]$ komutu yardımıyla çizimi yapılırsa aşağıdaki grafik elde edilir.



Şekil 4.2. Hiperbolik tip space-like dönel yüzey, Space-like loksodrom (yeşil), Space-like meridyen (mavi)

Örnek 4.3. β_3 space-like profil eğrisini, $\beta_3(u)=\frac{\sqrt{2}}{2}u^2\eta_1+(\frac{u^2}{2}-\frac{u}{\sqrt{2}})\xi_3+(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\sqrt{2}})\xi_4$ şeklinde alalım. Buradan R_3 parabolik tip space-like dönel yüzeyi

$$X_3(u,v)=\frac{\sqrt{2}}{2}u^2\eta_1+(\sqrt{2}v(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\sqrt{2}})\eta_2+(\frac{u^2}{2}-\frac{u}{\sqrt{2}}+v^2(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\sqrt{2}}))\xi_3+(\frac{u^2}{2}+\frac{u}{\sqrt{2}})\xi_4 \quad (44)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 3.3. ifadesinde, $\varepsilon = 1$ ve $\theta = \frac{\pi}{4}$ alalım. Ayrıca, $u_0 = \frac{1}{4}$ ise $v(u) = log(\frac{u}{u+\sqrt{2}}) + 1.89564$ ve $u \in (\frac{1}{8}, 2)$ aralığı için $v \in (-2.51071, 1.36084)$ şeklinde bulunur.

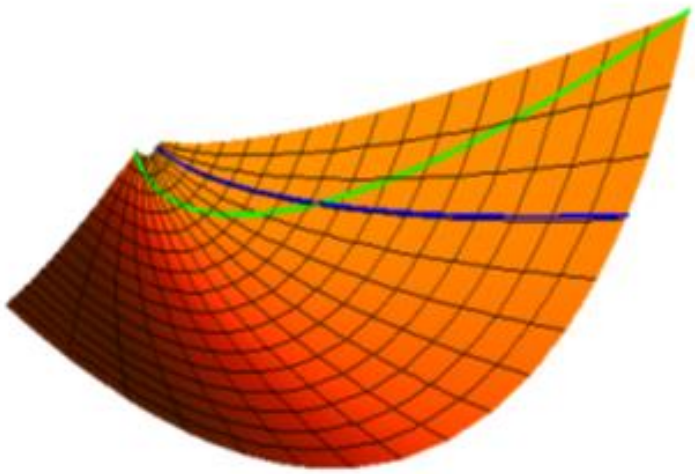
O halde space-like loksodromun denklemi

$$\alpha_3(u) = (x(u)\eta_1 + \sqrt{2}vw(u)\eta_2 + (v(u) + v^2 w(u))\xi_3 + v(u)\xi_4) \tag{45}$$

olarak bulunur. Burada $v(u) = log(\frac{u}{u+\sqrt{2}}) + 1.89564$ şeklindedir.

Space-like loksodromun $u \in (\frac{1}{8}, 2)$ aralığındaki yay uzunluğu 2.474876 olarak elde edilir.

$\mathbb{E}_1^4$ de parabolik tip space-like dönel yüzeyin, space-like meridyenin $(v = 1)$ ve space-like loksodromun $\mathbb{E}_1^3$ uzayına izdüşümleri alınarak Mathematica programında; $ParametricPlot3D\left[\{x(u,v)+y(u,v), z(u,v), w(u,v)\}, \{u,a,b\}, \{v,c,d\}\right]$ komutu yardımıyla çizimi yapılırsa aşağıdaki grafik elde edilir.



Şekil 4.3. Parabolik tip space-like dönel yüzey, Space-like loksodrom (yeşil), Space-like meridyen (mavi)

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Minkowski 4-uzayındaki eliptik, hiperbolik ve parabolik tip space-like dönel yüzeylerin geometrik özellikleri Dursun ve Bektaş tarafından incelenmiştir (Dursun ve Bektaş, 2014). Öklid 4-uzayındaki dönel yüzeyler üzerindeki loksodromlar, Babaarslan tarafından çalışılmıştır (Babaarslan, 2019). Bu tez çalışmasında sırasıyla; Minkowski 4-uzayında (Minkowski uzay-zaman) space-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen loksodromlara örnekler verilmiş, loksodromların yay uzunlukları hesaplanmış ve loksodromların grafikleri Mathematica programı yardımıyla çizilmiştir. Şimdiye kadar Minkowski 4-uzayında space-like dönel yüzeyler üzerindeki loksodromlarla ilgili çalışma yapılmamıştır. Bu çalışma sonuçlarının navigasyon çalışmalarına katkı sağlaması beklenmektedir.

KAYNAKLAR

Alexander, J. Loxodromes: A Rhumb Way to Go, Math. Mag., 77 (2004), 349-356.

Babaarslan M., and Munteanu M. I., Time-like loxodromes on rotational surfaces in Minkowski 3-space, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi, Ser. Nouă, Mat. 61 (2015) 471-484.

Babaarslan M., and Yayli Y., Space-like loxodromes on rotational surfaces in Minkowski 3-space, J. Math. Anal. Appl., 409 (2014) 1, 288-298.

Bilgin, M. (2015). *Minkowski Uzayının Genelleştirilmiş Topolojileri*, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Dağlı, S. (2012) *Minkowski 4-Uzayında Jet Yapılar ve Mekanik Sistemler*, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Darkot B., Kartografya Dersleri, İstanbul: Yenilik Basımevi, 1957, s. 45-46.

Dursun U., and Bektaş B., Spacelike Rotational Surfaces of Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types in Minkowski Space with Pointwise 1-Type Gauss Map, Math. Phys. Anal. Geom., 17 (2014), 247-263.

Ferrandez A., Gimenez A., and Lucas P., 2001a. Null helices in Lorentzian space Forms, International Journal of Modern Physics A, 16,4845-4863.

Fronteri P. A., The Geometry behind the Special Relativity Theory, Universitas Bergensis Bachelor Project in Mathematics, 4(2012), 4, 6

Lopez R., Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, Int. Electron. J. Geom.,**7** (2014), 44-107.

Noble C. A., Note on loxodromes, Bull. Amer. Math. Soc., 12 (1905) 3, 116-119.

O'Neill B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Pure and Applied Mathematics, 103, Academic Press, Inc., 468 p. New York, 1983.

Ratcliffe J. G., Foundations of Hyperbolic Manifolds, Springer, Graduate Texts in Mathematics, 149, Second Edition, 2006.