T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI UZAY-ZAMANDA BOUR TEOREMİ VE GAUSS TASVİRİ

YASİN KÜÇÜKARIKAN

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Murat BABAARSLAN

İkinci Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ

YOZGAT - 2023

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI UZAY-ZAMANDA BOUR TEOREMİ VE GAUSS TASVİRİ

YASİN KÜÇÜKARIKAN

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Murat BABAARSLAN

İkinci Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 121F211 kodu ile desteklenmiştir.

YOZGAT - 2023

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığına, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığına, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

YASİN KÜÇÜKARIKAN

25/01/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI UZAY-ZAMANDA BOUR TEOREMİ VE GAUSS TASVİRİ

YASİN KÜÇÜKARIKAN

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. MURAT BABAARSLAN
İKİNCİ DANIŞMAN: DR. ÖĞR. ÜYESİ BURCU BEKTAŞ DEMİRCİ

Bu tez çalışmasında, Minkowski uzay-zamanda uzaysal ve zamanasal helikoidal yüzeyler için Bour teoremi çalışılmıştır ve Bour teoremine göre izometrik olan yüzey çiftlerinin Gauss tasvirleri incelenmiştir. Bu tez çalışması, dört ana bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, dönel yüzeyler ve onların bir genellemesi olan helikoidal yüzeylerin önemi açıklanmıştır. Ayrıca Bour teoremi ile ilgili literatürde yer alan sonuçlardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullanılan Minkowski uzay-zamanda eğriler ve yüzeyler ile ilgili bazı temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Minkowski uzay-zamandaki üç tip uzaysal helikoidal yüzeyler için Bour teoremine göre izometrik olan dönel yüzeyler elde edilmiştir. Bu izometrik yüzey çiftlerinden Gauss tasvirleri aynı olanların karakterizasyonu yapılmıştır ve parametrizasyonları verilmiştir. Özel olarak, dik helikodal yüzeyler üzerine de çalışılmıştır. Ayrıca, Bour teoremine göre izometrik olan yüzeylerin Gauss eğriliklerinin aynı olduğu gösterilmiştir. Son olarak, aynı Gauss tasvirine sahip olan izometrik yüzey çiftleri için örnekler oluşturulmuştur ve Wolfram Mathematica 10.4 programı ile yüzeylerin grafikleri çizilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölüme benzer şekilde Minkowski uzay-zamanda dört tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerine çalışılmıştır. Ancak, Minkowski uzay-zamanda zamansal helikoidal yüzeyler uzaysal veya zamansal profil eğrisine sahip olabileceğinden bu bölümde üçüncü bölümden farklı sonuçlar elde edilmiştir.

2022, ix+84 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Minkowski Uzay-Zaman, Bour Teoremi, İzometri, Helikoidal Yüzey, Dönel Yüzey, Gauss Tasviri, Minimal Yüzeyler, Gauss-Egregium Teoremi

ABSTRACT

MASTER THESIS

BOUR THEOREM AND GAUSS MAP IN MINKOWSKI SPACE-TIME

YASİN KÜÇÜKARIKAN

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: PROF. DR. MURAT BABAARSLAN
CO-SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. BURCU BEKTAŞ DEMİRCİ

In this study; Bour's theorem for helicoidal surfaces in Minkowski space-time is studied and Gauss maps of isometric surface pairs are examined. This thesis consists of four main parts.

In the first chapter, the importance of rotational surfaces and the importance of rotational surfaces and helicoidal surfaces which are the generalization of them are explained. In addition, the results in the literature related to Bour's theorem are mentioned.

In the second chapter, some basic concepts about curves and surfaces in Minkowski space-time used in this thesis are given.

In the third chapter, isometric rotational surfaces according to Bour's theorem are obtained for three types of spacelike helicoidal surfaces in Minkowski space-time. Under the condition that the isometric surfaces have same Gauss map, the explicit parametrizations are obtained. In addition, the reasons for the different Gauss maps of some isometric surfaces are given. Specifically, it is studied on right helicodal surfaces. In addition, it is shown that the Gauss curvature of the isometric surfaces according to Bour's theorem is the same. Finally, concrete examples of isometric surfaces with same Gauss map are given and the graphs of the surfaces were drawn with the Wolfram Mathematica 10.4 program.

In the fourth chapter, similar to the third chapter, four types of timelike helicoidal surfaces in Minkowski space-time are studied. However, in Minkowski space-time, because timelike helicoidal surfaces can have a spacelike or timelike profile curve, different results are obtained in this section than in the third section.

In the fourth chapter, similar to the third chapter, four types of timelike helicoidal surfaces in Minkowski space-time are examined. In Minkowski space-time, however, different results are obtained in this chapter than in chapter three, as timelike helicoidal surfaces can have a spacelike or timelike profile curve.

2022, ix+84 PAGE

KEYWORDS: Minkowski Space-Time, Bour Theorem, Isometry, Helicoidal Surface, Rotational Surface, Gauss Map, Minimal Surfaces, Gauss-Egregium Theorem

ÖNSÖZ

Yüksek lisans ve tez çalışmam sürecinde ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım ve yapıcı eleştirileriyle emeğini hiç esirgemeden her koşulda bana destek olan çok kıymetli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Murat BABAARSLAN (Yozgat Bozok Üniversitesi)'a ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Burcu BEKTAŞ DEMİRCİ (Fatih Sultan Mehmet Vakıf Üniversitesi)'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Eğitim süresince yüksek lisans yapmamı tavsiye eden ve desteklerini sunan Sayın Doç. Dr. Murat BEKAR (Gazi Üniversitesi)'a ve ders aldığım bütün hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans eğitimim boyunca beni destekleyen bütün hocalarıma minnettarım. Sevgi ve destekleriyle beni bugünlere getiren çok kıymetli anne ve babam Türkan ve Ramazan KÜÇÜKARIKAN'a ve her zaman destek olan ablalarım Saniye KOÇAK ve Nilüfer KÜÇÜKARIKAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması;

Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK) tarafından 121F211 nolu proje ile desteklenmiştir.

YASİN KÜÇÜKARIKAN

25/01/2023

İÇİNDEKİLER

Tez Onay Sayfası……. ii

Tez Beyanı……... iii

Özet…….. iv

Abstract…… v

Önsöz…… vi

İçindekiler……. vii

Şekiller Listesi…….. viii

Simgeler ve Kısaltmalar Listesi ……. ix

1. GİRİŞ……... 1

2. TEMEL KAVRAMLAR……..... 3

3. MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA UZAYSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER……. 9

3.1. Minkowski Uzay-Zamanda I. Tip Uzaysal Helikoidal Yüzeyler …… 9

3.2. Minkowski Uzay-Zamanda IIa. Tip Uzaysal Helikoidal Yüzeyler ……. 22

3.3. Minkowski Uzay-Zamanda III. Tip Uzaysal Helikoidal Yüzeyler ……. 33

4. MİNKOWSKİ UZAY-ZAMANDA ZAMANSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER……. 39

4.1. Minkowski Uzay-Zamanda I. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler …… 39

4.2. Minkowski Uzay-Zamanda IIa. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler…… 51

4.3. Minkowski Uzay-Zamanda IIb. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler ..…. 62

4.4. Minkowski Uzay-Zamanda III. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler ..…. 77

5. KAYNAKLAR……. 83

ÖZGEÇMİŞ

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil		Sayfa
Şekil 3.1.1.	(a) I. tip uzaysal helikoidal yüzey; helis (b) uzaysal dönel yüzey; çember	21
Şekil 3.2.1.	(a) IIa. tip uzaysal helikoidal yüzey; helis (b) uzaysal dönel yüzey; hiperbol	32
Şekil 3.3.1.	(a) III. tip uzaysal helikoidal yüzey; helis (b) uzaysal dönel yüzey; parabol	38
Şekil 4.1.1.	(a) I. tip zamansal helikoidal yüzey; uzaysal helis (b) zamansal dönel yüzey; uzaysal çember	50
Şekil 4.2.1.	(a) IIa. tip zamansal helikoidal yüzey; uzaysal helis (b) zamansal dönel yüzey; uzaysal hiperbol	61
Şekil 4.3.1.	(a) IIb. tip zamansal helikoidal yüzey; zamansal helis (b) zamansal dönel yüzey; zamansal hiperbol	76
Şekil 4.4.1.	(a) III. tip zamansal helikoidal yüzey; uzaysal helis (b) zamansal dönel yüzey; uzaysal parabol	82

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{E}^3$	**:** Euclid 3-uzayı
$\mathbb{E}_1^3$	**:** Minkowski 3-uzayı
$\mathbb{E}^4$	**:** Euclid 4-uzayı
$\mathbb{E}_1^4$	**:** Minkowski uzay-zaman
$\mathbb{R}$	**:** Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	**:** Pozitif reel sayılar kümesi
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	**:** Skalar çarpım
$\|\|.\|\|$	**:** Norm
$\boldsymbol{\beta_i}$	**:** Profil eğrisi
$\boldsymbol{P_i}$	**:** Düzlem
$\boldsymbol{\Pi_i}$	**:** Hiperdüzlem
$\boldsymbol{X_i}$	**:** Helikoidal yüzey
$\boldsymbol{R_i}$	**:** Dönel yüzey
$\boldsymbol{l_i}$	**:** Öteleme ekseni
$\boldsymbol{g}$	**:** İndirgenmiş metrik
$\boldsymbol{g_{ij}}$	**:** Birinci temel form katsayıları
$\boldsymbol{b_{ij}}$	**:** İkinci temel form katsayıları
$\boldsymbol{H}$	**:** Ortalama eğrilik vektörü
$\boldsymbol{H_i}$	**:** Ortalama eğrilik vektörünün bileşeni
$\boldsymbol{K}$	**:** Gauss eğrilik
$\boldsymbol{N_i}$	**:** Yüzeyin normali
$\wedge$	**:** Wedge çarpımı
$\boldsymbol{v}$	**:** Gauss tasvi
$\boldsymbol{G(n,m)}$	**:** Grasmaniyen manifoldu

1. GİRİŞ

Günlük hayatta, yüzey örnekleri ile sıkça karşılaşılmaktadır. Bu örneklerden bazıları, balonlar, iç lastikler, teneke kutuları ve sabun filmleridir (Oprea, 1997). Bu yüzeylerden en bilinen bir taneside dönel yüzeylerdir. Dönel yüzeyler, fizik ve mühendislikte ve geometrik modellemede kullanılırlar. Teneke kutuları, dönme dolaplar, bardaklar, mobilya ayakları birer dönel yüzey örneğidir. Helikoidal yüzeyler, dönel yüzeylerin doğal bir genellemesidir. Bu nedenle, doğada, bilimde ve mühendislikte sık sık helikoidal yüzeylerle karşılaşılmaktadır. Sarmaşık bitkileri, helikoidal yollar ve merdivenler, helikoidal konveyörler, otopark rampaları, helikoidal demiryolları, yürüyüş yolları ve yaya köprüleri, helikoidal kuleler, gökdelenler ve kanallar birer helikoidal yüzey örneğidir (Babaarslan ve Yaylı, 2015).

Literatürde 3-boyutlu farklı çevreleyen uzaylardaki, helikoidal yüzeyler ile ilgili önemli sonuçlar içeren birçok çalışma yer almaktadır. Bu çalışmaların bazıları Do Carmo ve Dajczer, 1982; Baikoussis ve Koufogiorgos, 1998; Beneki, Kaimakamis ve Papantoniou, 2002; Ji ve Hou, 2005; Choi, Kim ve Park, 2009; Choi, Kim, Liu ve Yoon, 2010; Kim ve Turgay, 2013; López ve Demir, 2014; Babaarslan ve Yaylı, 2015; Babaarslan ve Kayacık, 2017, 2020 şeklindedir. Bu sonuçlardan en bilinenlerden bir tanesi, tek parametreli izometrik ve minimal yüzeyler ailesinden olan dik helikoid ve katenoid arasındaki ilişkinin genellemesi olan Bour teoremidir. Bour teoreminin ifadesi aşağıdaki şekilde verilir:

Bour Teoremi: Genelleştirilmiş helikoid üzerindeki helisler, dönel yüzey üzerindeki paralel çemberlere karşılık gelecek şekilde bir genelleştirilmiş helikoid bir dönel yüzeye izometriktir (Bour, 1862).

$\mathbb{E}^3$ uzayında Bour teoremine göre izometrik olan helikoidal ve dönel yüzeylerden aynı Gauss tasvirine sahip olanların parametrizasyonlarını elde edilmiştir (Ikawa, 2000). $\mathbb{E}^3$ uzayında helikoid yüzeylerin Gauss tasvirleri ve Bour teoremi üzerine çalışılmıştır (Güler, Yaylı ve Hacısalihoğlu, 2010). Ayrıca, $\mathbb{E}^3$ uzayında helikoidal yüzeyler üzerinde Bour teoremi incelenmiştir (Güler ve Yaylı, 2015). Bour teoreminden yararlanarak verilen helikoidal yüzeye izometrik iki parametreli helikoidal yüzey ailesinin var olduğunu göstermişlerdir ve böylece sabit ortalama eğrilikli helikoidal yüzeylerden elde edilen Delaunay yüzeyleri üzerine çalışılmıştır (Do Carmo ve Dajczer, 1982).

$\mathbb{E}^3$'e paralel olarak, $\mathbb{E}_1^3$'de dönme ekseni uzaysal, zamansal ve ışıksal olan yüzeylerin profil eğrilerini de uzaysal ve zamansal alarak helikoidal yüzeyler üzerinde Bour teoremi çalışılmış ve Bour teoremine göre izometrik olan helikoidal ve dönel yüzey çiftlerinden aynı Gauss tasvirine sahip olanların karakterizasyonunu verilmiştir (Ikawa, 2001). $\mathbb{E}_1^3$ uzayında dönme eksen ve profil eğrisi çiftinin sırasıyla (ışıksal, uzaysal) ve (ışıksal, zamansal) yüzey tipleri için Bour teoremini çalışılmıştır. Ayrıca, Bour teoremine göre izometrik ve aynı Gauss tasvirine sahip olan yüzey çiftleri bulunmuş ve örnekler verilmiştir (Güler ve Vanlı, 2006). $\mathbb{E}^4$'de helikoidal yüzeyler için Bour teoremini çalışmıştır ve izometrik yüzey çiftlerinin aynı Gauss tasvirine olması durumunda hiperdüzlemsel ve minimal olduklarını ispatlamışlardır (Hieu ve Thang, 2017).

1907 yılında Minkowski tarafından özel görelilik kuramında uzay-zaman için model olarak önerilen Minkowski 4-uzayı veya Minkowski uzay-zaman kavramı, Einstein'ın özel görelilik kuramıyla güçlü bir şekilde ilişkilidir (Ratcliffe, 2006). Metrik, açı ve parçacıkların hareketleri kavramlarının farklı olmasından dolayı Minkowski uzay-zaman, Euclid 4-uzayından daha karmaşık ve zengin geometrik yapıya sahiptir (Babaarslan ve Kayacık, 2020). Minkowski uzay-zamanda 3-tip helikoidal yüzeyin parametrizasyonu verilmiştir (Babaarslan ve Sönmez, 2021).

Bu tez çalışmasında, Minkowski uzay-zamandaki 3-tip uzaysal ve 4-tip zamansal helikoidal yüzeyler üzerinde Bour teoremi çalışılmıştır. Böylece, Bour teoreminin, 3-boyutlu Minkowski uzayından Minkowski uzay-zamana bir tür genellemesi elde edilmiştir. İzometrik yüzey çiftlerinin aynı Gauss tasvirine sahip olma durumunda hiperdüzlemsel ve minimal oldukları gösterilmiştir. Daha sonra aynı Gauss tasvirine sahip olan yüzeylerin parametrizasyonları verilmiştir. Özel olarak, Bour teoremi dik helikoidal yüzeyler için de çalışılmıştır. Elde edilen sonuçlar için, Wolfram Mathematica 10.4. programı kullanılarak örnekler oluşturulmuştur. Ayrıca, helikoidal yüzeylerin ve Bour teoremine göre izometrik olan dönel yüzeylerin ortalama ve Gauss eğrilikleri hesaplanmıştır ve bu yüzey çiftlerinin aynı Gauss eğriliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Böylece, Gauss Egregium teoreminin gerçeklendiği gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Minkowski uzay-zaman'da eğriler ve yüzeyler teorisi ile ilgili temel kavramlar ve helikoidal yüzeylerin parametrizasyonu verilecektir.

Tanım 2.1. V bir reel vektör uzayı olmak üzere $\langle\cdot,\cdot\rangle: VxV \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan simetrik, bilineer ve dejenere olmayan dönüşüme V üzerinde skalar çarpım denir. V uzayındaki v vektörüne $\langle v, v\rangle > 0$ ya da $v = 0$ ise uzaysal, $\langle v, v\rangle < 0$ ise zamansal, $\langle v, v\rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise ışıksaldır denir (O'Neill, 1983).

$\mathbb{E}^4$ üzerindeki 1 indeksli kanonik $\langle , \rangle$ skaler çarpımı $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ vektörleri için

$$\langle u , v \rangle = u_1 v_1 + u_2 y v_2 + u_3 v_3 - u_4 v_4 \tag{2.1}$$

olarak tanımlanmak üzere, $(\mathbb{E}^4, \langle , \rangle)$ uzayına 4-boyutlu Minkowski uzay-zaman denir ve $\mathbb{E}_1^4$ ile gösterilir.

Tanım 2.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında v vektörünün normu $\|v\| = \sqrt{|\langle \mathrm{v}, \mathrm{v}\rangle|}$ şeklindedir.

Tanım 2.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki x ve y vektörleri arasındaki açı sırasıyla:

i. x ve y uzaysal vektörleri arasındaki açı $\theta \in [0, \pi]$ olmak üzere, Minkowski uzaysal açısı:

$$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = \|x\|\|y\| \cos\theta \tag{2.2}$$

eşitliğiyle verilir.

ii. x ve y uzaysal vektörleri arasındaki açı $\theta \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, Minkowski zamansal açısı

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle| = \|x\|\|y\| \cosh\theta \tag{2.3}$$

eşitliğiyle verilir.

iii. x zamansal ve y uzaysal vektörleri arasındaki açı $\theta \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere, Minkowski zamansal açısı

$$|\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle| = \|x\|\|y\| \sinh\theta \tag{2.4}$$

eşitliğiyle verilir.

iv. x ve y zamansal vektörleri arasındaki açı $\theta \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, Minkowski zamansal açısı

$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = \|x\|\|y\| \cosh\theta$ (2.5)

eşitliğiyle verilir (Ratcliffe, 2006).

Tanım 2.4. I, $\mathbb{R}$'nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha: I \to \mathbb{E}_1^4$ biçiminde α'nın her mertebeden türevi var ve sürekli ise α'ya $\mathbb{E}_1^4$'te bir eğri denir.

Tanım 2.5. $\alpha: I \to \mathbb{E}_1^4$ olmak üzere $\alpha'(t)$'ye α'nın teğet vektörü denir. Ayrıca $\alpha(t)$'nin her noktasında $\alpha'(t) \neq 0$ ise $\alpha(t)$'ye düzgün eğri denir. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ uzaysal ise α uzaysaldır, $\alpha'(t)$ zamansal ise α zamansaldır ve $\alpha'(t)$ ışıksal ise α ışıksaldır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.6. $C \subset \mathbb{E}_1^3$'te dejenere olmayan ve sıfırdan farklı sabit eğrilikli bir çember ve P, içerisinde çemberler içeren bir düzlem olsun. α çemberleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

- $\mathrm{P} \equiv \{\mathrm{x}_3 = 0\}$ ise P düzlemi uzaysaldır. P uzaysal düzleminde $\alpha(s) = p + r(\cos s, \sin s, 0)$ ile verilen C eğrisi $\mathbb{E}_1^3$'te merkezi p olan ve r yarıçaplı bir Euclidyen çemberdir.
- $\mathrm{P} \equiv \{\mathrm{x}_1 = 0\}$ ise P düzlemi zamansaldır. P zamansal düzleminde $\alpha(s) = p + r(0, \sinh s, \cosh s)$ ile verilen C eğrisi $\mathbb{E}_1^3$'te merkezi p olan ve r yarıçaplı bir uzaysal hiperboldür veya $\alpha(s) = p + r(0, \cosh s, \sinh s)$ ile verilen C eğrisi $\mathbb{E}_1^3$'te merkezi p olan ve r yarıçaplı zamansal hiperboldür.
- $\mathrm{P} \equiv \{\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_3 = 0\}$ ise P düzlemi ışıksaldır. P ışıksal düzleminde $\alpha(s) = p + (s, \mathrm{r}\, s^2, \mathrm{r}\, s^2)$ ile verilen C eğrisi $\mathbb{E}_1^3$'te merkezi p olan ve r yarıçaplı bir uzaysal paraboldür (Kaya ve Lopez, 2022).

Tanım 2.7. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\{u, v\}$ koordinat sistemi ile $X: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{E}_1^4$ düzgün parametrik yüzeyi verilsin. Burada, D, $\mathbb{R}^2$'nin açık bir alt kümesidir. Bu durumda, X yüzeyinin $p = X(u, v)$ noktasındaki teğet düzlemi X_u ve X_v vektörleri tarafından oluşturulur. X yüzeyinin birinci temel formunun katsayıları

$$g_{11} = \langle X_u, X_u \rangle,\ g_{12} = g_{21} = \langle X_u, X_v \rangle,\ g_{22} = \langle X_v, X_v \rangle \quad (2.6)$$

ile verilir. Burada, X_u ve X_v ile X yüzeyinin u ve v parametrelerine göre kısmi türevi gösterilmektedir. Böylece, X yüzeyine indirgenmiş g metriği

$$g = ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \quad (2.7)$$

ile verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.8. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, $W = \det(g) = g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2$ şeklindedir. Eğer $W > 0$ ise X yüzeyi uzaysal ve eğer $W < 0$ ise X yüzeyi zamansaldır. Ayrıca $W = 0$ ise X yüzeyi dejeneredir. Bu tez çalışmasında dejenere olan yüzeyler çalışılmamıştır.

Tanım 2.9. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, e_1, e_2 vektörleri X'e teğet ve N_1, N_2 vektörleri X'e dik olmak üzere, $\{e_1, e_2, N_1, N_2\}$ lokal ortonormal bazı gözönüne alınsın. Bu durumda, X yüzeyinin N_i, $(i = 1,2)$ vektörlerine göre ikinci temel form katsayıları

$$b_{11}^i = \langle X_{uu}, N_i \rangle, \quad b_{12}^i = b_{21}^i = \langle X_{uv}, N_i \rangle, \quad b_{22}^i = \langle X_{vv}, N_i \rangle \tag{2.8}$$

ile hesaplanır (O'Neill, 1983).

X yüzeyinin $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki ortalama eğrilik vektörü H aşağıdaki şekilde verilir.

$$\mathrm{H} = \epsilon_1 H_1 N_1 + \epsilon_2 H_2 N_2. \tag{2.9}$$

Burada $i = 1,2$ olmak üzere $H_i = \frac{b_{11}^i g_{22} - 2b_{12}^i g_{12} + b_{22}^i g_{11}}{2W}$ şeklindedir. Ayrıca, X yüzeyinin Gauss eğriliği K

$$K = \frac{\epsilon_1 (b_{11}^1 b_{22}^1 - (b_{12}^1)^2) + \epsilon_2 (b_{11}^2 b_{22}^2 - (b_{12}^2)^2)}{W} \tag{2.10}$$

ile verilir. Burada, $\epsilon_1 = \langle N_1, N_1 \rangle$ ve $\epsilon_2 = \langle N_2, N_2 \rangle$ dir. X'in ortalama eğrilik vektörü H sıfır ise X'e minimal (maksimal) yüzey denir. X'in Gauss eğriliğinin sıfır olması durumunda X yüzeyi düz (açılabilir) dür. Ayrıca, X'in ortalama eğrilik vektörü $\mathrm{H} \neq 0$ ışıksal ise, X yüzeyine marjinlerde sıkışmış yüzey (ing. marginally trapped surface) denir.

Tanım 2.10. $G(2,4)$ Grasmaniyen manifoldu, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında orijinden geçen yönlendirilmiş bütün 2-boyutlu düzlemlerin oluşturduğu uzaydır. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında orijinden geçen yönlendirilmiş 2-boyutlu düzlemler, birim 2-vektörler yardımıyla tanımlanabilir. 2-vektörler, $\Lambda^2 \mathbb{E}_1^4$ uzayının elemanıdır, yani vektörlerin wedge çarpımı ($\wedge$) yardımıyla elde edilir. Gauss tasviri ise, X yüzeyinin her noktasına X'in $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki yönlendirilmiş teğet uzayını karşılık getiren bir tasvirdir. Dolayısıyla $\{e_1, e_2\}$, X yüzeyinin ortonormal teğet çatısı olduğundan Gauss tasviri ν

$$\nu(p) = (e_1 \wedge e_2)(p) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlanır (Chen ve Piccinni, 1987). Ayrıca, X yüzeyinin ortonormal teğet çatısı yardımıyla tanımlanan Gauss tasviri, yüzeye ait normal vektörleri de kullanılarak tanımlanabilir. Burada e_1 ve e_2 teğet vektörler ve X yüzeyinin uzaysal veya zamansal olduğunda bu vektörlerin eşitlikleri sırasıyla;

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} X_u \,,\; e_2 = \frac{1}{\sqrt{W g_{11}}} (g_{11} X_v - g_{12} X_u)$$

ve (2.12)

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon g_{11}}} X_u \,,\; e_2 = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon W g_{11}}} (g_{11} X_v - g_{12} X_u)$$

şeklindedir. X yüzeyinin uzaysal veya zamansal olduğunda Gauss tasviri

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{W}} X_u \wedge X_v$$

veya

$$\nu = \frac{\epsilon}{\sqrt{-W}} X_u \wedge X_v \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\epsilon = \langle e_1, e_1 \rangle = -\langle e_2, e_2 \rangle$'dir. Bu tez çalışmasında Gauss tasviri, yüzeyin teğet vektörleri yardımıyla elde edilmiştir.

Tanım 2.11. $\Pi \subset \mathbb{E}_1^4$ olmak üzere Π hiperdüzleminde, $\beta: I \to \Pi$ eğrisi düzgün bir eğri olsun. P, Π hiperdüzleminde 2-boyutlu bir düzlem olmak üzere, β profil eğrisinin P düzlemi etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeye $\mathbb{E}_1^4$ uzayında bir dönel yüzey denir. β profil eğrisi P düzlemi etrafında döndürüldüğünde eş zamanlı olarak dönme hızı ile orantılı olacak şekilde P düzlemine paralel bir l ekseni boyunca ötelenirse oluşan yüzeye $\mathbb{E}_1^4$' de helikoidal yüzey denir. Ayrıca $\mathbb{E}_1^4$ uzayında uzaysal, zamansal ve dejenere düzlemleri sabit bırakan eliptik, hiperbolik ve parabolik dönme olarak isimlendirilen üç tip dönme matrisi vardır. Bu dönme matrisleri kullanılarak aşağıdaki şekilde dört tip helikoidal yüzey parametrizasyonu verilir.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayının standart ortonormal bir bazı $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ olsun. Burada, $\eta_1 = (1,0,0,0)$, $\eta_2 = (0,1,0,0)$, $\eta_3 = (0,0,1,0)$ ve $\eta_4 = (0,0,0,1)$ şeklindedir. P_1, $\{\eta_3, \eta_4\}$ vektörleri

tarafından gerilen zamansal 2-düzlem, Π_1, $\{\eta_1, \eta_3, \eta_4\}$ vektörleri ile üretilen bir hiperdüzlem ve l_1, $\{\eta_4\}$ vektörü tarafından üretilen bir doğru olsun. $\beta_1: I \to \Pi_1 \subset \mathbb{E}_1^4$, $\beta_1(u) = \big(x(u), 0, z(u), w(u)\big)$ ise Π_1 hiperdüzleminde uzanan düzgün regüler bir eğri olsun. Burada, $I \subset \mathbb{R}$ ve $x(u) \neq 0$ dır. $0 \leq v < 2\pi$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, β_1 eğrisinin, P_1 zamansal düzlemini sabit bırakan dönme ve l_1 doğrusu boyunca ötelenmesi sonucunda oluşan X_1 helikoidal yüzeyinin parametrizasyonu

$$X_1(u, v) = (x(u)\cos v\,, x(u)\sin v\,, z(u), w(u) + \lambda v) \tag{2.14}$$

şeklindedir. X_1 yüzeyi, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında I. tip helikoidal yüzey olarak isimlendirilir. Eğer w fonksiyonu sabit ise X_1 yüzeyine I. tip dik helikoidal yüzey denir. Ayrıca, z fonksiyonun sabit olması durumunda, X_1, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir helikoidal yüzeydir (Babaarslan ve Sönmez, 2021).

Not 2.1. $\lambda = 0$ olduğunda, X_1 helikoidal yüzeyi $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki eliptik tip dönel yüzeye dönüşür (Dursun ve Bektaş, 2014; Bektaş ve Dursun, 2015).

P_2 , $\{\eta_1, \eta_2\}$ vektörleri tarafından üretilen uzaysal 2-düzlem, Π_{2a}, $\{\eta_1, \eta_2, \eta_4\}$ vektörleri ile üretilen bir hiperdüzlem ve l_2, $\{\eta_1\}$ vektörü tarafından üretilen bir doğru olsun. $\beta_{2a}: I \to H_{2a} \subset \mathbb{E}_1^4$, $\beta_{2a}(u) = \big(x(u), y(u), 0, w(u)\big)$ ise Π_{2a} hiperdüzleminde uzanan düzgün regüler bir eğri olsun, Burada, $I \subset \mathbb{R}$ ve $w(u) \neq 0$ dır. $v \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, β_{2a} eğrisinin, P_2 uzaysal düzlemini sabit bırakan dönme ve l_2 ekseni boyunca ötelenmesi sonucunda oluşan X_{2a} helikoidal yüzeyinin parametrizasyonu

$$X_{2a}(u, v) = (x(u) + \lambda v, y(u), w(u)\sinh v\,, w(u)\cosh v) \tag{2.15}$$

şeklindedir. X_{2a} yüzeyi, IIa. tip helikoidal yüzey olarak isimlendirilir. Eğer x fonksiyonu sabit ise X_{2a} yüzeyine IIa. tip dik helikoidal yüzey denir. Ayrıca, y fonksiyonun sabit olması durumunda, X_{2a}, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir helikoidal yüzeydir (Babaarslan ve Sönmez, 2021).

Not 2.2. $\lambda = 0$ olduğunda, X_{2a} helikoidal yüzeyi $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki hiperbolik tip dönel yüzeye dönüşür (Dursun ve Bektaş, 2014; Bektaş ve Dursun, 2015).

P_2 , $\{\eta_1, \eta_2\}$ vektörleri tarafından üretilen uzaysal 2-düzlem, Π_{2b}, $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$ vektörleri ile üretilen bir hiperdüzlem ve l_2, $\{\eta_1\}$ vektörü tarafından üretilen bir doğru olsun. $\beta_{2b}: I \to H_{2b} \subset \mathbb{E}_1^4$, $\beta_{2b}(u) = (x(u), y(u), z(u), 0)$ ise, Π_{2b} hiperdüzleminde uzanan düzgün

regüler bir eğri olsun, Burada, $I \subset \mathbb{R}$ ve $z(u) \neq 0$ dır. $v \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, β_{2b} eğrisinin, P_2 uzaysal düzlemini sabit bırakan dönme ve l_2 ekseni boyunca ötelenmesi sonucunda oluşan X_{2b} helikoidal yüzeyinin parametrizasyonu

$$X_{2b}(u,v) = (x(u) + \lambda v, y(u), z(u)\cosh v\,, z(u)\sinh v) \tag{2.16}$$

şeklindedir. X_{2b} yüzeyine, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında IIb. tip helikoidal yüzey denir. Eğer x fonksiyonu sabit ise X_{2b} yüzeyine IIb. tip dik helikoidal yüzey denir. Ayrıca, y nin sabit olması durumunda X_{2b}, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında bir helikoidal yüzeydir.

Not 2.3. $\lambda = 0$ olduğunda, X_{2b} helikoidal yüzeyi $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki hiperbolik tip dönel yüzeye dönüşür.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayının $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ şeklindeki standart ortonormal bir bazı kullanılarak, $\mathbb{E}_1^4$ uzayı için $\{\eta_1, \eta_2, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_4\}$ yarı-ortogonal bazı tanımlanır. Burada, $\boldsymbol{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_4 - \eta_3)$ ve $\boldsymbol{\xi}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_3 + \eta_4)$ dir. P_3, $\{\eta_1, \boldsymbol{\xi}_3\}$ vektörleri tarafından üretilen dejenere 2-düzlem, Π_3, $\{\eta_1, \boldsymbol{\xi}_3, \boldsymbol{\xi}_4\}$ vektörleri tarafından üretilen bir hiperdüzlem ve l_3, $\{\boldsymbol{\xi}_3\}$ vektörü ile üretilen bir doğru olsun. $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki P_3 dejenere düzlemini sabit bırakan T_3 dönüşümü $T_3(\eta_1) = \eta_1$, $T_3(\eta_2) = \eta_2 + \sqrt{2}v\boldsymbol{\xi}_3$, $T_3(\boldsymbol{\xi}_3) = \boldsymbol{\xi}_3$ ve $T_3(\boldsymbol{\xi}_4) = \sqrt{2}v\eta_2 + v^2\boldsymbol{\xi}_3 + \boldsymbol{\xi}_4$ ile tanımlanır. T_3 dönüşümü ortogonaldir. $\beta_3 : I \to \Pi_3 \subset \mathbb{E}_1^4$, $\beta_3(u) = x(u)\eta_1 + z(u)\boldsymbol{\xi}_3 + w(u)\boldsymbol{\xi}_4$, Π_3 hiperdüzleminde uzanan düzgün regüler bir eğri olsun. Burada, $I \subset \mathbb{R}$ ve $w(u) \neq 0$ dır. $v \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, β_3 eğrisinin, P_3 dejenere düzlemini sabit bırakan dönme ve l_3 ekseni boyunca öteleme ile elde edilen X_3 helikodal yüzeyinin parametrizasyonu

$$X_3(u,v) = x(u)\eta_1 + \sqrt{2}vw(u)\eta_2 + (z(u) + v^2w(u) + \lambda v)\xi_3 + w(u)\xi_4 \tag{2.17}$$

şeklindedir. X_3 yüzeyi, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında III. tip helikoidal yüzey olarak isimlendirilir. Eğer w fonksiyonu sabit ise X_3 yüzeyine, III. tip dik helikoidal yüzey denir (Babaarslan ve Sönmez, 2021).

Not 2.4. $\lambda = 0$ olduğunda, X_3 helikoidal yüzeyi $\mathbb{E}_1^4$ uzayındaki parabolik tip dönel yüzeye dönüşür (Dursun ve Bektaş, 2014; Bektaş ve Dursun, 2015).

3. MINKOWSKI UZAY-ZAMANDA UZAYSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER

Bu bölümde, ilk olarak sırasıyla I. tip, IIa. tip ve III. tip uzaysal helikoidal yüzeylerin ortalama eğrilikleri ve Gauss eğrilikleri elde edilecektir. Bu yüzeylere Bour teoremine göre izometrik dönel yüzeyler araştırılacaktır. Gauss tasvirleri aynı olan izometrik yüzeyler sınıflandırılacaktır. Helikoidal yüzeylerin, dik helikoidal olup olmama durumu incelenecektir. Ayrıca izometrik yüzeylerin Gauss Egregium teoremini sağladığı gösterilecektir. Son olarak sırasıyla bütün tipler için birer örnek oluşturulacaktır.

3.1. Minkowski Uzay-Zamanda I. Tip Uzaysal Helikoidal Yüzeyler

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, (2.14) denklemiyle verilen I. tip helikoidal yüzey X_1'in parametrik denkleminin sırasıyla u ve v'ye göre kısmi türevleri alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$X_{1_u} = (x'(u)cosv, x'(u)sinv, z'(u), w'(u))$ ve $X_{1_v} = (-x(u)sinv, x(u)cosv, 0, \lambda).$

Böylece helikoidal yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$g_{11} = x'^2(u) + z'^2(u) - w'^2(u), \quad g_{12} = -\lambda w'(u) \text{ ve } g_{22} = x^2(u) - \lambda^2 \tag{3.1.1}$$

şeklinde elde edilir. X_1 helikoidal yüzeyin uzaysal olması için her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W = (x^2(u) - \lambda^2)(x'^2(u) + z'^2(u)) - x^2(u)w'^2(u) > 0$ olmalıdır.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında e_1 ve e_2 vektörleri X_1'e teğet ve N_1, N_2 vektörleri X_1'e normal olacak şekilde X_1 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerinde tanımlı $\{e_1, e_2, N_1, N_2\}$ şeklinde yönlendirilmiş bir ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{X_{1_u}}{\sqrt{g_{11}}}, \; e_2 = \frac{1}{\sqrt{W g_{11}}}\left(g_{11}X_{1_v} - g_{12}X_{1_u}\right), \tag{3.1.2}$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + z'^2}}(z'cosv, z'sinv, -x', 0), \tag{3.1.3}$$

$$\begin{aligned} N_2 \; &= \frac{1}{\sqrt{W(x'^2 + z'^2)}}(xx'w'cosv - \lambda(x'^2 + z'^2)sinv, xx'w'sinv \\ &\quad + \lambda(x'^2 + z'^2)cosv, xz'w', x(x'^2 + z'^2)) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

olarak seçilebilir. Burada $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle N_1, N_1\rangle = -\langle N_2, N_2\rangle = 1$ şeklindedir.

Gerekli hesaplamalar yapılarak, X_1 uzaysal helikoidal yüzeyine ait ikinci temel form katsayıları:

$$b_{11}^1 = \frac{x''z'-x'z''}{\sqrt{x'^2+z'^2}}, \qquad b_{12}^1 = b_{21}^1 = 0, \qquad b_{22}^1 = -\frac{xz'}{\sqrt{x'^2+z'^2}},$$
$$b_{11}^2 = \frac{x(w'(x'x''+z'z'')-w''(x'^2+z'^2))}{\sqrt{W(x'^2+z'^2)}},\ b_{12}^2 = b_{21}^2 = \frac{\lambda x'\sqrt{x'^2+z'^2}}{\sqrt{W}},\ b_{22}^2 = -\frac{x^2x'w'}{\sqrt{W(x'^2+z'^2)}} \tag{3.1.5}$$

şeklinde elde edilir. İkinci temel form katsayıları göz önünde bulundurularak, X_1 uzaysal helikoidal yüzeyinin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i{}^{X_1}$ (i = 1,2) sırasıyla,

$$H_1^{X_1} = \frac{1}{2W\sqrt{x'^2+z'^2}}\Big((x^2-\lambda^2)(x''z'-x'z'')-xz'\big(x'^2+z'^2-w'^2\big)\Big) \tag{3.1.6}$$

ve

$$H_2^{X_1} = \frac{1}{2W^{3/2}\sqrt{x'^2+z'^2}}(x'w'(2\lambda^2-x^2)(x'^2+z'^2)+x^2x'w'^3 - x(x^2-\lambda^2)\big(x'(x'w''-x''w')+z'(z'w''-z''w')\big) \tag{3.1.7}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.5)'deki eşitlikler kullanılarak, X_1 uzaysal helikoidal yüzeyinin Gauss eğriliği K^{X_1},

$$K^{X_1} = \frac{1}{W^2}(xz'(x^2-\lambda^2)(x'z''-x''z')+x^3w'(x''w'-x'w'')+\lambda^2x'^2(x'^2+z'^2)) \tag{3.1.8}$$

olarak hesaplanır.

X_1 uzaysal helikoidal yüzeye Bour teoremine göre izometrik olan dönel yüzeyler aşağıdaki teorem yardımıyla belirlenecektir.

Teorem 3.1.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) ile verilen X_1 uzaysal helikoidal aşağıdaki uzaysal dönel yüzeylerden birine izometriktir:

i)

$$R_1^1(u,v)=\begin{bmatrix}\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\cos\left(v-\int\frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right)\\ \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\sin\left(v-\int\frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right)\\ \int\frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du\\ \int\frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du\end{bmatrix} \tag{3.1.9}$$

öyleki, X_1 uzaysal helikoidal yüzey üzerindeki helisler, R_1^1 uzaysal dönel yüzey üzerindeki parallel çemberlere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)-b^2(u)=\frac{x^2(u)\left(z'^2(u)-w'^2(u)\right)-\lambda^2\left(x'^2(u)+z'^2(u)\right)}{x^2(u)x'^2(u)} \tag{3.1.10}$$

ii)

$$R_1^2(u,v)=\begin{bmatrix}\int\frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du\\ \int\frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du\\ \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\sinh\left(v-\int\frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right)\\ \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\cosh\left(v-\int\frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right)\end{bmatrix} \tag{3.1.11}$$

öyleki, X_1 uzaysal helikoidal yüzey üzerindeki helisler, R_1^2 uzaysal dönel yüzey üzerindeki parallel hiperbollere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)+b^2(u)=\frac{x^2(u)\left(2x'^2(u)+z'^2(u)-w'^2(u)\right)-\lambda^2\left(x'^2(u)+z'^2(u)\right)}{x^2(u)x'^2(u)}. \tag{3.1.12}$$

Burada, her $u\in I\subset\mathbb{R}$ için, $x'(u)\neq 0$ dır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemi ile verilen X_1 uzaysal helikoidal yüzeyi ele alınsın. (3.1.1) denklemi kullanılarak X_1 uzaysal helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds_{X_1}^2=\left(x'^2(u)+z'^2(u)-w'^2(u)\right)du^2-2\lambda w'(u)dudv+(x^2(u)-\lambda^2)dv^2 \tag{3.1.13}$$

şeklindedir. X_1 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerinde helislere ortogonal olan v-parametreli bir eğri yardımıyla

$$-\lambda w'(u)du + (x^2(u) - \lambda^2)dv = 0. \tag{3.1.14}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca (3.1.14) denklemi çözülürse;

$$v = \int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u) - \lambda^2} du + c_1 \tag{3.1.15}$$

elde edilir. Burada c_1 keyfi sabittir. Burada c_1 yerine $\bar{v}$ alınarak

$$\bar{v} = v - \int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u) - \lambda^2} du \tag{3.1.16}$$

bulunur. (3.1.16) denkleminin her iki tarafının *u* ya göre türevi alınarak

$$dv = d\bar{v} + \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u) - \lambda^2} du \tag{3.1.17}$$

eşitliği elde edilir. (3.1.17)'deki eşitlik (3.1.13) denkleminde yerine yazılarak X_1 uzaysal helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$ds^2_{X_1} = \left(x'^2(u) + z'^2(u) - w'^2(u) - \frac{\lambda^2 w'^2(u)}{x^2(u) - \lambda^2}\right) du^2 + (x^2(u) - \lambda^2) d\bar{v}^2. \tag{3.1.18}$$

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_1 uzaysal helikoidal yüzeyde her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W > 0$ olduğu için $x^2(u) - \lambda^2 > 0$ olmalıdır.

X_1 uzaysal helikoidal yüzeyine izometrik yüzeyleri bulmak için aşağıda sırasıyla R_1, R_2 ve R_3 dönel yüzeylerin yer vektörleri verilir.

I. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında yer vektörü aşağıdaki şekilde verilen R_1 uzaysal dönel yüzeyi göz önüne alınsın.

$$R_1(k,t) = \big(n(k)cost, n(k)sint, s(k), r(k)\big). \tag{3.1.19}$$

Bu yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds^2_{R_1} = \big(\dot{n}^2(k) + \dot{s}^2(k) - \dot{r}^2(k)\big)dk^2 + n^2(k)dt^2 \tag{3.1.20}$$

şeklindedir. R_1 dönel yüzeyi uzaysal olduğundan $\dot{n}^2(k) + \dot{s}^2(k) - \dot{r}^2(k) > 0$'dır. Burada $n(k) > 0$'dır. Bu durumda (3.1.18) ve (3.1.20) denklemleri karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $n(k) = \sqrt{x^2(u) - \lambda^2}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k)+\dot{s}^2(k)-\dot{r}^2(k)\right)dk^2=\left(x'^2(u)+z'^2(u)-w'^2(u)-\frac{\lambda^2 w'^2(u)}{x^2(u)-\lambda^2}\right)du^2 \quad (3.1.21)$$

şeklinde alınarak, X_1 ve R_1 yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u)=\frac{s'(u)}{n'(u)}$ ve $b(u)=\frac{r'(u)}{n'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (3.1.21) denkleminden (3.1.10) eşitliği elde edilir. Böylece

$$s(u)=\int\frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du \text{ ve } r(u)=\int\frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du \quad (3.1.22)$$

bulunur. Sonuç olarak, (3.1.9) denklemi ile verilen uzaysal dönel yüzey R_1^1, (2.14) ile verilen uzaysal helikoidal yüzey X_1'e Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere, X_1 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_1(u_0,v)$ olacak şekilde bir helis ele alınsın. X_1 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_1(u_0,v)$ helisleri, R_1^1 uzaysal dönel yüzeyi üzerindeki paralel çemberlere karşılık gelir. Bu çemberler, c_3 ve c_4 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_3=c_3,\ x_4=c_4\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{x_0^2-\lambda^2}$ yarıçaplı çemberlerdir ve parametrizasyonu $R_1^1(u_0,v)=\left(\sqrt{x_0^2-\lambda^2}\cos v,\sqrt{x_0^2-\lambda^2}\sin v,c_3,c_4\right)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

II. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında yer vektörü aşağıdaki şekilde verilen R_2 uzaysal dönel yüzeyi göz önüne alınsın.

$$R_2(k,t)=(n(k),p(k),r(k)sinht,r(k)cosht). \quad (3.1.23)$$

Bu yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds_{R_2}^2=\left(\dot{n}^2(k)+\dot{p}^2(k)-\dot{r}^2(k)\right)dk^2+r^2(k)dt^2 \quad (3.1.24)$$

şeklindedir. R_2 dönel yüzeyi uzaysal olduğundan $\dot{n}^2(k)+\dot{p}^2(k)-\dot{r}^2(k)>0$'dır. Burada $r(k)>0$'dır. Bu durumda (3.1.18) ve (3.1.24) denklemleri karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $r(k)=\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k)+\dot{p}^2(k)-\dot{r}^2(k)\right)dk^2=\left(x'^2(u)+z'^2(u)-w'^2(u)-\frac{\lambda^2 w'^2(u)}{x^2(u)-\lambda^2}\right)du^2 \quad (3.1.25)$$

şeklinde alınarak, X_1 ve R_2 yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u)=\frac{n'(u)}{r'(u)}$ ve $b(u)=\frac{p'(u)}{r'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (3.1.25) denkleminden (3.1.12) eşitliği elde edilir. Böylece

$$n(u)=\int \frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du \text{ ve } p(u)=\int \frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du \tag{3.1.26}$$

bulunur. Sonuç olarak (3.1.11) denklemi ile verilen uzaysal dönel yüzey R_1^2, (2.14) ile verilen uzaysal helikoidal yüzey X_1'e Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_1 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_1(u_0,v)$ olacak şekilde bir helis ele alınsın. X_1 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_1(u_0,v)$ helisleri, R_1^2 uzaysal dönel yüzeyi üzerindeki paralel hiperbollere karşılık gelir. Bu hiperboller, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_1=c_1,\ x_2=c_2\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{x_0^2-\lambda^2}$ yarıçaplı hiperbollerdir ve parametrizasyonu $R_1^2(u_0,v)=\left(c_1,c_2,\sqrt{x_0^2-\lambda^2}\sinh v\,,\sqrt{x_0^2-\lambda^2}\cosh v\right)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

Teorem 3.1.1.'de (3.1.9) denklemi ile verilen R_1^1 uzaysal dönel yüzeyinin normallerini ve ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri aşağıdaki lemma yardımıyla bulunur.

Lemma 3.1.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (3.1.9) denkleminde verilen R_1^1 uzaysal dönel yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i{}^{R_1^1}$ (i $=1,2$), sırasıyla

$$H_1^{R_1^1}=-\frac{a'(x^2-\lambda^2)+axx'(1+a^2-b^2)}{2xx'(1+a^2-b^2)\sqrt{(1+a^2)(x^2-\lambda^2)}} \tag{3.1.27}$$

ve

$$H_2^{R_1^1}=\frac{(x^2-\lambda^2)\big(aa'b-b'(1+a^2)\big)-bxx'(1+a^2-b^2)}{2xx'\sqrt{(1+a^2)(x^2-\lambda^2)(1+a^2-b^2)^3}} \tag{3.1.28}$$

şeklindedir. Ayrıca R_1^1 uzaysal dönel yüzeyin N_1 ve N_2 normal vektörleri:

$$N_1=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(acos\mu, asin\mu,-1,0) \tag{3.1.29}$$

ve

$$N_2=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a^2-b^2}}(bcos\mu, bsin\mu, ab, 1+a^2) \tag{3.1.30}$$

dir. Burada $\mu=v-\int \frac{\lambda w\prime(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du$ şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (3.1.9) denkleminde verilen R_1^1 dönel yüzeyin parametrik denkleminin sırasıyla u ve v'ye göre kısmi türevleri alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$R_{1_u}^1 = \frac{1}{\sqrt{x^2-\lambda^2}}(xx'cos\mu + \lambda w'sin\mu, xx'sin\mu - \lambda w'\cos\mu\,, axx', bxx')$$

ve

$$R_{1_v}^1 = \sqrt{x^2-\lambda^2}(-sin\mu, cos\mu, 0,0).$$

Böylece dönel yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$g_{11} = \frac{x^2x'^2(1+a^2-b^2)+\lambda^2w'^2}{x^2-\lambda^2},\ g_{12} = -\lambda w'(u) \text{ ve } g_{22} = x^2(u) - \lambda^2 \tag{3.1.31}$$

şeklinde elde edilir. R_1^1 dönel yüzeyin uzaysal olması için her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W = x^2x'^2(1 + a^2 - b^2) > 0$ olmalıdır. Ayrıca (3.1.29) ve (3.1.30) denklemleri ile verilen N_1 ve N_2 normal vektörleri kullanılarak ve gerekli hesaplamalar yapılarak, R_1^1 yüzeyine ait ikinci temel form katsayıları:

$$b_{11}^1 = -\frac{a'xx'(x^2-\lambda^2)+\lambda^2aw'^2}{\sqrt{(1+a^2)(x^2-\lambda^2)^3}},\ b_{12}^1 = b_{21}^1 = \frac{\lambda aw'}{\sqrt{(1+a^2)(x^2-\lambda^2)}},\ b_{22}^1 = -\frac{a\sqrt{x^2-\lambda^2}}{\sqrt{1+a^2}},$$

$$b_{11}^2 = -\frac{xx'(x^2-\lambda^2)(b'(1+a^2)-aa'b)+\lambda^2bw'^2}{\sqrt{(1+a^2)(1+a^2-b^2)(x^2-\lambda^2)^3}},\qquad b_{12}^2 = b_{21}^2 = \tag{3.1.32}$$

$$\frac{\lambda bw'}{\sqrt{(1+a^2)(1+a^2-b^2)(x^2-\lambda^2)}},\ b_{22}^2 = -\frac{b\sqrt{x^2-\lambda^2}}{\sqrt{(1+a^2)(1+a^2-b^2)}}$$

şeklinde elde edilir. İkinci temel formun bileşenleri göz önünde bulundurulduğunda, R_1^1 yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i{}^{R_1^1}$ (i = 1,2) sırasıyla

$$H_1^{R_1^1} = -\frac{a'(x^2-\lambda^2)+axx'(1+a^2-b^2)}{2xx'(1+a^2-b^2)\sqrt{(1+a^2)(x^2-\lambda^2)}} \tag{3.1.33}$$

ve

$$H_2^{R_1^1} = \frac{(x^2-\lambda^2)\big(aa'b-b'(1+a^2)\big)-bxx'(1+a^2-b^2)}{2xx'\sqrt{(1+a^2)(x^2-\lambda^2)(1+a^2-b^2)^3}} \tag{3.1.34}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.1.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ standart ortonormal baz ve $i, j = 1,2,3,4$ için $\eta_{ij} = \eta_i \wedge \eta_j$ olmak üzere (2.14) , (3.1.9) ve (3.1.11) denklemleri ile verilen X_1, R_1^1 ve R_1^2 uzaysal yüzeylerin Gauss tasvirleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\nu_{X_1} &= \frac{1}{\sqrt{W}}(xx'\eta_{12} + xz'\sin v\,\eta_{13} + (\lambda x'\cos v + xw'\sin v)\eta_{14} - xz'\cos v\,\eta_{23} \\ &\quad +(\lambda x'\sin v - xw'\cos v)\eta_{24} + \lambda z'\eta_{34}),\end{aligned} \tag{3.1.35}$$

$$\nu_{R_1^1} = \frac{xx'}{\sqrt{W}}(\eta_{12} + a\sin\mu\,\eta_{13} + b\sin\mu\,\eta_{14} - a\cos\mu\,\eta_{23} - b\cos\mu\,\eta_{24}) \tag{3.1.36}$$

ve

$$\nu_{R_1^2} = \frac{xx'}{\sqrt{W}}(a\cosh\mu\,\eta_{13} + a\sinh\mu\,\eta_{14} + b\cosh\mu\,\eta_{23} + b\sinh\mu\,\eta_{24} - \eta_{34}) \tag{3.1.37}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mu = v - \int \frac{\lambda w\prime(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du$ şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemi ile verilen X_1 uzaysal helikoidal yüzeyin Gauss tasviri, (2.13) denklemini kullanarak aşağıdaki şekilde hesaplanır.

X_1 helikoidal yüzeyinin sırasıyla u ve v'ye göre kısmi türevleri:

$X_{1_u} = (x'(u)cosv, x'(u)sinv, z'(u), w'(u))$ ve $X_{1_v} = (-x(u)sinv, x(u)cosv, 0, \lambda)$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}\nu_{X_1} &= \frac{1}{\sqrt{W}}X_{1_u}\wedge X_{1_v} \\ &= \frac{1}{\sqrt{W}}(-xx'\sin v\cos v\,\eta_1\wedge\eta_1 + xx'\cos v^2\,\eta_1\wedge\eta_2 \\ &\quad +\lambda x'\cos v\,\eta_1\wedge\eta_4 - xx'\sin v^2\,\eta_2\wedge\eta_1 + xx'\sin v\cos v\,\eta_2\wedge\eta_2 \\ &\quad +\lambda x'\sin v\,\eta_2\wedge\eta_4 - xz'\sin v\,\eta_3\wedge\eta_1 + xz'\cos v\,\eta_3\wedge\eta_2 \\ &\quad +\lambda z'\eta_3\wedge\eta_4 - xw'\sin v\,\eta_4\wedge\eta_1 + xw'\cos v\,\eta_4\wedge\eta_2 + \lambda w'\eta_4\wedge\eta_4 \\ &= \frac{1}{\sqrt{W}}(xx'\eta_{12} + xz'\sin v\,\eta_{13} + (\lambda x'\cos v + xw'\sin v)\eta_{14} \\ &\quad -xz'\cos v\,\eta_{23} + (\lambda x'\sin v - xw'\cos v)\eta_{24} + \lambda z'\eta_{34})\end{aligned} \tag{3.1.38}$$

dir. (3.1.9) ve (3.1.11) denklemleri ile verilen R_1^1 ve R_1^2 yüzeylerinin Gauss tasviri benzer şekilde elde edilir. Ayrıca (2.14) ve (3.1.9) denklemleri ile verilen X_1 ve R_1^1'in aynı Gauss tasvirine sahip olduğunda aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.1.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemi ile verilen X_1 uzaysal helikoidal yüzey ve (3.1.9) denklemi ile verilen uzaysal dönel yüzey R_1^1 eğer aynı Gauss tasvirine sahip ise bu yüzeyler hiperdüzlemsel ve minimaldir. Bu durumda, X_1 ve R_1^1'in parametrizasyonları,

$$X_1(u,v) = (x(u)\cos v\,, x(u)\sin v\,, c_1, w(u) + \lambda v) \tag{3.1.39}$$

ve

$$R_1^1(u,v) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\cos\left(v - \int \dfrac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}\,du\right) \\ \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\sin\left(v - \int \dfrac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}\,du\right) \\ c_2 \\ \pm\dfrac{1}{\sqrt{c_3}}\sinh^{-1}\sqrt{c_3(x^2(u)-\lambda^2)} + c_4 \end{bmatrix} \tag{3.1.40}$$

elde edilir. Burada, $0 < c_3 < \frac{1}{\lambda^2}$ olmak üzere, c_1, c_2, c_3, c_4 keyfi sabitler ve

$$w(u) = \pm\left(\sqrt{\tfrac{1-c_3\lambda^2}{c_3}}\sinh^{-1}\sqrt{c_3(x^2(u)-\lambda^2)} - \lambda\tanh^{-1}\sqrt{\tfrac{(1-c_3\lambda^2)(x^2(u)-\lambda^2)}{\lambda^2(1+c_3(x^2(u)-\lambda^2))}}\right)$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_1 uzaysal helikoidal yüzey ve R_1^1 uzaysal dönel yüzeyin Gauss tasvirlerini sırasıyla (3.1.35) ve (3.1.36) verilmiştir. Bu denklemler karşılaştırarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x(u)z'(u)\sin v = a(u)x(u)x'(u)\sin\mu, \tag{3.1.41}$$
$$\lambda x'(u)\cos v + x(u)w'(u)\sin v = b(u)x(u)x'(u)\sin\mu, \tag{3.1.42}$$
$$x(u)z'(u)\cos v = a(u)x(u)x'(u)\cos\mu, \tag{3.1.43}$$
$$\lambda x'(u)\sin v - x(u)w'(u)\cos v = -b(u)x(u)x'(u)\cos\mu, \tag{3.1.44}$$
$$\lambda z'(u) = 0. \tag{3.1.45}$$

(3.1.45) denkleminden $\lambda \neq 0$ olduğundan $z'(u) = 0$ olur. Ayrıca (3.1.41) ve (3.1.43) denklemlerinden $a(u) = 0$ bulunur. Böylece X_1 ve R_1^1 hiperdüzlemseldir. Yani X_1 ve R_1^1 yüzeyleri $\mathbb{E}_1^3$'e indirgenir. (3.1.6) ve (3.1.27) denklemlerinden $H_1^{X_1} = 0$ ve $H_1^{R_1^1} = 0$ elde edilir. Ayrıca,

$$H_2^{X_1} = \frac{x'^2 w'(2\lambda^2 - x^2) + x^2 w'^3 + x(x^2 - \lambda^2)(x''w' - x'w'')}{2\left(x'^2(x^2 - \lambda^2) - x^2 w'^2\right)} \tag{3.1.46}$$

ve

$$H_2^{R_1^1} = \frac{bxx'(b^2 - 1) - b'(x^2 - \lambda^2)}{2xx'\sqrt{(x^2 - \lambda^2)(1 - b^2)^3}} \tag{3.1.47}$$

eşitlikler elde edilir. Diğer taraftan (3.1.10) denklemini kullanarak

$$b^2 = \frac{x^2 w'^2 + \lambda^2 x'^2}{x^2 x'^2} \tag{3.1.48}$$

bulunur. (3.1.48) denklemini (3.1.47)'te yerine yazılarak

$$H_2^{R_1^1} = \frac{x^2 w'\left(x'^2 w'(2\lambda^2 - x^2) + x^2 w'^3 + x(x^2 - \lambda^2)(x''w' - x'w'')\right)}{2(x'^2(x^2 - \lambda^2) - x^2 w'^2)^{3/2}\sqrt{(x^2 w'^2 + \lambda^2 x'^2)(x^2 - \lambda^2)}} \tag{3.1.49}$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.42) ve (3.1.44) denklemleri kullanılarak

$$x(u)w'(u) = b(u)x(u)x'(u)\cos\left(\int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u) - \lambda^2}\,du\right) \tag{3.1.50}$$

ve

$$\lambda x'(u) = -b(u)x(u)x'(u)\sin\left(\int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u) - \lambda^2}\,du\right) \tag{3.1.51}$$

elde edilir. (3.1.50) ve (3.1.51) denklemleri karşılaştırılarak

$$\frac{x(u)w'(u)}{\lambda x'(u)} = -\cot\left(\int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u) - \lambda^2}\,du\right) \tag{3.1.52}$$

olarak bulunur. (3.1.52) denklemini u'ya göre türevi alındığında

$$x'^2 w'(2\lambda^2 - x^2) + x^2 w'^3 + x(x^2 - \lambda^2)(x''w' - x'w'') = 0 \tag{3.1.53}$$

elde edilir. Buradan $H_2^{X_1} = H_2^{R_1^1} = 0$ bulunur. Böylece X_1 ve R_1^1 yüzeyleri minimaldir. X_1 ve R_1^1 yüzeylerinin aynı Gauss tasvirine sahip olduklarında yüzeylerin parametrizasyonları bulunur. Eğer R_1^1 yüzeyi minimal ise, (3.1.47) denkleminden

$$(x^2(u) - \lambda^2)b'(u) + x(u)x'(u)b(u) = x(u)x'(u)b^3(u) \tag{3.1.54}$$

Bernoulli diferansiyel denklemini elde edilir. (3.1.54) denklemi çözülerek

$$b^2 = \frac{1}{1 + c_3(x^2 - \lambda^2)} \tag{3.1.55}$$

bulunur. Burada c_3 keyfi sabittir. Son olarak (3.1.48) ve (3.1.55) denklemlerini karşılaştırılarak

$$w(u) = \pm\sqrt{1 - c_3\lambda^2} \int \frac{x'(u)}{x(u)} \sqrt{\frac{x^2 - \lambda^2}{1 + c_3(x^2 - \lambda^2)}}\, du \tag{3.1.56}$$

elde edilir. Burada $0 < c_3 < \frac{1}{\lambda^2}$ şeklindedir. Ayrıca R_1^1 yüzeyinin son bileşeni

$$\int \frac{x(u)x'(u)}{\sqrt{(x^2 - \lambda^2)\big(1 + c_3(x^2 - \lambda^2)\big)}}\, du = \pm\frac{1}{\sqrt{c_3}} \sinh^{-1}\sqrt{c_3(x^2(u) - \lambda^2)} + c_4 \tag{3.1.57}$$

şeklinde bulunur. Burada c_4 keyfi sabittir. Böylece istenen sonuç elde edilir.

Ikawa (2001) $\mathbb{E}_1^3$ uzayında izometrik yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduğu yüzeyleri belirlemiştir. Eğer Teorem 3.1.4'de verilen izometrik yüzeylerde $x(u) = u$ alınırsa, Ikawa (2001)'nın elde ettiği yüzeyler ile çakıştığı görülür. (2.14) denklemiyle verilen X_1 helikoidal yüzeyinde eğer $w'(u) = 0$ alınırsa, X_1 helikoidal yüzeyi dik helikoidal yüzeyine indirgenir. Ayrıca bu durum altında, (3.1.56) denkleminden $c_3 = \frac{1}{\lambda^2}$ elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.1.1. I. tip uzaysal dik helikoidal yüzey,

$$X_1(u, v) = (x(u)\cos v\,, x(u)\sin v\,, c_1, \lambda v) \tag{3.1.58}$$

biçimindedir. (3.1.58) denklemiyle verilen dik helikoidal yüzeye izometrik olan dönel yüzey

$$R_1^1(u, v) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2(u) - \lambda^2}\cos v \\ \sqrt{x^2(u) - \lambda^2}\sin v \\ c_2 \\ \pm\lambda \sinh^{-1}\dfrac{\sqrt{(x^2(u) - \lambda^2)}}{\lambda} + c_3 \end{bmatrix} \tag{3.1.59}$$

şeklinde bulunur. Burada c_1, c_2 ve c_3 keyfi sabittir. (3.1.58) denklemiyle verilen uzaysal dik helikoidal yüzey üzerindeki helisler, (3.1.59) denklemiyle verilen uzaysal dönel yüzey üzerindeki çemberlere karşılık gelmektedir. Dahası bu yüzeyler minimaldir ve aynı Gauss

tasvirlerine sahiptirler. (2.14) denklemi ile verilen X_1 ve (3.1.11) denklemi ile verilen R_1^2 yüzeylerinin Gauss tasvirleri ile ilgili teorem aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 3.1.4. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemi ile verilen X_1 uzaysal helikoidal yüzeyi ve (3.1.11) denklemi ile verilen R_1^2 uzaysal dönel yüzeylerinin Gauss tasvirleri birbirinden farklıdır.

İspat. X_1 ve R_1^2 yüzeylerin sırasıyla (3.1.35) ve (3.1.37) denklemlerinde Gauss tasvirleri elde edilmiştir. Bu yüzeylerin Gauss tasvirlerini karşılaştırarak $x(u) = 0$ veya $x'(u) = 0$ bulunur. Böylece $\nu_{R_1^2} = 0$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla X_1 ve R_1^2 yüzeylerinin Gauss tasvirleri birbirinden farklıdır.

Aşağıdaki teorem yardımıyla izometrik yüzeylerin aynı Gauss eğriliklerine sahip oldukları (yani Gauss Egregium teoremini sağladıkları) gösterilir.

Teorem 3.1.5. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemiyle verilen X_1 uzaysal helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği sırasıyla (3.1.9) denklemiyle verilen R_1^1 uzaysal dönel yüzeyin ve (3.1.11) denklemiyle verilen R_1^2 uzaysal dönel yüzeyin Gauss eğrilikleri aynıdır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemiyle verilen X_1 uzaysal helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği (3.1.8) denkleminde elde edilmiştir. (3.1.9) denklemiyle verilen R_1^1 uzaysal dönel yüzeyin (3.1.32) denklemiyle verilen ikinci temel form katsayılarını ve (2.10) denklemini kullanarak R_1^1 yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K^{R_1^1} = \frac{x^3 x'^3 (aa' - bb')}{W^2} \tag{3.1.60}$$

elde edilir. (3.1.10) denklemini kullanarak

$$K^{R_1^1} = \frac{xz'(x^2 - \lambda^2)(x'z'' - x''z') + x^3 w'(x''w' - x'w'') + \lambda^2 x'^2 (x'^2 + z'^2)}{W^2} \tag{3.1.61}$$

bulunur. Böylece $K^{X_1} = K^{R_1^1}$'dir. Benzer işlemler yapılarak X_1 ve R_1^2 yüzeylerinin aynı Gauss eğriliğine sahip olduğu görülür. Sonuç olarak izometrik yüzeylerin Gauss Egregium teoremini sağladığı elde edilmiştir.

Son olarak, Teorem 3.1.3'ü kullanarak, izometrik ve aynı Gauss tasvirine sahip olan yüzeyler için bir örnek verilecektir.

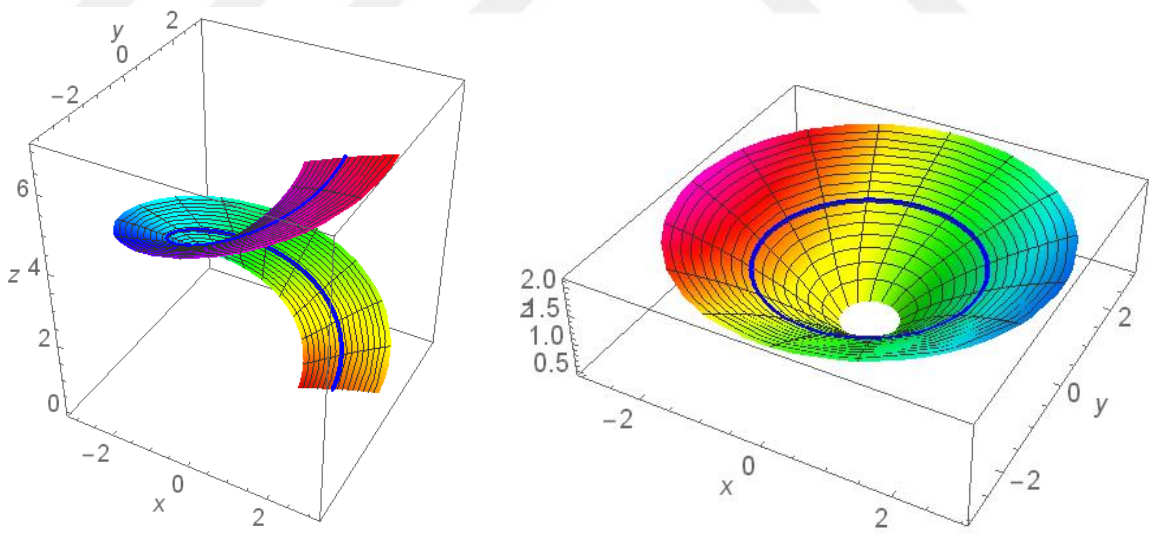
Örnek 3.1.1. Teorem 3.1.3'de X_1 ve R_1^1 yüzeylerini ele alınsın. Eğer $x(u) = u$, $\lambda = 1$, $c_3 = \frac{1}{2}$ ve $c_4 = 0$ alınırsa, bu yüzeylerin parametrizasyonları;

$$X_1(u,v) = \left(u\cos v\,, u\sin v\,, c_1, \sinh^{-1}\sqrt{\frac{u^2-1}{2}} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{u^2-1}{u^2+1}} + v \right) \tag{3.1.62}$$

ve

$$R_1^1(u,v) = \begin{bmatrix} \sqrt{u^2-1}\cos\left(v - \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{u^4-1}\right) \\ \sqrt{u^2-1}\sin\left(v - \frac{1}{2}\tan^{-1}\sqrt{u^4-1}\right) \\ c_2 \\ \sqrt{2}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{u^2-1}{2}} \end{bmatrix} \tag{3.1.63}$$

şeklindedir. Wolfram Mathematica 10.4 proramını kullanarak, $1.1 \le u \le \pi$ ve $0 \le v < 2\pi$ aralıkları için, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında uzaysal helikoidal yüzey X_1 ve uzaysal dönel yüzey $R_1^{1\prime}$in grafikleri aşağıdaki şekilde çizilir.



(a) (b)

Şekil 3.1.1 (a) I. tip uzaysal helikoidal yüzey; helis (b) uzaysal dönel yüzey; çember.

3.2. Minkowski Uzay-Zamanda IIa. Tip Uzaysal Helikoidal Yüzey

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, (2.15) denklemiyle verilen IIa. tip helikoidal yüzey X_{2a}'nın parametrik denkleminin sırasıyla u ve v'ye göre kısmi türevleri alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$X_{2a_u} = (x'(u), y'(u), w'(u)\sinh v\,, w'(u)\cosh v)$$

ve

$$X_{2a_v} = (\lambda, 0, w(u)\cosh v\,, w(u)\sinh v).$$

Böylece helikoidal yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$g_{11} = x'^2(u) + y'^2(u) - w'^2(u),\ \ g_{12} = \lambda x'(u)\ \text{ ve }\ g_{22} = w^2(u) + \lambda^2 \tag{3.2.1}$$

şeklinde elde edilir. X_{2a} helikoidal yüzeyin uzaysal olması için her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W = (w^2(u) + \lambda^2)(y'^2(u) - w'^2(u)) + x'^2(u)w^2(u) > 0$ olmalıdır.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında e_1 ve e_2 vektörleri X_{2a}' ya teğet ve $N_1,\ N_2$ vektörleri X_{2a}'ya normal olacak şekilde X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyi üzerinde tanımlı $\{e_1, e_2, N_1, N_2\}$ şeklinde yönlendirilmiş bir ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}X_{2a_u},\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{W g_{11}}}\left(g_{11}X_{2a_v} - g_{12}X_{2a_u}\right), \tag{3.2.2}$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\left(w'^2 - y'^2\right)}}(0, w', y'\sinh v\,, y'\cosh v), \tag{3.2.3}$$

$$\begin{aligned} N_2 \ = & \frac{1}{\sqrt{\epsilon W(w'^2 - y'^2)}}(w(w'^2 - y'^2),\ x'y'w, x'ww'\sinh v - \lambda(w'^2 - y'^2)\cosh v \\ & x'ww'\cosh v\ - \lambda(w'^2 - y'^2)\sinh v) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

olarak seçilebilir. Burada $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle$ ve $\epsilon = \pm 1$ için $\langle N_1, N_1\rangle = -\langle N_2, N_2\rangle = \epsilon$ şeklindedir.

Gerekli hesaplamalar yapılarak, X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyine ait ikinci temel form katsayıları:

$$b_{11}^1 = \frac{y''w' - y'w''}{\sqrt{\epsilon\left(w'^2 - y'^2\right)}},\ \ b_{12}^1 = b_{21}^1 = 0,\ \ b_{22}^1 = -\frac{wy'}{\sqrt{\epsilon\left(w'^2 - y'^2\right)}}, \tag{3.2.5}$$

$$b_{11}^2 = \frac{w(x'(y'y''-w'w'')+x''(w'^2-y'^2))}{\sqrt{\epsilon W\left(w'^2-y'^2\right)}},\ b_{12}^2 = b_{21}^2 = -\frac{\epsilon\lambda w'\sqrt{\epsilon\left(w'^2-y'^2\right)}}{\sqrt{W}},$$

$$b_{22}^2 = -\frac{x'w^2w'}{\sqrt{\epsilon W\left(w'^2-y'^2\right)}}$$

şeklinde elde edilir. İkinci temel form katsayıları göz önünde bulundurularak, X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyinin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i{}^{X_{2a}}$ (i = 1,2) sırasıyla,

$$H_1^{X_{2a}} = \frac{1}{2W\sqrt{\epsilon\left(w'^2-y'^2\right)}}\Big((w^2+\lambda^2)(y''w'-y'w'')-wy'\left(x'^2+y'^2-w'^2\right) \tag{3.2.6}$$

ve

$$\begin{aligned} H_2^{X_{2a}} &= \frac{1}{2W^{3/2}\sqrt{\epsilon(w'^2-y'^2)}}(x'w'(2\lambda^2+w^2)(w'^2-y'^2)-w^2w'x'^3 \\ &\quad +w(w^2+\lambda^2)(x''(w'^2-y'^2)+x'(y'y''-w'w''))) \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2.5)'deki eşitlikler kullanılarak, X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyinin Gauss eğriliği $K^{X_{2a}}$,

$$\begin{aligned} K^{X_{2a}} &= \frac{1}{W^2}(w^3\left(x'\left(x''w'-x'w''\right)+y'\left(y''w'-y'w''\right)\right) \\ &\quad +\lambda^2\left(wy'\left(y''w'-y'w''\right)+w'^2(w'^2-y'^2)\right)) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

olarak hesaplanır.

X_1 uzaysal helikoidal yüzeye benzer şekilde X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeye Bour teoremine göre izometrik olan dönel yüzeyler aşağıdaki teorem yardımıyla belirlenecektir.

Teorem 3.2.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) ile verilen X_{2a} uzaysal helikoidal aşağıdaki uzaysal dönel yüzeylerden birine izometriktir:

i)

$$R_{2a}^{1}(u,v)=\begin{bmatrix}\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\cos\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du\right)\\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\sin\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du\right)\\ \int\frac{a(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du\\ \int\frac{b(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du\end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

öyleki, X_{2a} uzaysal helikoidal yüzey üzerindeki helisler, R_{2a}^{1} uzaysal dönel yüzey üzerindeki parallel çemberlere karşılık gelir. Burada $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)-b^2(u)=\frac{\left(\lambda^2+2w^2(u)\right)\left(y'^2(u)-w'^2(u)\right)+w^2(u)\left(x'^2(u)-y'^2(u)\right)}{w^2(u)w'^2(u)} \tag{3.2.10}$$

ii)

$$R_{2a}^{2}(u,v)=\begin{bmatrix}\int\frac{a(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du\\ \int\frac{b(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du\\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\sinh\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du\right)\\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\cosh\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du\right)\end{bmatrix} \tag{3.2.11}$$

öyleki, X_{2a} uzaysal helikoidal yüzey üzerindeki helisler, R_{2a}^{2} uzaysal dönel yüzey üzerindeki parallel hiperbollere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)+b^2(u)=\frac{w^2(u)\left(x'^2(u)+y'^2(u)\right)+\lambda^2\left(y'^2(u)-w'^2(u)\right)}{w^2(u)w'^2(u)}. \tag{3.2.12}$$

Burada, her $u\in I\subset\mathbb{R}$ için $w'(u)\neq 0$ dır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) denklemi ile verilen X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyi ele alınsın. (3.2.1) denklemi kullanılarak X_{2a} helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds_{X_{2a}}^2=\left(x'^2(u)+y'^2(u)-w'^2(u)\right)du^2-2\lambda x'(u)dudv+(w^2(u)+\lambda^2)dv^2 \tag{3.2.13}$$

şeklindedir. X_{2a} helikoidal yüzeyi üzerinde helislere ortogonal olan v-parametreli bir eğri yardımıyla

$$\lambda x'(u)du + (w^2(u) + \lambda^2)dv = 0 \tag{3.2.14}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca (3.2.14) denklemi çözülürse;

$$v = c_1 - \int \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u) + \lambda^2} du \tag{3.2.15}$$

elde edilir. Burada c_1 keyfi sabittir. Burada c_1 yerine $\bar{v}$ alınarak

$$\bar{v} = v + \int \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u) + \lambda^2} du \tag{3.2.16}$$

bulunur. (3.2.16) denkleminin her iki tarafının *u* ya göre türevi alınarak

$$dv = d\bar{v} - \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u) + \lambda^2} du \tag{3.2.17}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.17)'deki eşitlik (3.2.13) denkleminde yerine yazılarak X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$ds^2_{X_{2a}} = (x'^2(u) + y^2(u) - w'^2(u) - \frac{\lambda^2 x'^2(u)}{w^2(u)+\lambda^2})du^2 + (w^2(u) + \lambda^2)d\bar{v}^2. \tag{3.2.18}$$

X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyine izometrik dönel yüzeyleri bulmak için aşağıdaki durumlar verilir.

I. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, yer vektörü (3.1.19) denklemi ile verilen R_1 uzaysal dönel yüzeyinin indirgenmiş metriği (3.1.20) denkleminde verilmiştir. Burada $n(k) > 0$'dır. (3.2.18) denklemi ve (3.1.20) denklemi karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $n(k) = \sqrt{w^2(u) + \lambda^2}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k) + \dot{s}^2(k) - \dot{r}^2(k)\right)dk^2 = (x'^2(u) + y'^2(u) - w'^2(u) - \frac{\lambda^2 x'^2(u)}{w^2(u) + \lambda^2})du^2 \tag{3.2.19}$$

şeklinde alınarak X_{2a} ve R_1 yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u) = \frac{s'(u)}{n'(u)}$ ve $b(u) = \frac{r'(u)}{n'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (3.2.19) denkleminden (3.2.10) eşitliği elde edilir. Böylece

$$s(u)=\int \frac{a(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du \text{ ve } r(u)=\int \frac{b(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du \tag{3.2.20}$$

bulunur. Sonuç olarak (3.2.9) denklemi ile verilen uzaysal dönel yüzey R_{2a}^1, (2.15) ile verilen uzaysal helikoidal yüzey X_{2a}'ya Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_{2a} helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_{2a}(u_0,v)$ olacak şekilde bir helis ele alalım. X_{2a} helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_{2a}(u_0,v)$ helisleri, R_{2a}^1 dönel yüzeyi üzerindeki paralel çemberlere karşılık gelir. Bu çemberler, c_3 ve c_4 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_3=c_3,\ x_4=c_4\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{w_0^2+\lambda^2}$ yarıçaplı çemberlerdir ve parametrizasyonu $R_{2a}^1(u_0,v)=\left(\sqrt{w_0^2+\lambda^2}\cos v\,,\sqrt{w_0^2+\lambda^2}\sin v\,,c_3,c_4\right)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

II. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, yer vektörü (3.1.23) denklemi ile verilen R_2 uzaysal dönel yüzeyinin indirgenmiş metriği (3.1.24) denkleminde verilmiştir. Burada $r(k)>0$'dır. (3.2.18) ve (3.1.24) denklemleri karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $r(k)=\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k)+\dot{s}^2(k)-\dot{r}^2(k)\right)dk^2=(x'^2(u)+y'^2(u)-w'^2(u)-\frac{\lambda^2x'^2(u)}{w^2(u)+\lambda^2})du^2 \tag{3.2.21}$$

şeklinde alınarak X_{2a} ve R_2 yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u)=\frac{n'(u)}{r'(u)}$ ve $b(u)=\frac{p'(u)}{r'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (3.2.21) denkleminden (3.2.12) eşitliği elde edilir.

Böylece

$$n(u)=\int \frac{a(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du \text{ ve } p(u)=\int \frac{b(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du \tag{3.2.22}$$

bulunur. Sonuç olarak (3.2.11) denklemi ile verilen uzaysal dönel yüzey R_{2a}^2, (2.15) ile verilen uzaysal helikoidal yüzey X_{2a}'ya Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_{2a}(u_0,v)$ olacak şekilde bir helis ele alalım. X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_{2a}(u_0,v)$ helisleri, R_{2a}^2 dönel yüzeyi üzerindeki paralel hiperbollere karşılık gelir. Bu hiperboller, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_1=c_1,\ x_2=c_2\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{w_0^2+\lambda^2}$ yarıçaplı hiperbollerdir ve

parametrizasyonu $R_{2a}^2(u_0,v)=\left(c_1,c_2,\sqrt{w_0^2+\lambda^2}\sinh v\,,\sqrt{w_0^2+\lambda^2}\cosh v\right)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

Teorem 3.2.1'de (3.2.11) denklemi ile verilen R_{2a}^2 uzaysal dönel yüzeyinin normallerini ve ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri aşağıdaki lemma yardımıyla bulunur.

Lemma 3.2.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (3.2.11) denkleminde verilen R_{2a}^2 uzaysal dönel yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i^{R_{2a}^2}$ $(\mathrm{i}=1,2)$, sırasıyla

$$H_1^{R_{2a}^2}=\frac{b'(w^2+\lambda^2)-bww'(a^2+b^2-1)}{2ww'(a^2+b^2-1)\sqrt{(1-b^2)(w^2+\lambda^2)}} \tag{3.2.23}$$

ve

$$H_2^{R_{2a}^2}=\frac{(w^2+\lambda^2)(a'(1-b^2)-abb')-aww'(a^2+b^2-1)}{2ww'\sqrt{(1-b^2)(w^2+\lambda^2)(a^2+b^2-1)^3}} \tag{3.2.24}$$

şeklindedir. Ayrıca R_{2a}^2 uzaysal dönel yüzeyin N_1 ve N_2 normal vektörleri:

$$N_1=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}(0,1,b\sinh\mu\,,b\cosh\mu) \tag{3.2.25}$$

ve

$$N_2=\frac{1}{\sqrt{(1-b^2)(a^2+b^2-1)}}(1-b^2,ab,a\sinh\mu\,,a\cosh\mu) \tag{3.2.26}$$

dir. Burada $\mu=v+\int\frac{\lambda x\prime(u)}{w^2+\lambda^2}du$ şeklindedir.

İspat. Lemma 3.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.2.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$ standart ortonormal baz ve $i,j=1,2,3,4$ için $\eta_{ij}=\eta_i\wedge\eta_j$ olmak üzere (2.15) , (3.2.9) ve (3.2.11) denklemleri ile verilen X_{2a}, R_{2a}^1 ve R_{2a}^2 uzaysal yüzeylerin Gauss tasvirleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\nu_{X_{2a}}=&\frac{1}{\sqrt{W}}(-\lambda y'\eta_{12}+(x'\,\mathrm{wcosh}\,v-\lambda w'\sinh v)\eta_{13}+(x'\,\mathrm{wsinh}\,v\\&-\lambda w'\cosh v)\eta_{14}+y'w\cosh v\,\eta_{23}+y'w\sinh v\,\eta_{24}-ww'\eta_{34}),\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

$$\nu_{R_{2a}^1}=\frac{ww'}{\sqrt{W}}(\eta_{12}+a\sin\mu\,\eta_{13}+b\sin\mu\,\eta_{14}-a\cos\mu\,\eta_{23}-b\cos\mu\,\eta_{24}) \tag{3.2.28}$$

ve

$$\nu_{R_{2a}^2} = \frac{ww'}{\sqrt{W}}(a\cosh\mu\,\eta_{13} + a\sinh\mu\,\eta_{14} + b\cosh\mu\,\eta_{23} + b\sinh\mu\,\eta_{24} - \eta_{34}) \qquad (3.2.29)$$

şeklinde bulunur. Burada $\mu = v + \int \frac{\lambda x\prime(u)}{w^2+\lambda^2} du$ şeklindedir.

İspat. Teorem 3.1.2.'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi (2.15) ve (3.2.11) denklemleri ile verilen X_{2a} ve R_{2a}^2 izometrik yüzeylerinin aynı Gauss tasvirine sahip olmaları durumunda aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.2.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) denklemi ile verilen X_{2a} uzaysal helikoidal yüzey ve (3.2.11) denklemi ile verilen uzaysal dönel yüzey R_{2a}^2 eğer aynı Gauss tasvirine sahip ise, bu yüzeyler hiperdüzlemsel ve minimaldir. Bu durumda, X_{2a} ve R_{2a}^2'nın parametrizasyonları,

$$X_{2a}(u,v) = (x(u) + \lambda v\,, c_1, w(u)\sinh v\,, w(u)\cosh v) \qquad (3.2.30)$$

ve

$$R_{2a}^2(u,v) = \begin{bmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{-c_3}}\sin^{-1}\sqrt{-c_3(w^2(u)+\lambda^2)} + c_4 \\ c_2 \\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\sinh\left(v + \int \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2} du\right) \\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\cosh\left(v + \int \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2} du\right) \end{bmatrix} \qquad (3.2.31)$$

elde edilir. Burada, $-\frac{1}{\lambda^2} < c_3 < 0$ olmak üzere, c_1, c_2, c_3, c_4 keyfi sabitler ve

$$x(u) = \pm\left(\sqrt{\frac{1+c_3\lambda^2}{-c_3}}\sin^{-1}\sqrt{1+c_3(w^2(u)+\lambda^2)} + \lambda\tanh^{-1}\sqrt{\frac{\lambda^2(1+c_3(w^2(u)+\lambda^2))}{(1+c_3\lambda^2)(w^2(u)+\lambda^2)}}\right)$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_{2a} uzaysal helikoidal yüzey ve R_{2a}^2 uzaysal dönel yüzeyin Gauss tasvirlerini sırasıyla (3.2.27) ve (3.2.29) verilmiştir. Bu denklemleri karşılaştırarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\lambda y'(u) = 0, \tag{3.2.32}$$

$$x'(u)w(u)\cosh v - \lambda w'(u)\sinh v = a(u)w(u)w'(u)\cosh \mu, \tag{3.2.33}$$

$$x'(u)w(u)\sinh v - \lambda w'(u)\cosh v = a(u)w(u)w'(u)\sinh \mu, \tag{3.2.34}$$

$$y'(u)w(u)\cosh v = b(u)w(u)w'(u)\cosh \mu, \tag{3.2.35}$$

$$y'(u)w(u)\sinh v = b(u)w(u)w'(u)\sinh \mu. \tag{3.2.36}$$

(3.2.32) denkleminden $\lambda \neq 0$ olduğundan $y'(u) = 0$ olur. Ayrıca (3.2.35) ve (3.2.36) denklemlerinden $b(u) = 0$ bulunur. Böylece X_{2a} ve R^2_{2a} hiperdüzlemseldir. Yani X_{2a} ve R^2_{2a} yüzeyleri $\mathbb{E}^3_1$ uzayına indirgenir. (3.2.6) ve (3.2.23) denklemlerinden $H_1^{X_{2a}} = 0$ ve $H_1^{R^2_{2a}} = 0$ bulunur. Ayrıca,

$$H_2^{X_2} = \frac{x'w'^2(2\lambda^2 + w^2) - w^2x'^3 + w(w^2+\lambda^2)(x''w' - x'w'')}{2\left(w^2x'^2 - w'^2(w^2+\lambda^2)\right)} \tag{3.2.37}$$

ve

$$H_2^{R^2_{2a}} = \frac{a'(w^2+\lambda^2) - aww'(a^2-1)}{2ww'\sqrt{(w^2+\lambda^2)(a^2-1)^3}} \tag{3.2.38}$$

eşitlikler elde edilir. Diğer taraftan (3.2.12) denklemini kullanarak

$$a^2 = \frac{w^2x'^2 - \lambda^2w'^2}{w^2w'^2} \tag{3.2.39}$$

bulunur. (3.2.39) denklemini (3.2.38)'te yerine yazılarak

$$H_2^{R^2_{2a}} = \frac{w^2x'\left(x'w'^2(2\lambda^2+w^2) - w^2x'^3 + w(w^2+\lambda^2)(x''w' - x'w'')\right)}{2\left(w^2x'^2 - w'^2(w^2+\lambda^2)\right)^{3/2}\sqrt{(w^2+\lambda^2)(w^2x'^2 - \lambda^2w'^2)}} \tag{3.2.40}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2.33) ve (3.2.34) denklemleri kullanılarak

$$x'(u)w(u) = a(u)w(u)w'(u)\cosh\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{w^2+\lambda^2}du\right) \tag{3.2.41}$$

ve

$$\lambda w'(u) = -a(u)w(u)w'(u)\sin\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{w^2+\lambda^2}du\right) \tag{3.2.42}$$

elde edilir. (3.2.41) ve (3.2.42) denklemleri karşılaştırılarak

$$-\frac{x'(u)w(u)}{\lambda w'(u)} = \coth\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{w^2+\lambda^2}du\right) \tag{3.2.43}$$

olarak bulunur. (3.2.43) denklemini u'ya göre türevi alındığında

$$x'w'^2(2\lambda^2+w^2)-x'^3w^2+w(w^2+\lambda^2)(x''w'-x'w'')=0 \tag{3.2.44}$$

elde edilir. Buradan $H_2^{X_{2a}}=H_2^{R_{2a}^2}=0$ bulunur. Böylece X_{2a} ve R_{2a}^2 yüzeyleri minimaldir. X_{2a} ve R_{2a}^2 yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduklarında yüzeylerin parametrizasyonları bulunur. Eğer R_{2a}^2 yüzeyi minimal ise, (3.2.38) denkleminden

$$(w^2(u)+\lambda^2)a'(u)+w(u)w'(u)a(u)=w(u)w'(u)a^3(u) \tag{3.2.45}$$

Bernoulli diferansiyel denklemi elde edilir. (3.2.45) denklemi çözülerek

$$a^2=\frac{1}{1+c_3(w^2+\lambda^2)} \tag{3.2.46}$$

bulunur. Burada c_3 keyfi sabittir. Son olarak (3.2.39) ve (3.2.46) denklemleri karşılaştırılarak

$$x(u)=\pm\sqrt{1+c_3\lambda^2}\int\frac{w'(u)}{w(u)}\sqrt{\frac{w^2+\lambda^2}{1+c_3(w^2+\lambda^2)}}\,du \tag{3.2.47}$$

elde edilir. Burada $-\frac{1}{\lambda^2}<c_3<0$ şeklindedir. Ayrıca R_{2a}^2 yüzeyinin son bileşeni

$$\int\frac{w(u)w'(u)}{\sqrt{(w^2+\lambda^2)\big(1+c_3(w^2+\lambda^2)\big)}}\,du=\pm\frac{1}{\sqrt{-c_3}}\sin^{-1}\sqrt{-c_3(w^2(u)+\lambda^2)}+c_4 \tag{3.2.48}$$

şeklinde bulunur. Burada c_4 keyfi sabittir. Böylece istenen sonuç bulunur. Ikawa (2001) $\mathbb{E}_1^3$ uzayında izometrik yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduğu yüzeyleri belirlemiştir. Eğer Teorem 3.2.3'te verilen izometrik yüzeylerde $w(u)=u$ alınırsa, Ikawa (2001)'nın elde ettiği yüzeyler ile çakıştığı görülür. (2.15) denklemiyle verilen X_{2a} helikoidal yüzeyinde eğer $x'(u)=0$ alınırsa, X_{2a} helikoidal yüzeyi dik helikoidal yüzeyine indirgenir. Ayrıca bu duruma ilaveten yüzeylerin aynı Gauss tasviri altında $W<0$ elde edilir. Yani hem profil eğrisi hemde helikoidal yüzey zamansal olur. Sonuç olarak $x'(u)=0$ olduğunda yüzeylerin Gauss tasvirleri birbirinden farklıdır.

Teorem 3.2.4. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) denklemi ile verilen X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyi ve (3.2.9) denklemi ile verilen R_{2a}^1 uzaysal dönel yüzeylerinin Gauss tasviri birbirinden farklıdır.

İspat. X_{2a} ve R_{2a}^1 yüzeylerin sırasıyla (3.2.27) ve (3.2.28) denklemlerinde Gauss tasvirleri elde edilmiştir. Bu yüzeylerin Gauss tasvirlerini karşılaştırarak $w(u) = 0$ veya $w'(u) = 0$ bulunur. Böylece $\nu_{R_{2a}^1} = 0$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla X_{2a} ve R_{2a}^1 yüzeylerinin Gauss tasvirleri birbirinden farklıdır.

Şimdi izometrik yüzeylerin aynı Gauss eğriliklerine sahip olduklarını (yani Gauss Egregium teoremini sağladıklarını) aşağıdaki teorem yardımıyla gösterilir.

Teorem 3.2.5. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) denklemiyle verilen X_{2a} uzaysal helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği sırasıyla (3.2.9) denklemiyle verilen R_{2a}^1 uzaysal dönel yüzeyin ve (3.2.11) denklemiyle verilen R_{2a}^2 uzaysal dönel yüzeyin Gauss eğrilikleri aynıdır.

İspat. Teorem 3.1.5'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Son olarak, Teorem 3.2.3'ü kullanarak, izometrik ve aynı Gauss tasvirine sahip olan yüzeyler için bir örnek verilecektir.

Örnek 3.2.1. Teorem 3.2.3'te verilen X_{2a} ve R_{2a}^2 yüzeylerini ele alalım. Eğer $w(u) = u$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $c_3 = -2$ ve $c_4 = 0$ alınırsa, bu yüzeylerin parametrizasyonları;

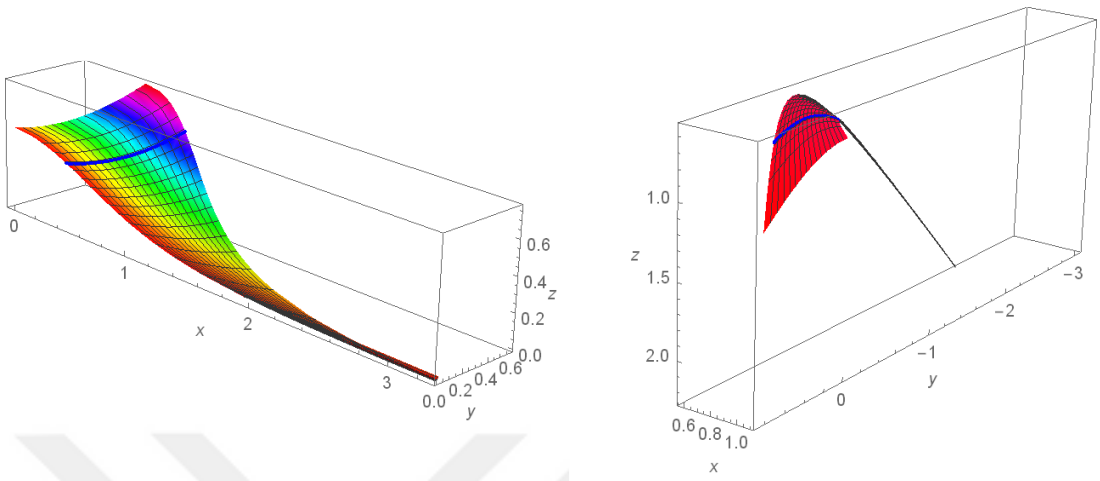
$$X_{2a}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-4u^2}{2}} + \tanh^{-1}\sqrt{\frac{1-4u^2}{1+4u^2}} + v \right) \\ c_1 \\ u\sinh v \\ u\cosh v \end{bmatrix} \tag{3.2.49}$$

ve

$$R_{2a}^2(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{1+4u^2}{2}} \\ c_2 \\ \sqrt{\frac{1+4u^2}{4}}\sinh\left(v - \frac{1}{2}\tanh^{-1}\sqrt{1-16u^4} \right) \\ \sqrt{\frac{1+4u^2}{4}}\cosh\left(v - \frac{1}{2}\tanh^{-1}\sqrt{1-16u^4} \right) \end{bmatrix} \tag{3.2.50}$$

şeklindedir. Wolfram Mathematica 10.4 proramını kullanarak, $0 \le u < \frac{1}{2}$ ve $0 \le v \le 1$ aralıkları için, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında uzaysal helikoidal yüzey X_{2a} ve uzaysal dönel yüzey R_{2a}^2'in

grafikleri aşağıdaki şekilde çizilir.



(a) (b)

Şekil 3.2.1 (a) IIa. tip uzaysal helikoidal yüzey; helis (b) uzaysal dönel yüzey; hiperbol.

3.3. Minkowski Uzay-Zamanda III. Tip Uzaysal Helikoidal Yüzey

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, (2.17) denklemiyle verilen III. tip helikoidal yüzey X_3'ün parametrik denkleminin sırasıyla u ve v'ye göre kısmi türevleri alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$X_{3_u} = \left(x'(u)\eta_1 + \sqrt{2}vw'(u)\eta_2 + \left(z'(u) + v^2w'(u)\right)\xi_3 + w'(u)\xi_4\right)$$

ve

$$X_{3_v} = \sqrt{2}w(u)\eta_2 + 2vw(u)\xi_3.$$

Böylece helikoidal yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$g_{11} = x'^2(u) - 2w'(u)z'(u), \quad g_{12} = -\lambda w'(u) \text{ ve } g_{22} = 2w^2(u) \tag{3.3.1}$$

şeklinde elde edilir. X_3 helikoidal yüzeyin uzaysal olması için her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W = 2w^2(u)\left(x'^2(u) - 2w'(u)z'(u)\right) + \lambda^2 w'^2(u) > 0$ olmalıdır.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında e_1 ve e_2 vektörleri X_3'e teğet ve N_1, N_2 vektörleri X_3'e normal olacak şekilde X_3 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerinde tanımlı $\{e_1, e_2, N_1, N_2\}$ şeklinde yönlendirilmiş bir ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}X_{3_u}, \; e_2 = \frac{1}{\sqrt{W g_{11}}}\left(g_{11}X_{3_v} - g_{12}X_{3_u}\right), \tag{3.3.2}$$

$$N_1 = \eta_1 + \frac{x'}{w'}\xi_3, \tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned} N_2 \; &= \frac{1}{w'\sqrt{W}}(\sqrt{2}\,x'ww'\eta_1 + \left(\lambda w'^2 + 2vww'^2\right)\eta_2 \\ &\quad + \sqrt{2}\left(\lambda vw'^2 + v^2ww'^2 + wx'^2 - ww'z'\right)\xi_3 + \sqrt{2}ww'^2\xi_4) \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

olarak seçilebilir. Burada $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle N_1, N_1\rangle = -\langle N_2, N_2\rangle = 1$ şeklindedir. Gerekli hesaplamalar yapılarak, X_3 uzaysal helikoidal yüzeyine ait ikinci temel form katsayıları:

$$\begin{aligned} &b_{11}^1 = \frac{x''w' - x'w''}{w'}, \quad b_{12}^1 = b_{21}^1 = b_{22}^1 = 0, \; b_{11}^2 = \\ &\frac{\sqrt{2}w(x'x''w' - x'^2w'' + w'(w''z' - w'z''))}{w'\sqrt{W}}, \; b_{12}^2 = \; b_{21}^2 = \frac{\sqrt{2}\lambda w'^2}{\sqrt{W}}, \; b_{22}^2 = -\frac{2\sqrt{2}w^2w'}{\sqrt{W}} \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

şeklinde elde edilir. İkinci temel form katsayıları göz önünde bulundurularak, X_3 uzaysal helikoidal yüzeyinin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i{}^{X_3}$ $(\mathrm{i}=1,2)$ sırasıyla,

$$H_1^{X_3}=\frac{1}{w'W}(x''w'-x'w'') \tag{3.3.6}$$

ve

$$\begin{aligned} H_2^{X_3} &= \frac{\sqrt{2}}{w'W^{3/2}}(\lambda^2 w'^4+2w^2w'^3z'-w^3x'^2w''+w^3w'(z'w''+x'x'') \\ &\quad -w^2w'^2(x'^2+wz'')) \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

elde edilir. Ayrıca (3.3.5)'deki eşitlikler kullanılarak, X_3 uzaysal helikoidal yüzeyinin Gauss eğriliği K^{X_3},

$$K^{X_3}=\frac{1}{W^2}\left(2\lambda^2w'^4-4w^3(x'^2w''+w'(w''z'-w'z''+x'x''))\right) \tag{3.3.8}$$

olarak hesaplanır.

X_1 uzaysal helikoidal yüzeye benzer şekilde X_3 uzaysal helikoidal yüzeye Bour teoremine göre izometrik olan dönel yüzey aşağıdaki teorem yardımıyla belirlenecektir.

Teorem 3.3.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.17) ile verilen X_3 uzaysal helikoidal yüzey aşağıdaki R_3 uzaysal dönel yüzeye izometriktir:

$$\begin{aligned} R_3(u,v) &= \int a(u)w'(u)du\eta_1+\sqrt{2}w(u)\left(v+\frac{\lambda}{2w(u)}\right)\eta_2 \\ &\quad +\left(\int b(u)w'(u)du+w(u)\left(v+\frac{\lambda}{2w(u)}\right)^2\right)\xi_3+w(u)\xi_4 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

öyleki, X_3 uzaysal helikoidal yüzey üzerindeki helisler, R_3 uzaysal dönel yüzey üzerindeki parallel parabollere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)-2b(u)=\frac{x'^2(u)-2w'(u)z'(u)}{w'^2(u)}-\frac{\lambda^2}{2w^2(u)} \tag{3.3.10}$$

Burada, her $u\in I\subset\mathbb{R}$ için $w'(u)\neq 0$ dır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.17) denklemi ile verilen X_3 uzaysal helikoidal yüzey ele alınsın. (3.3.1) denklemi kullanılarak X_3 uzaysal helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds_{X_3}^2=\left(x'^2(u)-2w'(u)z'(u)\right)du^2-2\lambda w'(u)dudv+2w^2(u)dv^2 \tag{3.3.11}$$

şeklindedir. X_3 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerinde helislere ortogonal olan v-parametreli bir eğri yardımıyla

$$\lambda w'(u)du - 2w^2(u)dv = 0 \tag{3.3.12}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca (3.3.12) denklemi çözülürse;

$$v = c_1 - \frac{\lambda}{2w(u)} \tag{3.3.13}$$

elde edilir. Burada c_1 keyfi sabittir. Burada c_1 yerine $\bar{v}$ alınarak

$$v = \bar{v} - \frac{\lambda}{2w(u)} \tag{3.3.14}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının *u* ya göre türevini alınarak;

$$dv = d\bar{v} + \frac{\lambda w'(u)}{2w^2(u)}du \tag{3.3.15}$$

eşitliği elde edilir. (3.3.15)'deki eşitlik (3.3.11) denkleminde yerine yazılarak X_3 helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$ds^2_{X_3} = \left(x'^2(u) - 2w'(u)z'(u) - \frac{\lambda^2 w'^2(u)}{2w^2(u)}\right)du^2 + 2w^2(u)d\bar{v}^2. \tag{3.3.16}$$

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında yer vektörü aşağıdaki şekilde verilen R_3 uzaysal dönel yüzeyi göz önüne alınsın.

$$R_3(k,t) = n(k)\eta_1 + \sqrt{2}tr(k)\eta_2 + \left(\mathrm{s(k)} + \mathrm{t}^2 r(k)\right)\xi_3 + r(k)\xi_4. \tag{3.3.17}$$

Bu yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds^2_{R_3} = \left(\dot{n}^2(k) - 2\dot{r}(k)\dot{s}(k)\right)dk^2 + 2r^2(k)dt^2 \tag{3.1.18}$$

şeklindedir. Burada dönel yüzey uzaysal olduğu için $\dot{n}^2(k) - 2\dot{r}(k)\dot{s}(k) > 0$'dır. Bu durumda (3.3.16) denklemi ve (3.3.18) denklemi karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $r(k) = w(u)$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k) - 2\dot{r}(k)\dot{s}(k)\right)dk^2 = \left(x'^2(u) - 2w'(u)z'(u) - \frac{\lambda^2 w'^2(u)}{2w^2(u)}\right)du^2 \tag{3.3.19}$$

şeklinde alınarak X_3 ve R_3 yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u)=\frac{n'(u)}{r'(u)}$ ve $b(u)=\frac{s'(u)}{r'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (3.3.19) denkleminden (3.3.10) eşitliği elde edilir. Böylece

$$n(u)=\int a(u)w'(u)du \text{ ve } s(u)=\int b(u)w'(u)du \tag{3.3.20}$$

bulunur. Sonuç olarak (3.3.9) denklemi ile verilen uzaysal dönel yüzey R_3, (2.17) ile verilen uzaysal helikoidal yüzey X_3'e Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_3 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_3(u_0,v)$ olacak şekilde bir helis ele alınsın. X_3 uzaysal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_3(u_0,v)$ helisleri, R_3 uzaysal dönel yüzeyi üzerindeki paralel parabollere karşılık gelir. Bu parabollerin oluşturduğu eğri, $R_3(u_0,v)=\sqrt{2}w_0\left(v+\frac{\lambda}{2w_0}\right)\eta_2+w_0\left(v+\frac{\lambda}{2w_0}\right)^2\xi_3+w_0\xi_4$ şeklindedir. Eğer $t=v+\frac{\lambda}{2w_0}$ alınırsa bu eğrinin yeni parametrizasyonu $\alpha(t)=\sqrt{2}w_0\left(0,t,-\frac{t^2}{2},\frac{t^2}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,w_0,w_0)$ elde edilir (Kaya ve Lopez, 2022).

Teorem 3.3.2 $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\{\eta_1,\eta_2,\xi_3,\xi_4\}$ standart ortonormal baz olmak üzere (2.13) ve (3.3.9) denklemleri ile verilen X_3 ve R_3 uzaysal yüzeylerin Gauss tasvirleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\nu_{X_3} &= \tfrac{1}{\sqrt{W}}(\sqrt{2}x'w\eta_1\wedge\eta_2+x'(\lambda+2vw)\eta_1\wedge\xi_3\\ &\quad+\sqrt{2}(v^2ww'-wz'+\lambda vw')\eta_2\wedge\xi_3-\sqrt{2}ww'\eta_2\wedge\xi_4-w'(\lambda+2vw)\xi_3\wedge\xi_4\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu_{R_3} &= \frac{1}{\sqrt{W}}(\sqrt{2}aww'\eta_1\wedge\eta_2+2aww'(v+\frac{\lambda}{2w})\eta_1\wedge\xi_3+\sqrt{2}ww'((v+\frac{\lambda}{2w})^2\\ &\quad-b)\eta_2\wedge\xi_3-\sqrt{2}ww'\eta_2\wedge\xi_4-ww'\left(2v+\frac{\lambda}{w}\right)\xi_3\wedge\xi_4\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

şeklinde bulunur.

İspat. Teorem 3.1.2'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.3.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.17) denklemi ile verilen X_3 uzaysal helikoidal yüzey ve (3.3.9) denklemi ile verilen uzaysal dönel yüzey R_3'ün Gauss tasvirleri aynıdır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_3 uzaysal helikoidal yüzey ve R_3 uzaysal dönel yüzeyin Gauss tasvirleri sırasıyla (3.3.21) ve (3.3.22)'te verilmiştir. Bu denklemler karşılaştırarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x'(u) = a(u)w'(u), \tag{3.3.23}$$

$$x'(u)(\lambda + 2vw(u)) = 2a(u)w(u)w'(u)\left(v + \frac{\lambda}{2w(u)}\right), \tag{3.3.24}$$

$$w(u)z'(u) = b(u)w(u)w'(u) - \frac{\lambda^2 w'(u)}{4w(u)}. \tag{3.3.25}$$

(3.3.23) ve (3.3.25) denklemlerinden $a(u)$ ve $b(u)$ elde edilir. Eğer bu fonksiyonlar (3.3.10) denkleminde yerine yazılırsa yüzeylerin aynı Gauss tasvirlerine sahip olduğu bulunur.

Şimdi izometrik yüzeylerin aynı Gauss eğriliklerine sahip olduklarını (yani Gauss Egregium teoremini sağladıklarını) aşağıdaki teorem yardımıyla gösterilir.

Teorem 3.3.4. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.17) denklemiyle verilen X_3 uzaysal helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği ve (3.3.9) denklemiyle verilen R_3 uzaysal dönel yüzeyin Gauss eğriliği aynıdır.

İspat. Teorem 3.1.5.'nın ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Açıklama 3.3.1 Her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için, $w'(u) = 0$ ise (2.17) denklemi ile verilen X_3 uzaysal helikoidal yüzey

$$X_3(u,v) = x(u)\eta_1 + \sqrt{2}vw_0\eta_2 + (z(u) + v^2w_0 + \lambda v)\xi_3 + w_0\xi_4 \tag{3.3.26}$$

şeklinde olur. X_3 helikoidal yüzeyi $\{\eta_1, \eta_2, \xi_3\}$ vektörleri tarafından gerilen dejenere hiperdüzlemde yatar. X_3 yüzeyinin ξ_3 normal vektörü boyunca olan şekil operatörü $A_\xi = 0$ dır. Böylece, X_3 yüzeyi $x(u,v) = \big(u, v, \phi(u,v), \phi(u,v)\big)$ yüzeyine denktir. Burada, Ω, $\mathbb{R}^2$'nin bir açık alt kümesi olmak üzere, $\phi: \Omega \to \mathbb{R}$ düzgün bir fonksiyondur (Cabrerize , Fermandez ve Gomez, 2010; Turgay, 2014). Bu tez çalışmasında, bu durumla ilgilenilmemiştir.

Son olarak, Teorem 3.3.1'i kullanarak aşağıdaki örnek verilecektir.

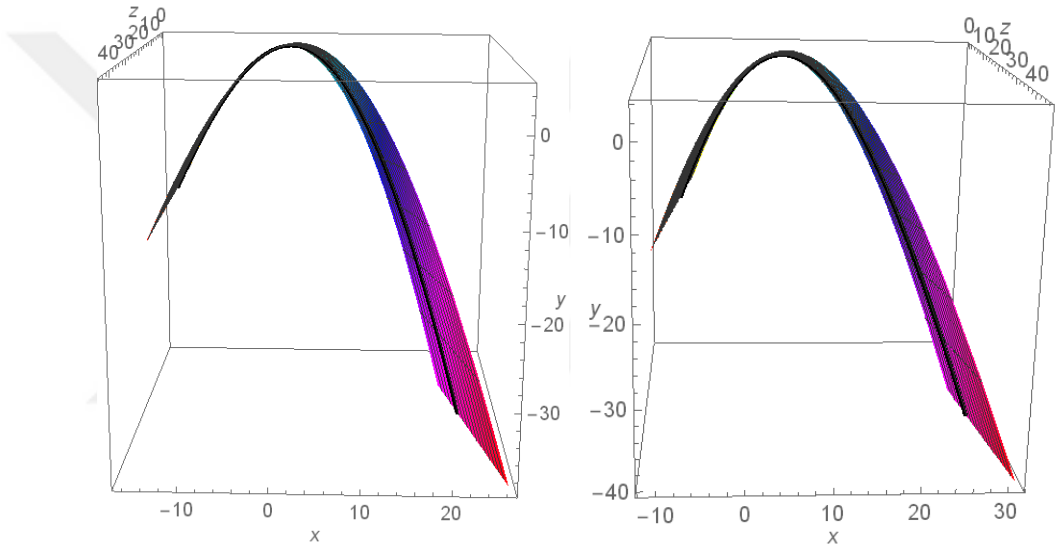
Örnek 3.3.1. Teorem 3.3.1'de verilen X_3 ve R_3 yüzeylerini ele alınsın. Eğer $x(u) = w(u) = u$, $\lambda = 5$, ve $c_4 = 0$ alınırsa, bu yüzeylerin parametrizasyonları;

$$X_3(u,v) = u\eta_1 + \sqrt{2}uv\eta_2 + (c_1 + uv^2 + 5v)\xi_3 + u\xi_4 \tag{3.2.27}$$

ve

$$R_3(u,v) = \left(\frac{\sqrt{2u^2-25}+5\tan^{-1}\frac{5}{\sqrt{2u^2-25}}}{\sqrt{2}}\right)\eta_1 + \sqrt{2}u\left(v+\frac{5}{2u}\right)\eta_2 + \left(c_2 + u\left(v+\frac{5}{2u}\right)^2\right)\xi_3 + u\xi_4 \tag{3.2.28}$$

şeklinde elde edilir. $\mathbb{E}_1^3$ uzayında uzaysal helikoidal yüzey X_3 ve uzaysal dönel yüzey $R_3{}'$ün grafikleri Wolfram Mathematica 10.4 proramı kullanarak ve $ParametricPlot3D[\{x(u,v)+y(u,v), z(u,v), w(u,v)\}, \{u, 3.6, 5\}, \{v, -3, 3\}]$ komutu yardımıyla aşağıdaki şekilde çizilir.



(a) (b)

Şekil 3.3.1 (a) III. tip uzaysal helikoidal yüzey; helis (b) uzaysal dönel yüzey; parabol.

4. MINKOWSKI UZAY-ZAMANDA ZAMANSAL HELİKOİDAL YÜZEYLER

Bu bölümde, ilk olarak sırasıyla I. tip, IIa. tip, IIb. tip ve III. tip zamansal helikoidal yüzeylerin ortalama eğrilikleri ve Gauss eğrilikleri elde edilecektir. Bu yüzeylere Bour teoremine göre izometrik dönel yüzeyler araştırılacaktır. Gauss tasvirleri aynı olan izometrik yüzeyler sınıflandırılacaktır. Helikoidal yüzeylerin, dik helikoidal olup olmama durumu incelenecektir. Ayrıca izometrik yüzeylerin Gauss Egregium teoremini sağladığı gösterilecektir. Son olarak sırasıyla bütün tipler için birer örnek oluşturulacaktır.

4.1. Minkowski Uzay-Zamanda I. Tip Zamansal Helikoidal Yüzeyler

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, (2.14) denklemiyle verilen I. tip helikoidal yüzey X_1'in parametrik denkleminin sırasıyla u ve v'ye göre kısmi türevleri alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$X_{1_u} = (x'(u)cosv, x'(u)sinv, z'(u), w'(u))$ ve $X_{1_v} = (-x(u)sinv, x(u)cosv, 0, \lambda)$.

Böylece helikoidal yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$g_{11} = x'^2(u) + z'^2(u) - w'^2(u), \quad g_{12} = -\lambda w'(u) \text{ ve } g_{22} = x^2(u) - \lambda^2 \tag{4.1.1}$$

şeklinde elde edilir. X_1 helikoidal yüzeyin zamansal olması için her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W = x^2(u)\left(x'^2(u) + z'^2(u) - w'^2(u)\right) - \lambda^2\left(x'^2(u) + z'^2(u)\right) < 0$ olmalıdır. Yani $x'^2(u) + z'^2(u) - w'^2(u) < 0$'dır.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında e_1 ve e_2 vektörleri X_1'e teğet ve N_1, N_2 vektörleri X_1'e normal olacak şekilde X_1 yüzeyi üzerinde tanımlı $\{e_1, e_2, N_1, N_2\}$ şeklinde yönlendirilmiş bir ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{X_{1_u}}{\sqrt{\epsilon g_{11}}}, \; e_2 = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon W g_{11}}}\left(g_{11}X_{1_v} - g_{12}X_{1_u}\right), \tag{4.1.2}$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + z'^2}}(z'cosv, z'sinv, -x', 0), \tag{4.1.3}$$

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{-W\left(x'^2 + z'^2\right)}}(xx'w'cosv - \lambda\left(x'^2 + z'^2\right)sinv, xx'w'sinv + \lambda\left(x'^2 + z'^2\right)cosv, xz'w', x\left(x'^2 + z'^2\right)) \tag{4.1.4}$$

olarak seçilebilir. Burada $\langle e_1, e_1\rangle = -\langle e_2, e_2\rangle = \epsilon = \pm 1$ ve $\langle N_1, N_1\rangle = \langle N_2, N_2\rangle = 1$ şeklindedir. Eğer $\epsilon = 1$ ise X_1 yüzeyi uzaysal meridyene sahiptir. Aksi taktirde zamansal meridyene sahiptir.

Gerekli hesaplamalar yapılarak, X_1 zamansal helikoidal yüzeyine ait ikinci temel form katsayıları:

$$b_{11}^1 = \frac{x''z'-x'z''}{\sqrt{x'^2+z'^2}}, \qquad b_{12}^1 = b_{21}^1 = 0, \qquad b_{22}^1 = -\frac{xz'}{\sqrt{x'^2+z'^2}},$$
$$b_{11}^2 = \frac{x(w'(x'x''+z'z'')-w''(x'^2+z'^2))}{\sqrt{-W(x'^2+z'^2)}},\ b_{12}^2 = b_{21}^2 = \frac{\lambda x'\sqrt{x'^2+z'^2}}{\sqrt{-W}}, \tag{4.1.5}$$
$$b_{22}^2 = -\frac{x^2x'w'}{\sqrt{-W(x'^2+z'^2)}}$$

şeklinde elde edilir. İkinci temel form katsayıları göz önünde bulundurularak, X_1 zamansal helikoidal yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i^{X_1}$ (i = 1,2), sırasıyla

$$H_1^{X_1} = \frac{1}{2W\sqrt{x'^2+z'^2}}\Big((x^2-\lambda^2)(x''z'-x'z'')-xz'\big(x'^2+z'^2-w'^2\big)\Big) \tag{4.1.6}$$

ve

$$H_2^{X_1} = \frac{1}{2\sqrt{-W^3(x'^2+z'^2)}}(x'w'(2\lambda^2-x^2)(x'^2+z'^2)+x^2x'w'^3 - x\left(x^2-\lambda^2\right)\left(x'(x'w''-x''w')+z'\left(z'w''-z''w'\right)\right)) \tag{4.1.7}$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.5)'deki eşitlikler kullanılarak, X_1 uzaysal helikoidal yüzeyinin Gauss eğriliği K^{X_1},

$$K^{X_1} = \frac{xz'(x^2-\lambda^2)(x'z''-x''z')+x^3w'(x''w'-x'w'')+\lambda^2x'^2(x'^2+z'^2)}{W^2} \tag{4.1.8}$$

olarak hesaplanır.

X_1 zamansal yüzeye Bour teoremine göre izometrik olan dönel yüzeyleri aşağıdaki teorem yardımıyla belirlenecektir. Bu teoremde kullanılmak üzere, $I_1 = \{u \in I \subset \mathbb{R} \mid x^2(u) - \lambda^2 > 0\}$ ve $I_2 = \{u \in I \subset \mathbb{R} \mid x^2(u) - \lambda^2 < 0\}$ iki altküme olsun.

Teorem 4.1.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) ile verilen X_1 zamansal helikoidal yüzey aşağıdaki zamansal dönel yüzeylerden birine izometriktir:

i)

$$R_1^1(u,v)=\begin{bmatrix}\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\cos\left(v-\int\frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right)\\ \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\sin\left(v-\int\frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right)\\ \int\frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du\\ \int\frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du\end{bmatrix} \tag{4.1.9}$$

öyleki, X_1 zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal helisler, R_1^1 zamansal dönel yüzey üzerindeki parallel uzaysal çemberlere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)-b^2(u)=\frac{x^2(u)\left(z'^2(u)-w'^2(u)\right)-\lambda^2\left(x'^2(u)+z'^2(u)\right)}{x^2(u)x'^2(u)} \tag{4.1.10}$$

ii)

$$R_1^2(u,v)=\begin{bmatrix}\int\frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du\\ \int\frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du\\ \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\sinh\left(v-\int\frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right)\\ \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\cosh\left(v-\int\frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right)\end{bmatrix} \tag{4.1.11}$$

öyleki, X_1 zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal helisler, R_1^2 zamansal dönel yüzey üzerindeki parallel uzaysal hiperbollere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)+b^2(u)=\frac{(x^2(u)-\lambda^2)\left(x'^2(u)+z'^2(u)\right)+x^2(u)\left(x'^2(u)-w'^2(u)\right)}{x^2(u)x'^2(u)}. \tag{4.1.12}$$

Burada, her $u\in I_1\subset I$ için $x'(u)\neq 0$ dır,

iii)

$$R_1^3(u,v)=\begin{bmatrix} -\int \frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{\lambda^2-x^2(u)}}du \\ -\int \frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{\lambda^2-x^2(u)}}du \\ \sqrt{\lambda^2-x^2(u)}\cosh\left(v+\int \frac{\lambda w'(u)}{\lambda^2-x^2(u)}du\right) \\ \sqrt{\lambda^2-x^2(u)}\sinh\left(v+\int \frac{\lambda w'(u)}{\lambda^2-x^2(u)}du\right) \end{bmatrix} \tag{4.1.13}$$

öyleki, X_1 zamansal helikoidal yüzey üzerindeki zamansal helisler, R_1^3 zamansal dönel yüzey üzerindeki paralel zamansal hiperbollere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)+b^2(u)=\frac{\left(\lambda^2-x^2(u)\right)\left(x'^2(u)+z'^2(u)\right)-x^2(u)\left(x'^2(u)-w'^2(u)\right)}{x^2(u)x'^2(u)}. \tag{4.1.14}$$

Ayrıca her $u\in I_2\subset I$ için $x'(u)\neq 0$ dır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemi ile verilen X_1 zamansal helikoidal yüzeyi ele alınsın. (4.1.1) denklemini kullanılarak X_1 zamansal helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds_{X_1}^2=\left(x'^2(u)+z'^2(u)-w'^2(u)\right)du^2-2\lambda w'(u)dudv+(x^2(u)-\lambda^2)dv^2 \tag{4.1.15}$$

şeklindedir. X_1 uzaysal helikoidal yüzeye benzer, ortogonal olan v-parametreli bir eğri ile X_1 zamansal helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriğini yeniden aşağıdaki gibi parametrelenebilir:

$$ds_{X_1}^2=\left(x'^2(u)+z'^2(u)-w'^2(u)-\frac{\lambda^2 w'^2(u)}{x^2(u)-\lambda^2}\right)du^2+(x^2(u)-\lambda^2)d\bar{v}^2. \tag{4.1.16}$$

Burada $\bar{v}=v-\int\frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du$'dır. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_1 helikoidal yüzeyin zamansal olması için her $u\in I\subset\mathbb{R}$ için $W<0$ olmalıdır. Buradan $x'^2(u)+z'^2(u)-w'^2(u)<0$ olmalıdır. X_1 zamansal helikoidal yüzeyine izometrik yüzeyleri bulmak için aşağıda sırasıyla R_1, R_{2a} ve R_{2b} dönel yüzeylerin yer vektörleri verilir.

I. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında yer vektörü aşağıdaki şekilde verilen ve birinci dönel yüzey I_1 aralığında R_1 zamansal dönel yüzeyi göz önüne alınsın.

$$R_1(k,t)=\left(n(k)cost,n(k)sint,s(k),r(k)\right) \tag{4.1.17}$$

Bu yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds^2_{R_1} = \left(\dot{n}^2(k) + \dot{s}^2(k) - \dot{r}^2(k)\right)dk^2 + n^2(k)dt^2 \quad (4.1.18)$$

şeklindedir. Burada $n(k) > 0$'dır. (4.1.16) ve (4.1.18) denklemleri karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $n(k) = \sqrt{x^2(u) - \lambda^2}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k) + \dot{s}^2(k) - \dot{r}^2(k)\right)dk^2 = \left(x'^2(u) + z'^2(u) - w'^2(u) - \frac{\lambda^2 w'^2(u)}{x^2(u) - \lambda^2}\right)du^2 \quad (4.1.19)$$

şeklinde alınarak, X_1 ve R_1 yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u) = \frac{s'(u)}{n'(u)}$ ve $b(u) = \frac{r'(u)}{n'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (4.1.19) denkleminden (4.1.10) eşitliği elde edilir. Böylece

$$s(u) = \int \frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du \text{ ve } r(u) = \int \frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du \quad (4.1.20)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.1.9) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_1^1, (2.14) ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_1'e Bour teoremine gore izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere, X_1 zamansal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_1(u_0, v)$ olacak şekilde bir uzaysal helis ele alınsın. X_1 zamansal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_1(u_0, v)$ uzaysal helisler, R_1^1 zamansal dönel yüzeyi üzerindeki paralel uzaysal çemberlere karşılık gelir. Bu çemberler, c_3 ve c_4 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_3 = c_3,\ x_4 = c_4\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{x_0^2 - \lambda^2}$ yarıçaplı çemberlerdir, parametrizasyonu $R_1^1(u_0, v) = (\sqrt{x_0^2 - \lambda^2}\cos v, \sqrt{x_0^2 - \lambda^2}\sin v\,, c_3, c_4)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında yer vektörü aşağıdaki şekilde verilen ve I_1 aralığında ikinci dönel yüzey R_{2a} zamansal dönel yüzey göz önüne alınsın.

$$R_{2a}(k, t) = (n(k), p(k), r(k)\sinh t\,, r(k)\cosh t). \quad (4.1.21)$$

Bu yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds^2_{R_{2a}} = \left(\dot{n}^2(k) + \dot{p}^2(k) - \dot{r}^2(k)\right)dk^2 + r^2(k)dt^2 \quad (4.1.22)$$

şeklindedir. Burada $r(k) > 0$'dır. (4.1.16) ve (4.1.22) denklemleri karşılaştırılarak, $\bar{v} = t$, $r(k) = \sqrt{x^2(u) - \lambda^2}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k) + \dot{p}^2(k) - \dot{r}^2(k)\right) = (x'^2(u) + z'^2(u) - w'^2(u) - \frac{\lambda^2 w'^2(u)}{x^2(u) - \lambda^2})du^2 \quad (4.1.23)$$

şeklinde alınarak, X_1 ve R_2 yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u)=\frac{n'(u)}{r'(u)}$ ve $b(u)=\frac{p'(u)}{r'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (4.1.23) denkleminden (4.1.12) eşitliği elde edilir. Böylece

$$n(u)=\int \frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du \text{ ve } p(u)=\int \frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{x^2(u)-\lambda^2}}du \tag{4.1.24}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.1.11) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_1^2, (2.14) ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_1'e Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_1 zamansal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_1(u_0,v)$ olacak şekilde bir uzaysal helis ele alınsın. X_1 zamansal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_1(u_0,v)$ uzaysal helisleri, R_1^2 zamansal dönel yüzeyi üzerindeki paralel uzaysal hiperbollere karşılık gelir. Bu hiperboller, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_1=c_1,\ x_2=c_2\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{x_0^2-\lambda^2}$ yarıçaplı hiperbollerdir ve parametrizasyonu $R_1^2(u_0,v)=(c_1,c_2,\sqrt{x_0^2-\lambda^2}\sinh v,\sqrt{x_0^2-\lambda^2}\cosh v)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

II. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında yer vektörü aşağıdaki şekilde verilen ve I_2 aralığında R_{2b} zamansal dönel yüzeyi göz önüne alınsın.

$$R_{2b}(k,t)=(n(k),p(k),s(k)cosht,s(k)sinht) \tag{4.1.25}$$

ele alalım. $R_{2b}(k,t)$'nin indirgenmiş metriği

$$ds_{R_{2b}}^2=\left(\dot{n}^2(k)+\dot{p}^2(k)+\dot{s}^2(k)\right)dk^2-s^2(k)dt^2 \tag{4.1.26}$$

şeklindedir. Burada $s(k)>0$'dır. (4.1.16) ve (4.1.26) denklemleri karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $s(k)=\sqrt{\lambda^2-x^2(u)}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k)+\dot{p}^2(k)+\dot{s}^2(k)\right)dk^2=\left(x'^2(u)+z'^2(u)-w'^2(u)-\frac{\lambda^2w'^2(u)}{x^2(u)-\lambda^2}\right)du^2 \tag{4.1.27}$$

şeklinde alınarak X_1 ve R_{2b} yüzeylerin aynı indirgenmiş metriğe sahip olduğu elde edilir. Ayrıca $a(u)=\frac{n'(u)}{s'(u)}$ ve $b(u)=\frac{p'(u)}{s'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (4.1.27) denkleminden (4.1.14) eşitliği elde edilir. Böylece

$$n(u) = -\int \frac{a(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{\lambda^2 - x^2(u)}}du \text{ ve } p(u) = -\int \frac{b(u)x(u)x'(u)}{\sqrt{\lambda^2 - x^2(u)}}du \tag{4.1.28}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.1.13) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_1^3, (2.14) ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_1'e Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_1 zamansal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_1(u_0, v)$ olacak şekilde bir zamansal helis ele alalım. X_1 zamansal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_1(u_0, v)$ zamansal helisleri, R_1^3 zamansal dönel yüzeyi üzerindeki paralel zamansal hiperbollere karşılık gelir. Bu zamansal hiperboller, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_1 = c_1,\ x_2 = c_2\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{\lambda^2 - {x_0}^2}$ yarıçaplı hiperbollerdir ve parametrizasyonu $R_1^3(u_0, v) = (c_1, c_2, \sqrt{\lambda^2 - {x_0}^2}\cosh v,\ \sqrt{\lambda^2 - {x_0}^2}\sinh v)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

Şimdi, Teorem 4.1.1.'de (4.1.9) denklemi ile verilen R_1^1 zamansal dönel yüzeyinin normallerini ve ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri aşağıdaki lemma yardımıyla bulunur.

Lemma 4.1.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (4.1.9) denkleminde verilen R_1^1 zamansal dönel yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri ${H_i}^{R_1^1}$ (i = 1,2), sırasıyla

$$H_1^{R_1^1} = -\frac{a'(x^2 - \lambda^2) + axx'(1 + a^2 - b^2)}{2xx'(1 + a^2 - b^2)\sqrt{(1 + a^2)(x^2 - \lambda^2)}} \tag{4.1.29}$$

ve

$$H_2^{R_1^1} = \frac{(x^2 - \lambda^2)(b'(1 + a^2) - aa'b) + bxx'(1 + a^2 - b^2)}{2xx'\sqrt{(1 + a^2)(x^2 - \lambda^2)(b^2 - a^2 - 1)^3}} \tag{4.1.30}$$

şeklindedir. Ayrıca R_1^1 zamansal dönel yüzeyin N_1 ve N_2 normal vektörleri:

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}}(a\cos\mu, a\sin\mu, -1, 0) \tag{4.1.31}$$

ve

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}\sqrt{b^2 - a^2 - 1}}(b\cos\mu, b\sin\mu, ab, 1 + a^2) \tag{4.1.32}$$

dir. Burada $\mu = v - \int \frac{\lambda w\prime(u)}{x^2(u) - \lambda^2}du$ şeklindedir.

İspat. Lemma 3.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.1.2 $\mathbb{E}_1^4$'de $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ standart ortonormal baz ve $i, j = 1,2,3,4$ için $\eta_{ij} = \eta_i \wedge \eta_j$ olmak üzere (2.14) , (4.1.9), (4.1.11) ve (4.1.13) denklemleri ile verilen X_1, R_1^1, R_1^2 ve R_1^3 zamansal yüzeylerin Gauss tasvirleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\nu_{X_1} &= \frac{\epsilon}{\sqrt{-W}}(xx'\eta_{12} + xz'\sin v\,\eta_{13} + (\lambda x'\cos v + xw'\sin v)\eta_{14} - xz'\cos v\,\eta_{23} \\ &\quad +(\lambda x'\sin v - xw'\cos v)\eta_{24} + \lambda z'\eta_{34}),\end{aligned} \tag{4.1.33}$$

$$\nu_{R_1^1} = \frac{\epsilon xx'}{\sqrt{-W}}(\eta_{12} + a\sin\mu\,\eta_{13} + b\sin\mu\,\eta_{14} - a\cos\mu\,\eta_{23} - b\cos\mu\,\eta_{24}), \tag{4.1.34}$$

$$\nu_{R_1^2} = \frac{\epsilon xx'}{\sqrt{-W}}(a\cosh\mu\,\eta_{13} + a\sinh\mu\,\eta_{14} + b\cosh\mu\,\eta_{23} + b\sinh\mu\,\eta_{24} - \eta_{34}) \tag{4.1.35}$$

ve

$$\nu_{R_1^3} = -\frac{\epsilon xx'}{\sqrt{-W}}(a\sinh\mu\,\eta_{13} + a\cosh\mu\,\eta_{14} + b\sinh\mu\,\eta_{23} + b\cosh\mu\,\eta_{24} + \eta_{34}) \tag{4.1.36}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mu = v - \int \frac{\lambda w\prime(u)}{x^2(u)-\lambda^2}\,du$ şeklindedir.

İspat. Teorem 3.1.2.'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.1.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemi ile verilen X_1 zamansal helikoidal yüzey ve (4.1.9) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_1^1 eğer aynı Gauss tasvirine sahip ise bu yüzeyler hiperdüzlemsel ve minimaldir. Bu durumda, X_1 ve R_1^1'in parametrizasyonları,

$$X_1(u,v) = (x(u)\cos v\,, x(u)\sin v\,, c_1, w(u) + \lambda v) \tag{4.1.37}$$

ve

$$R_1^1(u,v) = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\cos\left(v - \int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}\,du\right) \\ \sqrt{x^2(u)-\lambda^2}\sin\left(v - \int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}\,du\right) \\ \pm\frac{1}{\sqrt{-c_3}}\sin^{-1}\sqrt{\frac{c_2}{c_3\left(\lambda^2 - x^2(u)\right)} + c_4} \end{bmatrix} \tag{4.1.38}$$

elde edilir. Burada, $c_3 < 0$ olmak üzere, c_1, c_2, c_3, c_4 keyfi sabitler ve

$$w(u) = \pm\left(\sqrt{\frac{c_3\lambda^2-1}{c_3}}\sin^{-1}\sqrt{c_3\left(\lambda^2-x^2(u)\right)} - \frac{\lambda\sqrt{1-c_3\lambda^2}}{\sqrt{1+c_3\lambda^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{(1+c_3\lambda^2)(x^2(u)-\lambda^2)}{\lambda^2\left(1-c_3(x^2(u)-\lambda^2)\right)}}\right)$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$'de, X_1 zamansal helikoidal yüzey ve R_1^1 zamansal dönel yüzeyin Gauss tasvirlerini sırasıyla (4.1.33) ve (4.1.34) verilmiştir. Bu denklemleri karşılaştırarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x(u)z'(u)\sin v = a(u)x(u)x'(u)\sin\mu, \tag{4.1.39}$$

$$\lambda x'(u)\cos v + x(u)w'(u)\sin v = b(u)x(u)x'(u)\sin\mu, \tag{4.1.40}$$

$$x(u)z'(u)\cos v = a(u)x(u)x'(u)\cos\mu, \tag{4.1.41}$$

$$\lambda x'(u)\sin v - x(u)w'(u)\cos v = -b(u)x(u)x'(u)\cos\mu, \tag{4.1.42}$$

$$\lambda z'(u) = 0. \tag{4.1.43}$$

Burada $\mu = v - \int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du$ şeklindedir. (4.1.43) denkleminden $\lambda \neq 0$ olduğundan $z'(u) = 0$ olur. Ayrıca (4.1.39) ve (4.1.41) denklemlerinden $a(u) = 0$ bulunur. Böylece X_1 ve R_1^1 hiperdüzlemseldir. Yani X_1 ve R_1^1 yüzeyleri $\mathbb{E}_1^3$'e indirgenir. (4.1.6) ve (4.1.29) denklemlerinden $H_1^{X_1} = 0$ ve $H_1^{R_1^1} = 0$ bulunur. Ayrıca,

$$H_2^{X_1} = \frac{x'^2w'(2\lambda^2-x^2) + x^2w'^3 + x(x^2-\lambda^2)(x''w' - x'w'')}{2\left(x^2w'^2 - x'^2(x^2-\lambda^2)\right)^{3/2}} \tag{4.1.44}$$

ve

$$H_2^{R_1^1} = \frac{bxx'(1-b^2) + b'(x^2-\lambda^2)}{2xx'\sqrt{(x^2-\lambda^2)(b^2-1)^3}} \tag{4.1.45}$$

eşitlikleri elde edilir. Diğer taraftan (4.1.10) denklemini kullanarak

$$b^2 = \frac{x^2w'^2 + \lambda^2x'^2}{x^2x'^2} \tag{4.1.46}$$

bulunur. (4.1.46) denklemini (4.1.45)'te yerine yazılarak

$$H_2^{R_1^1} = \frac{x^2w'\left(x'^2w'(2\lambda^2-x^2) + x^2w'^3 + x(x^2-\lambda^2)(x''w' - x'w'')\right)}{2\left(x^2w'^2 - x'^2(x^2-\lambda^2)\right)^{3/2}\sqrt{(x^2w'^2+\lambda^2x'^2)(x^2-\lambda^2)}} \tag{4.1.47}$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.40) ve (4.1.42) denklemleri kullanılarak

$$x(u)w'(u) = b(u)x(u)x'(u)\cos\left(\int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right) \tag{4.1.48}$$

ve

$$\lambda x'(u) = -b(u)x(u)x'(u)\sin\left(\int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right) \tag{4.1.49}$$

elde edilir. (4.1.48) ve (4.1.49) denklemleri karşılaştırılarak

$$\frac{x(u)w'(u)}{\lambda x'(u)} = -\cot\left(\int \frac{\lambda w'(u)}{x^2(u)-\lambda^2}du\right) \tag{4.1.50}$$

olarak bulunur. (4.1.50) denklemini u'ya göre türevi alındığında

$$x'^2w'(2\lambda^2-x^2)+x^2w'^3+x(x^2-\lambda^2)(x''w'-x'w'')=0 \tag{4.1.51}$$

elde edilir. Buradan $H_2^{X_1}=H_2^{R_1^1}=0$ bulunur. Böylece X_1 ve R_1^1 yüzeyleri minimaldir. Şimdi bu yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduklarında yüzeylerin parametrizasyonlarını bulalım. Eğer R_1^1 yüzeyi minimal ise, (4.1.45) denkleminden

$$(x^2(u)-\lambda^2)b'(u)+x(u)x'(u)b(u)=x(u)x'(u)b^3(u) \tag{4.1.52}$$

Bernoulli diferansiyel denklemi elde edilir. (4.1.52) denklemi çözülerek

$$b^2=\frac{1}{1+c_3(x^2-\lambda^2)} \tag{4.1.53}$$

bulunur. Burada c_3 keyfi sabittir. Son olarak (4.1.46) ve (4.1.53) denklemleri karşılaştırılarak

$$w(u)=\pm\sqrt{1-c_3\lambda^2}\int\frac{x'(u)}{x(u)}\sqrt{\frac{x^2-\lambda^2}{1+c_3(x^2-\lambda^2)}}\,du \tag{4.1.54}$$

elde edilir. Burada $c_3<0$ şeklindedir. Ayrıca R_1^1 yüzeyinin son bileşeni

$$\int\frac{x(u)x'(u)}{\sqrt{(x^2-\lambda^2)\left(1+c_3(x^2-\lambda^2)\right)}}\,du=\pm\frac{1}{\sqrt{-c_3}}\sin^{-1}\sqrt{c_3\left(\lambda^2-x^2(u)\right)}+c_4 \tag{4.1.55}$$

şeklinde bulunur. Burada c_4 keyfi sabittir. Böylece istenen sonuç elde edilir.

Ikawa (2001) $\mathbb{E}_1^3$ uzayında izometrik yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduğu yüzeyleri belirlemiştir. Eğer Teorem 4.1.3'de verilen izometrik yüzeylerde $x(u)=u$ alınırsa, Ikawa (2001)'nın elde ettiği yüzeyler ile çakıştığı görülür.

(2.14) denklemi ile verilen X_1, (4.1.11) denklemi ile verilen R_1^2 ve (4.1.13) denklemi ile verilen R_1^3 yüzeylerinin Gauss tasvirleri ile ilgili teorem aşağıdaki gibi verilir.

Teorem 4.1.4. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemi ile verilen X_1 zamansal helikoidal yüzeyi ile sırasıyla (4.1.11) ve (4.1.13) denklemleri ile verilen R_1^2 ve R_1^3 zamansal dönel yüzeylerin Gauss tasvirleri birbirinden farklıdır.

İspat. X_1, R_1^2 ve R_1^3 zamansal yüzeylerin sırasıyla (4.1.33), (4.1.35) ve (4.1.36) denklemlerinde Gauss tasvirleri elde edilmiştir. (4.1.33) ve (4.1.35) denklemlerini karşılaştırarak $x(u) = 0$ veya $x'(u) = 0$ bulunur. Böylece $\nu_{R_1^2} = 0$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla X_1 ve R_1^2 yüzeylerinin Gauss tasvirleri birbirinden farklıdır. Benzer şekilde X_1 ve R_1^3 yüzeylerinin Gauss tasvirleri birbirinden farklı olduğu elde edilir.

Şimdi izometrik yüzeylerin aynı Gauss eğriliklerine sahip olduklarını (yani Gauss Egregium teoremini sağladıklarını) aşağıdaki teorem yardımıyla gösterilir.

Teorem 4.1.5. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.14) denklemiyle verilen X_1 zamansal helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği sırasıyla (4.1.9) denklemiyle verilen R_1^1 zamansal dönel yüzeyin, (4.1.11) denklemiyle verilen R_1^2 zamansal dönel yüzeyin ve (4.1.13) denklemiyle verilen R_1^3 zamansal dönel yüzeyin Gauss eğrilikleri aynıdır.

İspat. Teorem 3.1.5.'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Son olarak, Teorem 4.1.3'ü kullanarak, izometrik ve aynı Gauss tasvirine sahip olan yüzeyler için bir örnek verilecektir.

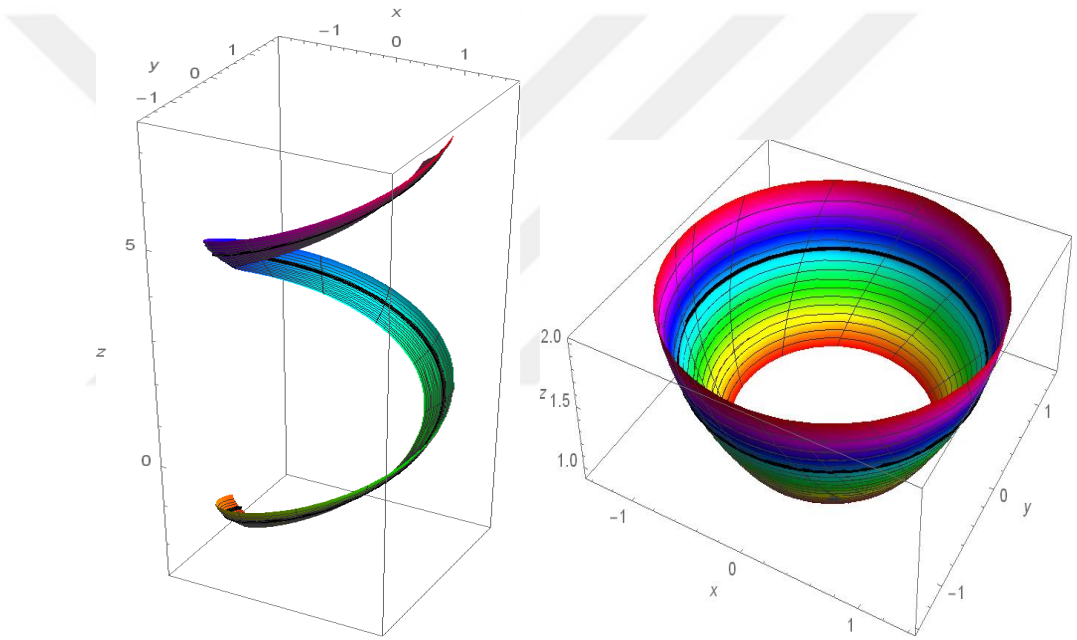
Örnek 4.1.1. Teorem 4.1.3'de sırasıyla (4.1.37) ve (4.1.38) denklemleriyle verilen X_1 ve R_1^1 yüzeylerini ele alalım. Eğer $x(u) = u$, $\lambda = 1$, $c_3 = -\frac{1}{2}$ ve $c_4 = 0$ alınırsa, bu yüzeylerin parametrizasyonları;

$$X_1(u,v) = \left(u\cos v\,, u\sin v\,, c_1, \sqrt{3}\left(\sin^{-1}\sqrt{\frac{u^2-1}{2}} - \tan^{-1}\sqrt{\frac{u^2-1}{u^2+1}} \right) + v \right) \qquad (4.1.56)$$

ve

$$R_1^1(u,v) = \begin{bmatrix} \sqrt{u^2-1}\cos\left(v - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2u^2-3}{\sqrt{-3u^4+12u^2-9}}\right) \\ \sqrt{u^2-1}\sin\left(v - \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2u^2-3}{\sqrt{-3u^4+12u^2-9}}\right) \\ c_2 \\ \sqrt{2}\sin^{-1}\sqrt{\frac{u^2-1}{2}} \end{bmatrix} \tag{4.1.57}$$

şeklindedir. Wolfram Mathematica 10.4 proramını kullanarak, $1.32 \leq u \leq 1.72$ ve $0 \leq v < 2\pi$ aralıkları için, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında zamansal helikoidal yüzey X_1 ve zamansal dönel yüzey R_1^1'in grafikleri aşağıdaki şekilde çizilir.



(a) (b)

Şekil 4.1.1 (a) I. tip zamansal helikoidal yüzey; uzaysal helis (b) zamansal dönel yüzey; uzaysal çember.

4.2. Minkowski uzay-zamanda IIa. Tip Zamansal Helikoidal Yüzey

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, (2.15) denklemiyle verilen IIa. tip helikoidal yüzey X_{2a}'nın parametrik denkleminin sırasıyla u ve v'ye göre kısmi türevleri alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$X_{2a_u} = (x'(u), y'(u), w'(u)\sinh v\,, w'(u)\cosh v)$$

ve

$$X_{2a_v} = (\lambda, 0, w(u)\cosh v\,, w(u)\sinh v).$$

Böylece helikoidal yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$g_{11} = x'^2(u) + y'^2(u) - w'^2(u),\quad g_{12} = \lambda x'(u)\ \text{ ve }\ g_{22} = w^2(u) + \lambda^2 \tag{4.2.1}$$

şeklinde elde edilir. X_{2a} helikoidal yüzeyin zamansal olması için her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W = (w^2(u) + \lambda^2)(y'^2(u) - w'^2(u)) + x'^2(u)w^2(u) < 0$ olmalıdır.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında e_1 ve e_2 vektörleri X_{2a}' ya teğet ve N_1, N_2 vektörleri X_{2a}'ya normal olacak şekilde X_{2a} yüzeyi üzerinde tanımlı $\{e_1, e_2, N_1, N_2\}$ şeklinde yönlendirilmiş bir ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon g_{11}}} X_{2a_u},\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon W g_{11}}}\left(g_{11}X_{2a_v} - g_{12}X_{2a_u}\right), \tag{4.2.2}$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{w'^2 - y'^2}}(0, w', y'\sinh v\,, y'\cosh v), \tag{4.2.3}$$

$$\begin{aligned} N_2 \quad = &-\frac{1}{\sqrt{-W\left(w'^2 - y'^2\right)}}\left(w\left(w'^2 - y'^2\right),\ x'y'w, x'ww'\sinh v\right. \\ &\left. -\lambda\left(w'^2 - y'^2\right)\cosh v\,,\ x'ww'\cosh v - \lambda\left(w'^2 - y'^2\right)\sinh v\right) \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

olarak seçilebilir. Burada $\langle e_1, e_1\rangle = -\langle e_2, e_2\rangle = \epsilon$ ve $\langle N_1, N_1\rangle = \langle N_2, N_2\rangle = 1$ şeklindedir. Eğer $\epsilon = 1$ ise X_{2a} yüzeyi uzaysal meridyene sahiptir. Aksi taktirde zamansal meridyene sahiptir. Gerekli hesaplamalar yapılarak, X_{2a} yüzeyine ait ikinci temel form katsayıları:

$$b_{11}^1 = \frac{y''w' - y'w''}{\sqrt{w'^2 - y'^2}},\qquad b_{12}^1 = b_{21}^1 = 0,\qquad b_{22}^1 = -\frac{y'w}{\sqrt{w'^2 - y'^2}}, \tag{4.2.5}$$

$$b_{11}^2 = \frac{w(x'(w'w''-y'y'')+x''(y'^2-w'^2))}{\sqrt{W(y'^2-w'^2)}},\ b_{12}^2 = b_{21}^2 = \frac{\lambda w'\sqrt{w'^2-y'^2}}{\sqrt{-W}},$$

$$b_{22}^2 = \frac{x'w^2w'}{\sqrt{W(y'^2-w'^2)}}$$

şeklinde elde edilir. İkinci temel form katsayıları göz önünde bulundurularak, X_{2a} yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i^{X_{2a}}$ (i = 1,2) sırasıyla,

$$H_1^{X_{2a}} = \frac{1}{2W\sqrt{w'^2-y'^2}}((w^2+\lambda^2)(y''w'-y'w'')-wy'(x'^2+y'^2-w'^2)) \tag{4.2.6}$$

ve

$$\begin{aligned} H_2^{X_{2a}} &= \frac{1}{2\sqrt{W^3(y'^2-w'^2)}}(x'w'(2\lambda^2+w^2)(y'^2-w'^2)+w^2w'x'^3 \\ &+w(w^2+\lambda^2)(x''(y'^2-w'^2)+x'(w'w''-y'y''))) \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

elde edilir. Ayrıca (4.2.5)'deki eşitlikler kullanılarak, X_{2a} zamansal helikoidal yüzeyinin Gauss eğriliği $K^{X_{2a}}$,

$$\begin{aligned} K^{X_{2a}} &= \frac{1}{W^2}(\lambda^2w'^2(w'^2-y'^2)+w^3x'(x''w'-x'w'') \\ &+wy'(\lambda^2+w^2)(y''w'-y'w'')) \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

olarak hesaplanır.

X_1 zamansal yüzeye benzer şekilde X_{2a} zamansal yüzeye Bour teoremine göre izometrik olan dönel yüzeyler aşağıdaki teorem yardımıyla belirleyelim.

Teorem 4.2.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) ile verilen X_{2a} zamansal helikoidal yüzey aşağıdaki zamansal dönel yüzeylerden birine izometriktir:

i)

$$R_{2a}^{1}(u,v)=\begin{bmatrix}\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\cos\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du\right)\\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\sin\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du\right)\\ \int\frac{a(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du\\ \int\frac{b(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du\end{bmatrix} \tag{4.2.9}$$

öyleki, X_{2a} zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal helisler, R_{2a}^{1} zamansal dönel yüzey üzerindeki parallel uzaysal çemberlere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliğini sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)-b^2(u)=\frac{w^2(u)\left(x'^2(u)+y'^2(u)-2w'^2(u)\right)+\lambda^2\left(y'^2(u)-w'^2(u)\right)}{w^2(u)w'^2(u)} \tag{4.2.10}$$

ii)

$$R_{2a}^{2}(u,v)=\begin{bmatrix}\int\frac{a(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du\\ \int\frac{b(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du\\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\sinh\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du\right)\\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\cosh\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du\right)\end{bmatrix} \tag{4.2.11}$$

öyleki, X_{2a} zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal helisler, R_{2a}^{2} zamansal dönel yüzey üzerindeki parallel uzaysal hiperbollere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliğini sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)+b^2(u)=\frac{w^2(u)\left(x'^2(u)+y'^2(u)\right)+\lambda^2\left(y'^2(u)-w'^2(u)\right)}{w^2(u)w'^2(u)}. \tag{4.2.12}$$

Burada, her $u\in I\subset\mathbb{R}$ için $w'(u)\neq 0$'dır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) denklemi ile verilen X_{2a} helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds_{X_{2a}}^2=\left(x'^2(u)+y'^2(u)-w'^2(u)\right)du^2-2\lambda x'(u)dudv+(w^2(u)+\lambda^2)dv^2 \tag{4.2.13}$$

şeklindedir. Şimdi X_{2a} helikoidal yüzeyi üzerinde helislere ortogonal olan v-parametreli bir eğri yardımıyla

$$\lambda x'(u)du + (w^2(u) + \lambda^2)dv = 0 \tag{4.2.14}$$

denklemi elde edilir. Ayrıca (4.2.14) denklemini çözerek;

$$v = c_1 - \int \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u) + \lambda^2} du \tag{4.2.15}$$

elde edilir. Burada c_1 keyfi sabittir. Burada c_1 yerine $\bar{v}$ alınarak

$$\bar{v} = v + \int \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u) + \lambda^2} du \tag{4.2.16}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafının *u* ya göre türevini alınarak

$$dv = d\bar{v} - \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u) + \lambda^2} du \tag{4.2.17}$$

eşitliği elde edilir. (4.2.17)'deki eşitlik (4.2.13) denkleminde yerine yazılarak X_{2a} helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$ds^2_{X_{2a}} = \left(x'^2(u) + y^2(u) - w'^2(u) - \frac{\lambda^2 x'^2(u)}{w^2(u)+\lambda^2}\right) du^2 + (w^2(u) + \lambda^2)d\bar{v}^2. \tag{4.2.18}$$

X_{2a} helikoidal yüzeyine izometrik dönel yüzeyleri bulmak için aşağıdaki durumlar verilir.

I. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (4.1.17) denklemi ile verilen R_1 dönel yüzeyinin indirgenmiş metriği (4.1.18) denkleminde verilmiştir. (4.1.18) denklemi ve (4.2.18) denklemi karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $n(k) = \sqrt{w^2(u) + \lambda^2}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k) + \dot{s}^2(k) - \dot{r}^2(k)\right)dk^2 = (x'^2(u) + y'^2(u) - w'^2(u) - \frac{\lambda^2 x'^2(u)}{w^2(u) + \lambda^2})du^2 \tag{4.2.19}$$

eşitlikleri ele alınarak X_{2a} ve R_1 yüzeylerin aynı indirgenmiş metriğe sahip olduğu elde edilir. Ayrıca $a(u) = \frac{s'(u)}{n'(u)}$ ve $b(u) = \frac{r'(u)}{n'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (4.2.19) denkleminden (4.2.10) eşitliği elde edilir. Böylece

$$s(u) = \int \frac{a(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}} du \text{ ve } r(u) = \int \frac{b(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}} du \tag{4.2.20}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.2.9) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_{2a}^1, (2.15) ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_{2a}'ya Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_{2a} zamansal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_{2a}(u_0, v)$ olacak şekilde bir uzaysal helis ele alalım. X_{2a} helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_{2a}(u_0, v)$ uzaysal helisler, R_{2a}^1 zamansal dönel yüzeyi üzerindeki paralel uzaysal çemberlere karşılık gelir. Bu uzaysal çemberler, c_3 ve c_4 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_3 = c_3,\ x_4 = c_4\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{{w_0}^2 + \lambda^2}$ yarıçaplı çemberlerdir ve parametrizasyonu $R_{2a}^1(u_0, v) = \left(\sqrt{{w_0}^2 + \lambda^2}\cos v\,, \sqrt{{w_0}^2 + \lambda^2}\sin v\,, c_3, c_4\right)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

II. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (4.1.21) denklemi ile verilen R_{2a} dönel yüzeyinin indirgenmiş metriği (4.1.22) denkleminde verilmiştir. (4.1.22) ve (4.2.18) denklemleri karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $r(k) = \sqrt{w^2(u) + \lambda^2}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k) + \dot{p}^2(k) - \dot{r}^2(k)\right)dk^2 = ({x'}^2(u) + {y'}^2(u) - {w'}^2(u) - \frac{\lambda^2 {x'}^2(u)}{w^2(u) + \lambda^2})du^2 \quad (4.2.21)$$

eşitlikleri ele alınarak X_{2a} ve R_{2a} yüzeylerin aynı indirgenmiş metriğe sahip olduğu elde edilir. Ayrıca $a(u) = \frac{n'(u)}{r'(u)}$ ve $b(u) = \frac{p'(u)}{r'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (4.2.21) denkleminden (4.2.12) eşitliğ elde edilir. Böylece

$$n(u) = \int \frac{a(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du \text{ ve } p(u) = \int \frac{b(u)w(u)w'(u)}{\sqrt{w^2(u)+\lambda^2}}du \quad (4.2.22)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.2.11) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_{2a}^2, (2.15) ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_{2a}'ye Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_{2a} zamansal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_{2a}(u_0, v)$ olacak şekilde bir uzaysal helis ele alalım. X_{2a} zamansal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_{2a}(u_0, v)$ uzaysal helisler, R_{2a}^2 zamansal dönel yüzeyi üzerindeki paralel uzaysal hiperbollere karşılık gelir. Bu uzaysal hiperboller, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_1 = c_1,\ x_2 = c_2\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{w_0^2 + \lambda^2}$ yarıçaplı hiperbollerdir ve parametrizasyonu $R_{2a}^2(u_0, v) = (c_1, c_2, \sqrt{w_0^2 + \lambda^2}\sinh v\,, \sqrt{w_0^2 + \lambda^2}\cosh v)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

Teorem 4.2.1'de (4.2.11) denklemi ile verilen R_{2a}^2 zamansal dönel yüzeyinin normallerini ve ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri aşağıdaki lemma yardımıyla bulunur.

Lemma 4.2.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (4.2.11) denkleminde verilen R_{2a}^2 zamansal dönel yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i{}^{R_{2a}^2}$ (i = 1,2), sırasıyla

$$H_1^{R_{2a}^2} = \frac{b'(w^2+\lambda^2) - bww'(a^2+b^2-1)}{2ww'(a^2+b^2-1)\sqrt{(1-b^2)(w^2+\lambda^2)}} \tag{4.2.23}$$

ve

$$H_2^{R_{2a}^2} = \frac{(w^2+\lambda^2)(a'(1-b^2) - abb') - aww'(a^2+b^2-1)}{2ww'\sqrt{(b^2-1)(w^2+\lambda^2)(a^2+b^2-1)^3}} \tag{4.2.24}$$

şeklindedir. Ayrıca R_{2a}^2 zamansal dönel yüzeyin N_1 ve N_2 normal vektörleri:

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}(0,1,b\sinh\mu\,, b\cosh\mu) \tag{4.2.25}$$

ve

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{(b^2-1)(a^2+b^2-1)}}(1-b^2, ab, a\sinh\mu\,, a\cosh\mu) \tag{4.2.26}$$

dir. Burada $\mu = v + \int \frac{\lambda x\prime(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du$ şeklindedir.

İspat. Lemma 3.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.2.2 $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4\}$ standart ortonormal baz ve $i,j = 1,2,3,4$ için $\eta_{ij} = \eta_i \wedge \eta_j$ olmak üzere (2.15) , (4.2.9) ve (4.2.11) denklemleri ile verilen X_{2a}, R_{2a}^1 ve R_{2a}^2 zamansal yüzeylerin Gauss tasvirleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\nu_{X_{2a}} &= \frac{\epsilon}{\sqrt{-W}}(-\lambda y'\eta_{12} + (x'\,\mathrm{wcosh}\,v - \lambda w'\sinh v)\eta_{13} + (x'\,\mathrm{wsinh}\,v \\ &\quad -\lambda w'\cosh v)\eta_{14} + y'w\cosh v\,\eta_{23} + y'w\sinh v\,\eta_{24} - ww'\eta_{34}),\end{aligned} \tag{4.2.27}$$

$$\nu_{R_{2a}^1} = \frac{\epsilon ww'}{\sqrt{-W}}(\eta_{12} + a\sin\mu\,\eta_{13} + b\sin\mu\,\eta_{14} - a\cos\mu\,\eta_{23} - b\cos\mu\,\eta_{24}) \tag{4.2.28}$$

ve

$$\nu_{R_{2a}^2} = \frac{\epsilon ww'}{\sqrt{-W}}(a\cosh\mu\,\eta_{13} + a\sinh\mu\,\eta_{14} + b\cosh\mu\,\eta_{23} + b\sinh\mu\,\eta_{24} - \eta_{34}) \tag{4.2.29}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mu = v + \int \frac{\lambda x\prime(u)}{w^2(u)+\lambda^2}du$ dir.

İspat. Teorem 3.1.2'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi (2.15) ve (4.2.11) denklemleri ile verilen X_{2a} ve R_{2a}^2 izometrik yüzeylerinin aynı Gauss tasvirine sahip olmaları durumunda aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.2.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) denklemi ile verilen X_{2a} zamansal helikoidal yüzey ve (4.2.11) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_{2a}^2 eğer aynı Gauss tasvirine sahip ise bu yüzeyler hiperdüzlemsel ve minimaldir. Bu durumda, X_{2a} ve R_{2a}^2'nın parametrizasyonları,

$$X_{2a}(u,v) = (x(u) + \lambda v\,, c_1, w(u)\sinh v\,, w(u)\cosh v) \tag{4.2.30}$$

ve

$$R_{2a}^2(u,v) = \begin{bmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{c_3}}\sinh^{-1}\sqrt{c_3(w^2(u)+\lambda^2)} + c_4 \\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\sinh\left(v + \int \dfrac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}\,du\right) \\ \sqrt{w^2(u)+\lambda^2}\cosh\left(v + \int \dfrac{\lambda x'(u)}{w^2(u)+\lambda^2}\,du\right) \end{bmatrix} \tag{4.2.31}$$

elde edilir. Burada, $c_3 > 0$ olmak üzere, c_1, c_2, c_3, c_4 keyfi sabitler ve

$$x(u) = \pm\left(\sqrt{1+c_3\lambda^2}\sinh^{-1}\sqrt{c_3(w^2(u)+\lambda^2)} - \lambda\sqrt{c_3}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{\lambda^2\left(1+c_3(w^2(u)+\lambda^2)\right)}{(1+c_3\lambda^2)(w^2(u)+\lambda^2)}}\right)$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_{2a} zamansal helikoidal yüzey ve R_{2a}^2 zamansal dönel yüzeyin Gauss tasvirlerini sırasıyla (4.2.27) ve (4.2.29) verilmiştir. Bu denklemleri karşılaştırarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\lambda y'(u) = 0, \tag{4.2.32}$$
$$x'(u)w(u)\cosh v - \lambda w'(u)\sinh v = a(u)w(u)w'(u)\cosh\mu, \tag{4.2.33}$$
$$x'(u)w(u)\sinh v - \lambda w'(u)\cosh v = a(u)w(u)w'(u)\sinh\mu, \tag{4.2.34}$$
$$y'(u)w(u)\cosh v = b(u)w(u)w'(u)\cosh\mu, \tag{4.2.35}$$
$$y'(u)w(u)\sinh v = b(u)w(u)w'(u)\sinh\mu. \tag{4.2.36}$$

(4.2.32) denkleminden $\lambda \neq 0$ olduğundan $y'(u) = 0$ olur. Ayrıca (4.2.35) ve (4.2.36) denklemlerinden $b(u) = 0$ bulunur. Böylece X_{2a} ve R_{2a}^2 hiperdüzlemseldir. Yani X_{2a} ve

R_{2a}^2 yüzeyleri $\mathbb{E}_1^3$'e indirgenir. (4.2.6) ve (4.2.23) denklemlerinden $H_1^{X_{2a}} = 0$ ve $H_1^{R_{2a}^2} = 0$ bulunur. Ayrıca,

$$H_2^{X_2} = -\frac{x'w'^2(2\lambda^2 + w^2) - w^2x'^3 + w(w^2 + \lambda^2)(x''w' - x'w'')}{2\left(w'^2(w^2 + \lambda^2) - w^2x'^2\right)^{3/2}} \tag{4.2.37}$$

ve

$$H_2^{R_{2a}^2} = \frac{a'(w^2 + \lambda^2) + aww'(1 - a^2)}{2ww'\sqrt{(w^2 + \lambda^2)(1 - a^2)^3}} \tag{4.2.38}$$

eşitlikler elde edilir. Diğer taraftan (4.2.12) denklemini kullanarak

$$a^2 = \frac{w^2x'^2 - \lambda^2w'^2}{w^2w'^2} \tag{4.2.39}$$

bulunur. (4.2.39) denklemini (4.2.38)'te yerine yazılarak

$$H_2^{R_{2a}^2} = \frac{w^2x'\left(x'w'^2(2\lambda^2+w^2) - w^2x'^3 + w(w^2 + \lambda^2)(x''w' - x'w'')\right)}{2(w'^2(w^2 + \lambda^2) - w^2x'^2)^{3/2}\sqrt{(w^2 + \lambda^2)(\lambda^2w'^2 - w^2x'^2)}} \tag{4.2.40}$$

elde edilir. Ayrıca (4.2.33) ve (4.2.34) denklemleri kullanılarak

$$x'(u)w(u) = a(u)w(u)w'(u)\cosh\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u) + \lambda^2}du\right) \tag{4.2.41}$$

ve

$$\lambda w'(u) = -a(u)w(u)w'(u)\sin\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u) + \lambda^2}du\right) \tag{4.2.42}$$

elde edilir. (4.2.41) ve (4.2.42) denklemleri karşılaştırılarak

$$-\frac{x'(u)w(u)}{\lambda w'(u)} = \coth\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{w^2(u) + \lambda^2}du\right) \tag{4.2.43}$$

olarak bulunur. (4.2.43) denklemini u'ya göre kısmi türevi alındığında

$$x'w'^2(2\lambda^2 + w^2) - w^2x'^3 + w(w^2 + \lambda^2)(x''w' - x'w'') = 0 \tag{4.2.44}$$

elde edilir. Buradan $H_2^{X_{2a}} = H_2^{R_{2a}^2} = 0$ bulunur. Böylece X_{2a} ve R_{2a}^2 yüzeyleri minimaldir. Şimdi bu yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduklarında yüzeylerin parametrizasyonlarını bulalım. Eğer R_{2a}^2 yüzeyi minimal ise, (4.2.38) denkleminden

$$(w^2(u)+\lambda^2)a'(u)+w(u)w'(u)a(u)=w(u)w'(u)a^3(u) \tag{4.2.45}$$

Bernoulli diferansiyel denklemi elde edilir. (4.2.45) denklemi çözülerek

$$a^2=\frac{1}{1+c_3(w^2+\lambda^2)} \tag{4.2.46}$$

bulunur. Burada c_3 keyfi sabittir. Son olarak (4.2.39) ve (4.2.46) denklemleri karşılaştırılarak

$$x(u)=\pm\sqrt{1+c_3\lambda^2}\int\frac{w'(u)}{w(u)}\sqrt{\frac{w^2(u)+\lambda^2}{1+c_3(w^2(u)+\lambda^2)}}\,du \tag{4.2.47}$$

elde edilir. Burada $c_3>0$ şeklindedir. Ayrıca R_{2a}^2 yüzeyinin son bileşeni

$$\int\frac{w(u)w'(u)}{\sqrt{(w^2+\lambda^2)\big(1+c_3(w^2+\lambda^2)\big)}}\,du=\pm\frac{1}{\sqrt{-c_3}}\sin^{-1}\sqrt{-c_3(w^2(u)+\lambda^2)}+c_4 \tag{4.2.48}$$

şeklinde bulunur. Burada c_4 keyfi sabittir. Böylece istenen sonuç elde edilir.

Ikawa (2001) $\mathbb{E}_1^3$ uzayında izometrik yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduğu yüzeyleri belirlemiştir. Eğer Teorem 4.2.3'de verilen izometrik yüzeylerde $w(u)=u$ alınırsa, Ikawa (2001)'nın elde ettiği yüzeyler ile çakıştığı görülür. (2.15) denklemiyle verilen X_{2a} helikoidal yüzeyinde eğer $x'(u)=0$ alınırsa, X_{2a} helikoidal yüzeyi dik helikoidal yüzeyine indirgenir. Ayrıca bu durum altında yüzeylerin Gauss tasvirleri birbirinin farklıdır.

Teorem 4.2.4. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) denklemi ile verilen X_{2a} helikoidal yüzeyi ve (4.2.9) denklemi ile verilen R_{2a}^1 zamansal dönel yüzeylerin Gauss tasviri birbirinden farklıdır.

İspat. X_{2a} ve R_{2a}^1 yüzeylerin sırasıyla (4.2.27) ve (4.2.28) denklemlerinde Gauss tasvirleri elde edilmiştir. Bu yüzeylerin Gauss tasvirlerini karşılaştırarak $w(u)=0$ veya $w'(u)=0$ bulunur. Böylece $\nu_{R_{2a}^1}=0$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla X_{2a} ve R_{2a}^1 yüzeylerinin Gauss tasvirleri birbirinden farklıdır.

Şimdi izometrik yüzeylerin aynı Gauss eğriliklerine sahip olduklarını (yani Gauss Egregium teoremini sağladıklarını) aşağıdaki teorem yardımıyla gösterilir.

Teorem 4.2.5. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.15) denklemiyle verilen X_{2a} helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği, sırasıyla (4.2.9) denklemiyle verilen R_{2a}^1 zamansal dönel yüzeyin ve (4.2.11) denklemiyle verilen R_{2a}^2 zamansal dönel yüzeyin Gauss eğrilikleri aynıdır.

İspat. Teorem 3.1.5'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Son olarak, Teorem 4.2.3'ü kullanarak, izometrik ve aynı Gauss tasvirine sahip olan yüzeyler için bir örnek verilecektir.

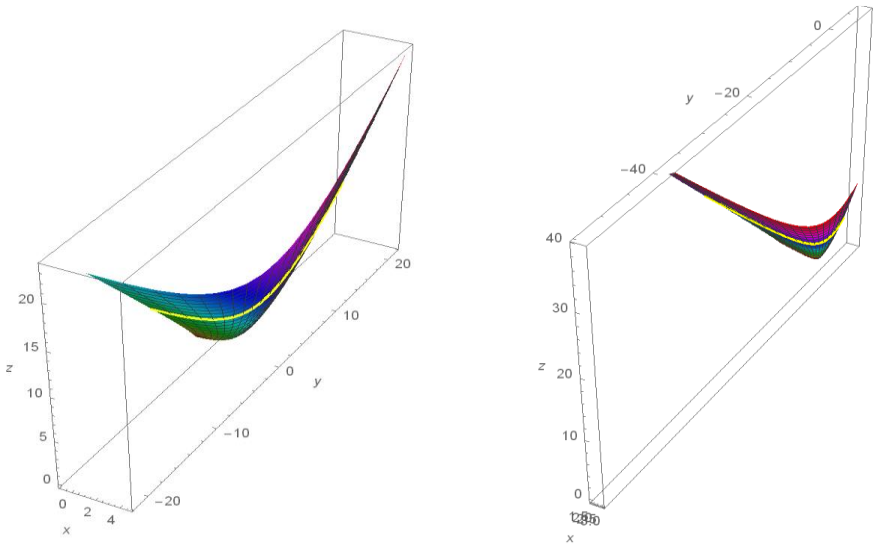
Örnek 4.2.1. Teorem 4.2.3'te verilen X_{2a} ve R_{2a}^2 yüzeylerini ele alalım. Eğer $w(u) = u$, $\lambda = c_3 = 1$ ve $c_4 = 0$ alınırsa, bu yüzeylerin parametrizasyonları;

$$X_{2a}(u,v) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\sinh^{-1}\sqrt{1+u^2} - \tanh^{-1}\sqrt{\dfrac{2+u^2}{2+2u^2}} + v \\ c_1 \\ u\sinh v \\ u\cosh v \end{bmatrix} \tag{4.2.49}$$

ve

$$R_{2a}^2(u,v) = \begin{bmatrix} \sinh^{-1}\sqrt{1+u^2} \\ c_2 \\ \sqrt{1+u^2}\sinh\left(v + \ln\dfrac{u}{\sqrt{3u^2+4+\sqrt{8u^4+24u^2+16}}}\right) \\ \sqrt{1+u^2}\cosh\left(v + \ln\dfrac{u}{\sqrt{3u^2+4+\sqrt{8u^4+24u^2+16}}}\right) \end{bmatrix} \tag{4.2.50}$$

şeklinde elde edilir. Wolfram Mathematica 10.4 proramını kullanarak, $1.19 \leq u \leq 10$ ve $-1.5 \leq v \leq 1.5$ aralıkları için, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında helikoidal yüzey X_{2a} ve zamansal dönel yüzey $R_{2a}^2{}'$in grafikleri aşağıdaki şekilde çizilir.



(a) (b)

Şekil 4.2.1 (a) IIa. tip zamansal helikoidal yüzey; uzaysal helis (b) zamansal dönel yüzey; uzaysal hiperbol.

4.3. Minkowski uzay-zamanda IIb. Tip Zamansal Helikoidal Yüzey

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, (2.16) denklemiyle verilen IIb. tip helikoidal yüzey X_{2b}'nin parametrik denkleminin sırasıyla u ve v'ye göre kısmi türevleri alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$X_{2b_u} = (x'(u), y'(u), z'(u)\cosh v\,, z'(u)\sinh v)$$

ve

$$X_{2b_v} = (\lambda, 0, z(u)\sinh v\,, z(u)\cosh v).$$

Böylece helikoidal yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$g_{11} = x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u),\quad g_{12} = \lambda x'(u) \text{ ve } g_{22} = \lambda^2 - z^2(u) \tag{4.3.1}$$

şeklinde elde edilir. X_{2b} helikoidal yüzeyin zamansal olması için her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W = \left(\lambda^2 - z^2(u)\right)\left(y'^2(u) + z'^2(u)\right) - x'^2(u)z^2(u) < 0$ olmalıdır.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında e_1 ve e_2 vektörleri X_{2b}' ye teğet ve N_1, N_2 vektörleri X_{2b}'ye normal olacak şekilde X_{2b} yüzeyi üzerinde tanımlı $\{e_1, e_2, N_1, N_2\}$ şeklinde yönlendirilmiş bir ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} X_{2b_u}\,,\ e_2 = \frac{1}{\sqrt{-W g_{11}}}\left(g_{11}X_{2b_v} - g_{12}X_{2b_u}\right), \tag{4.3.2}$$

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{y'^2 + z'^2}}(0, -z', y'\cosh v\,, y'\sinh v), \tag{4.3.3}$$

$$\begin{aligned} N_2 \quad = & -\frac{1}{\sqrt{-W\left(y'^2 + z'^2\right)}}(-z\left(y'^2 + z'^2\right),\ x'y'z, x'zz'\cosh v \\ & -\lambda\left(y'^2 + z'^2\right)\sinh v\,,\ x'zz'\sinh v - \lambda\left(y'^2 + z'^2\right)\cosh v) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

olarak seçilebilir. Burada $\langle e_1, e_1\rangle = -\langle e_2, e_2\rangle = 1$ ve $\langle N_1, N_1\rangle = \langle N_2, N_2\rangle = 1$ şeklindedir. Gerekli hesaplamalar yapılarak, X_{2b} yüzeyine ait ikinci temel form katsayıları:

$$b_{11}^1 = \frac{y'z'' - y''z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}},\qquad b_{12}^1 = b_{21}^1 = 0,\qquad b_{22}^1 = \frac{y'z}{\sqrt{y'^2 + z'^2}}, \tag{4.3.5}$$

$$b_{11}^2 = \frac{z(x'(y'y''+z'z'')-x''(y'^2+z'^2))}{\sqrt{-W\left(y'^2+z'^2\right)}},\ b_{12}^2 = b_{21}^2 = \frac{\lambda z'\sqrt{y'^2+z'^2}}{\sqrt{-W}},$$

$$b_{22}^2 = \frac{x'z^2z'}{\sqrt{-W\left(y'^2+z'^2\right)}}$$

şeklinde elde edilir. İkinci temel form katsayıları göz önünde bulundurularak, X_{2b} yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i^{X_{2b}}$ (i = 1,2) sırasıyla,

$$H_1^{X_{2b}} = \frac{1}{2W\sqrt{y'^2+z'^2}}((\lambda^2-z^2)(y'z''-y''z')+zy'(x'^2+y'^2+z'^2)) \tag{4.3.6}$$

ve

$$\begin{aligned} H_2^{X_{2b}} &= \frac{1}{2\sqrt{-W^3\left(y'^2+z'^2\right)}}(x'z'((z^2-2\lambda^2)(y'^2+z'^2)+z^2(x'^2-zz'')) \\ &+\lambda^2z(x'(z'z''+y'y'')-x''(y'^2+z'^2)+z^3(x''(y'^2+z'^2)-x'y'y''))) \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

elde edilir. Ayrıca (4.3.5)'deki eşitlikler kullanılarak, X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyinin Gauss eğriliği $K^{X_{2b}}$,

$$K^{X_{2b}} = \frac{1}{W^2}(\lambda^2z'^2(z'^2+y'^2)+z^3x'(x''z'-x'z'')+zy'(z^2-\lambda^2)(y''z'-y'z'')) \tag{4.3.8}$$

olarak hesaplanır. Şimdi, X_1 zamansal yüzeye benzer şekilde X_{2b} zamansal yüzey için Bour teoremine göre izometrik olan dönel yüzeyler aşağıdaki teorem yardımıyla belirlenecektir. Bu teoremde kullanılmak üzere, $I_1 = \{u \in I \subset \mathbb{R} \mid z^2(u)-\lambda^2 < 0\}$ ve $I_2 = \{u \in I \subset \mathbb{R} \mid z^2(u)-\lambda^2 > 0\}$ iki altküme olsun.

Teorem 4.3.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.16) ile verilen X_{2b} zamansal helikoidal yüzey aşağıdaki zamansal dönel yüzeylerden birine izometriktir:

i)

$$R_{2b}^{1}(u,v)=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}\cos\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2-z^2(u)}du\right)\\ \sqrt{\lambda^2-z^2(u)}\sin\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2-z^2(u)}du\right)\\ -\int\frac{a(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}}du\\ -\int\frac{b(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}}du\end{bmatrix} \tag{4.3.9}$$

öyleki, X_{2b} zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal helisler, R_{2b}^{1} zamansal dönel yüzey üzerindeki parallel uzaysal çemberlere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)-b^2(u)=\frac{\lambda^2\left(y'^2(u)+z'^2(u)\right)-z^2(u)\left(x'^2(u)+y'^2(u)+2z'^2(u)\right)}{z^2(u)z'^2(u)} \tag{4.3.10}$$

ii)

$$R_{2b}^{2}(u,v)=\begin{bmatrix}-\int\frac{a(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}}du\\ -\int\frac{b(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}}du\\ \sqrt{\lambda^2-z^2(u)}\sinh\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2-z^2(u)}du\right)\\ \sqrt{\lambda^2-z^2(u)}\cosh\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2-z^2(u)}du\right)\end{bmatrix} \tag{4.3.11}$$

öyleki, X_{2b} zamansal helikoidal yüzey üzerindeki uzaysal helisler, R_{2b}^{2} zamansal dönel yüzey üzerindeki parallel uzaysal hiperbollere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)+b^2(u)=\frac{\lambda^2\left(y'^2(u)+z'^2(u)\right)-z^2(u)\left(x'^2(u)+y'^2(u)\right)}{z^2(u)z'^2(u)}, \tag{4.3.12}$$

Burada, her $u\in I_1\subset\mathbb{R}$ ve $z'(u)\neq 0$'dır.

iii)

$$R_{2b}^{3}(u,v)=\begin{bmatrix} \int \frac{a(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{z^2(u)-\lambda^2}}du \\ \int \frac{b(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{z^2(u)-\lambda^2}}du \\ \sqrt{z^2(u)-\lambda^2}\cosh\left(v-\int \frac{\lambda x'(u)}{z^2(u)-\lambda^2}du\right) \\ \sqrt{z^2(u)-\lambda^2}\sinh\left(v-\int \frac{\lambda x'(u)}{z^2(u)-\lambda^2}du\right) \end{bmatrix} \tag{4.3.13}$$

öyleki, X_{2b} zamansal helikoidal yüzey üzerindeki zamansal helisler, R_{2b}^{3} zamansal dönel yüzey üzerindeki parallel zamansal hiperbollere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ aşağıdaki eşitliği sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u)+b^2(u)=\frac{z^2(u)\left(x'^2(u)+y'^2(u)\right)-\lambda^2\left(y'^2(u)+z'^2(u)\right)}{z^2(u)z'^2(u)}. \tag{4.3.14}$$

Burada her $u\in I_2\subset\mathbb{R}$ ve $z'(u)\neq 0$'dır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.16) denklemi ile verilen X_{2b} helikoidal yüzeyini ele alalım. (4.3.1) denklemini kullanarak X_{2b} helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds_{X_{2b}}^2=\left(x'^2(u)+y'^2(u)+z'^2(u)\right)du^2+2\lambda x'(u)dudv+(\lambda^2-z^2(u))dv^2 \tag{4.3.15}$$

şeklindedir. Şimdi X_1 zamansal helikoidal yüzeye benzer, ortogonal olan v-parametreli bir eğri ile X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriğini yeniden aşağıdaki gibi parametrelenebilir:

$$ds_{X_{2b}}^2=\left(x'^2(u)+y'^2(u)+z'^2(u)+\frac{\lambda^2x'^2(u)}{z^2(u)-\lambda^2}\right)du^2+\left(\lambda^2-z^2(u)\right)d\bar{v}^2 \tag{4.3.16}$$

Burada $\bar{v}=v+\int\frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2-z^2(u)}du$ şeklindedir. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_{2b} helikoidal yüzeyin zamansal olması için her $u\in I\subset\mathbb{R}$ için $W<0$ olmalıdır.

X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyine izometrik dönel yüzeyleri bulmak için aşağıdaki durumlar verilir.

I. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, yer vektörü (4.1.17) denklemi ile verilen R_1 zamansal dönel yüzeyinin indirgenmiş metriği (4.1.18) denkleminde verilmiştir. (4.1.18) denklemi ve (4.3.16) denklemi karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $n(k)=\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k)+\dot{s}^2(k)-\dot{r}^2(k)\right)dk^2=\left(x'^2(u)+y'^2(u)+z'^2(u)+\frac{\lambda^2x'^2(u)}{z^2(u)-\lambda^2}\right)du^2 \quad (4.3.17)$$

şeklinde alınarak, X_{2b} ve R_1 yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u)=\frac{s'(u)}{n'(u)}$ ve $b(u)=\frac{r'(u)}{n'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (4.3.17) denkleminden (4.3.10) eşitliği elde edilir. Böylece

$$s(u)=-\int\frac{a(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}}du \text{ ve } r(u)=-\int\frac{b(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}}du \quad (4.3.18)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.3.9) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_{2b}^1, (2.16) ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_{2b}'ye Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_{2b}(u_0,v)$ olacak şekilde bir uzaysal helis ele alınsın. X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_{2b}(u_0,v)$ uzaysal helisler, R_{2b}^1 zamansal dönel yüzeyi üzerindeki paralel uzaysal çemberlere karşılık gelir. Bu çemberler, c_3 ve c_4 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_3=c_3,\ x_4=c_4\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{\lambda^2-z_0^2}$ yarıçaplı çemberlerdir ve parametrizasyonu $R_{2b}^1(u_0,v)=(\sqrt{\lambda^2-z_0^2}\cos v,$ $\sqrt{\lambda^2-z_0^2}\sin v\,, c_3, c_4)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, yer vektörü (4.1.21) denklemi ile verilen R_{2a} zamansal dönel yüzeyinin indirgenmiş metriği (4.1.22) denkleminde verilmiştir. (4.1.22) ve (4.3.16) denklemleri karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $r(k)=\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k)+\dot{p}^2(k)-\dot{r}^2(k)\right)dk^2=\left(x'^2(u)+y'^2(u)+z'^2(u)+\frac{\lambda^2x'^2(u)}{z^2(u)-\lambda^2}\right)du^2 \quad (4.3.19)$$

şeklinde alınarak, X_{2b} ve R_{2a} yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u)=\frac{n'(u)}{r'(u)}$ ve $b(u)=\frac{p'(u)}{r'(u)}$ şeklindedir. Böylece

$$n(u)=-\int\frac{a(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}}du \text{ ve } p(u)=-\int\frac{b(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{\lambda^2-z^2(u)}}du \quad (4.3.20)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.3.11) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_{2b}^2, (2.16) ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_{2b}'ye Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_{2b}(u_0,v)$ olacak şekilde bir uzaysal helis ele alınsın. X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_{2b}(u_0,v)$ uzaysal

helisleri, R_{2b}^2 zamansal dönel yüzeyi üzerindeki paralel uzaysal hiperbollere karşılık gelir. Bu hiperboller, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_1 = c_1,\ x_2 = c_2\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{\lambda^2 - z_0^2}$ yarıçaplı hiperbollerdir ve parametrizasyonu $R_{2b}^2(u_0, v) = (c_1, c_2,$ $\sqrt{\lambda^2 - z_0^2}\sinh v\,, \sqrt{\lambda^2 - z_0^2}\cosh v)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

II. Durum: $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, yer vektörü (4.1.25) denklemi ile verilen ve I_2 aralığında R_{2b} zamansal dönel yüzeyinin indirgenmiş metriği (4.1.26) denkleminde verilmiştir. (4.1.26) ve (4.3.16) denklemleri karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $s(k) = \sqrt{z^2(u) - \lambda^2}$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k) + \dot{p}^2(k) + \dot{s}^2(k)\right)dk^2 = \left(x'^2(u) + y'^2(u) + z'^2(u) + \frac{\lambda^2 x'^2(u)}{z^2(u) - \lambda^2}\right)du^2 \quad (4.3.21)$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler göz önünde bulundurularak, X_1 ve R_{2b} yüzeylerin aynı indirgenmiş metriğe sahip olduğu elde edilir. Ayrıca $a(u) = \frac{n'(u)}{s'(u)}$ ve $b(u) = \frac{p'(u)}{s'(u)}$ şeklindedir. Böylece

$$n(u) = \int \frac{a(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{z^2(u) - \lambda^2}}du \text{ ve } p(u) = \int \frac{b(u)z(u)z'(u)}{\sqrt{z^2(u) - \lambda^2}}du \quad (4.3.22)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.3.13) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_{2b}^3, (2.16) ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_{2b}'ye Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_{2b}(u_0, v)$ olacak şekilde bir zamansal helis ele alalım. X_1 zamansal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_{2b}(u_0, v)$ zamansal helisleri, R_{2b}^3 zamansal dönel yüzeyi üzerindeki paralel zamansal hiperbollere karşılık gelir. Bu hiperboller, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $\{x_1 = c_1,\ x_2 = c_2\}$ düzleminde yatan ve $\sqrt{z_0^2 - \lambda^2}$ yarıçaplı hiperbollerdir ve parametrizasyonu $R_{2b}^3(u_0, v) =$ $(c_1, c_2,\ \sqrt{z_0^2 - \lambda^2}\cosh v\,, \sqrt{z_0^2 - \lambda^2}\sinh v)$ şeklindedir (Kaya ve Lopez, 2022).

Şimdi, Teorem 4.3.1'de (4.3.11) ve (4.3.13) denklemleri ile verilen R_{2b}^2 ve R_{2b}^3 zamansal dönel yüzeylerin sırasıyla normallerini ve ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri aşağıdaki lemmalar yardımıyla bulunur.

Lemma 4.3.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (4.3.11) denkleminde verilen R_{2b}^2 zamansal dönel yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i^{R_{2b}^2}$ (i = 1,2), sırasıyla

$$H_1^{R_{2b}^2} = \frac{b'(z^2-\lambda^2) - bzz'(a^2+b^2-1)}{2zz'(a^2+b^2-1)\sqrt{(1-b^2)(\lambda^2-z^2)}} \tag{4.3.23}$$

ve

$$H_2^{R_{2b}^2} = \frac{(z^2-\lambda^2)(a'(b^2-1)-abb') + azz'(a^2+b^2-1)}{2zz'\sqrt{(b^2-1)(\lambda^2-z^2)(a^2+b^2-1)^3}} \tag{4.3.24}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca R_{2b}^2 zamansal dönel yüzeyin N_1 ve N_2 normal vektörleri:

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}(0,1,b\sinh\mu\,,b\cosh\mu) \tag{4.3.25}$$

ve

$$N_2 = \frac{1}{\sqrt{(b^2-1)(a^2+b^2-1)}}(1-b^2,ab,a\sinh\mu\,,a\cosh\mu) \tag{4.3.26}$$

dir. Burada $\mu = v + \int \frac{\lambda x\prime(u)}{\lambda^2 - z^2(u)}du$ şeklindedir.

İspat. Lemma 3.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Lemma 4.3.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (4.3.13) denkleminde verilen R_{2b}^3 zamansal dönel yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i^{R_{2b}^3}$ (i = 1,2), sırasıyla

$$H_1^{R_{2b}^3} = \frac{b'(z^2-\lambda^2) + bzz'(a^2+b^2+1)}{2zz'(a^2+b^2+1)\sqrt{(1+b^2)(z^2-\lambda^2)}} \tag{4.3.27}$$

ve

$$H_2^{R_{2b}^3} = \frac{(z^2-\lambda^2)(a'(1+b^2)-abb') + azz'(a^2+b^2+1)}{2zz'\sqrt{(1+b^2)(z^2-\lambda^2)(a^2+b^2+1)^3}} \tag{4.3.28}$$

şeklindedir. Ayrıca R_{2b}^3 zamansal dönel yüzeyin N_1 ve N_2 normal vektörleri

$$N_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}(0,-1,b\cosh\mu\,,b\sinh\mu) \tag{4.3.29}$$

ve

$$N_2 = -\frac{1}{\sqrt{(1+b^2)(1+a^2+b^2)}}(-1-b^2,ab,a\cosh\mu\,,a\sinh\mu) \tag{4.3.30}$$

dir. Burada $\mu = v - \int \frac{\lambda x\prime(u)}{z^2(u) - \lambda^2}du$ şeklindedir.

İspat. Lemma 3.1.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.3.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$ standart ortonormal baz ve $i, j = 1,2,3,4$ için $\eta_{ij} = \eta_i \wedge \eta_j$ olmak üzere (2.16) , (4.3.9), (4.3.11) ve (4.3.13) denklemleri ile verilen X_{2b}, R_{2b}^1, R_{2b}^2 ve R_{2b}^3 zamansal yüzeylerin Gauss tasvirleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\nu_{X_{2b}} &= \frac{\epsilon}{\sqrt{-W}}(-\lambda y'\eta_{12} + (x'z\sinh v - \lambda z'\cosh v)\eta_{13} \\ &\quad +(x'z\cosh v - \lambda z'\sinh v)\eta_{14} + y'z\sinh v\,\eta_{23} + y'z\cosh v\,\eta_{24} + zz'\eta_{34}),\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

$$\nu_{R_{2b}^1} = -\frac{\epsilon zz'}{\sqrt{-W}}(\eta_{12} + a\sin\mu\,\eta_{13} + b\sin\mu\,\eta_{14} - a\cos\mu\,\eta_{23} - b\cos\mu\,\eta_{24}), \tag{4.3.32}$$

$$\begin{aligned}\nu_{R_{2b}^2} &= -\frac{\epsilon zz'}{\sqrt{-W}}(a\cosh\mu\,\eta_{13} + a\sinh\mu\,\eta_{14} + b\cosh\mu\,\eta_{23} + b\sinh\mu\,\eta_{24} \\ &\quad -\eta_{34})\end{aligned} \tag{4.3.33}$$

ve

$$\nu_{R_{2b}^2} = \frac{\epsilon zz'}{\sqrt{-W}}(a\sinh\mu\,\eta_{13} + a\cosh\mu\,\eta_{14} + b\sinh\mu\,\eta_{23} + b\cosh\mu\,\eta_{24} + \eta_{34}) \tag{4.3.34}$$

şeklinde bulunur. Burada $\mu = v + \int \frac{\lambda x\prime(u)}{\lambda^2 - z^2(u)}du$ şeklindedir.

İspat. Teorem 3.1.2'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi izometrik yüzeylerinin aynı Gauss tasvirine sahip olmaları durumunda aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.3.4. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.16), (4.3.11) ve (4.3.13) denklemleri ile verilen X_{2b}, R_{2b}^2 ve R_{2b}^3 zamansal yüzeyleri ele alınsın.

i. Eğer X_{2b} ve R_{2b}^2 yüzeyleri aynı Gauss tasvirine sahip ise bu yüzeyler hiperdüzlemsel ve minimaldir. Bu durumda, X_{2b} ve R_{2b}^2'nin parametrizasyonları,

$$X_{2b}(u, v) = (x(u) + \lambda v\,, c_1, z(u)\cosh v\,, z(u)\sinh v) \tag{4.3.35}$$

ve

$$R_{2b}^{2}(u,v)=\begin{bmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{c_3}}\sinh^{-1}\sqrt{c_3\left(\lambda^2-z^2(u)\right)}+c_4 \\ c_2 \\ \sqrt{\lambda^2-z^2(u)}\sinh\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2-z^2(u)}du\right) \\ \sqrt{\lambda^2-z^2(u)}\cosh\left(v+\int\frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2-z^2(u)}du\right) \end{bmatrix} \tag{4.3.36}$$

elde edilir. Burada, $c_3>0$ olmak üzere, c_1,c_2,c_3,c_4 keyfi sabitler ve

$$x(u)=\pm\left(\sqrt{\frac{1+c_3\lambda^2}{c_3}}\sinh^{-1}\sqrt{c_3\left(\lambda^2-z^2(u)\right)}-\lambda\tanh^{-1}\sqrt{\frac{(1+c_3\lambda^2)\left(\lambda^2-z^2(u)\right)}{\lambda^2\left(1+c_3\left(\lambda^2-z^2(u)\right)\right)}}\right)$$

şeklindedir.

ii. Eğer X_{2b} ve R_{2b}^{3} yüzeyleri aynı Gauss tasvirine sahip ise, bu yüzeyler hiperdüzlemsel ve minimaldir. Bu durumda, X_{2b} ve R_{2b}^{3}'nin parametrizasyonları,

$$X_{2b}(u,v)=(x(u)+\lambda v\,,c_1,z(u)\cosh v\,,z(u)\sinh v) \tag{4.3.37}$$

ve

$$R_{2b}^{3}(u,v)=\begin{bmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{c_3}}\cosh^{-1}\sqrt{c_3(z^2(u)-\lambda^2)}+c_4 \\ c_2 \\ \sqrt{z^2(u)-\lambda^2}\cosh\left(v-\int\frac{\lambda x'(u)}{z^2(u)-\lambda^2}du\right) \\ \sqrt{z^2(u)-\lambda^2}\sinh\left(v-\int\frac{\lambda x'(u)}{z^2(u)-\lambda^2}du\right) \end{bmatrix} \tag{4.3.38}$$

elde edilir. Burada, $c_3>0$ olmak üzere, c_1,c_2,c_3,c_4 keyfi sabitler ve

$$x(u)=\pm\tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+c_3\lambda^2}\sinh^{-1}\sqrt{c_3(z^2(u)-\lambda^2)-1}-\lambda\sqrt{c_3}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{\lambda^2(c_3(z^2(u)-\lambda^2)-1)}{(1+c_3\lambda^2)(z^2(u)-\lambda^2)}}\right)$$

şeklindedir.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_{2b} zamansal helikoidal yüzey, R_{2b}^{2} ve R_{2b}^{3} zamansal dönel yüzeylerin Gauss tasvirlerini sırasıyla (4.3.31), (4.3.33) ve (4.3.34) verilmiştir.

i. X_{2b} zamansal helikoidal yüzey ve R_{2b}^2 zamansal dönel yüzeylerinin aynı Gauss tasvirlerine sahip olduğunu ele alalım. (4.3.31) ve (4.3.33) denklemleri karşılaştırarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\lambda y'(u) = 0, \tag{4.3.39}$$

$$x'(u)z(u)\sinh v - \lambda z'(u)\cosh v = -a(u)z(u)z'(u)\cosh\mu, \tag{4.3.40}$$

$$x'(u)z(u)\cosh v - \lambda z'(u)\sinh v = -a(u)z(u)z'(u)\sinh\mu, \tag{4.3.41}$$

$$y'(u)z(u)\sinh v = -b(u)z(u)z'(u)\cosh\mu, \tag{4.3.42}$$

$$y'(u)z(u)\cosh v = -b(u)z(u)z'(u)\sinh\mu. \tag{4.3.43}$$

(4.3.39) denkleminden $\lambda \neq 0$ olduğundan $u \in I_1$ için $y'(u) = 0$ olur. Ayrıca (4.3.42) ve (4.3.43) denklemlerinden $b(u) = 0$ bulunur. Böylece X_{2b} ve R_{2b}^2 hiperdüzlemseldir. Yani X_{2b} ve R_{2b}^2 yüzeyleri $\mathbb{E}_1^3$'e indirgenir. (4.3.6) ve (4.3.23) denklemlerinden $H_1^{X_{2b}} = 0$ ve $H_1^{R_{2b}^2} = 0$ bulunur. Ayrıca,

$$H_2^{X_{2b}} = \frac{x'z'^2(2\lambda^2 - z^2) - z^2x'^3 + z(\lambda^2 - z^2)(x''z' - x'z'')}{2\left(z^2\left(x'^2 + z'^2\right) - \lambda^2 z'^2\right)^{3/2}} \tag{4.3.44}$$

ve

$$H_2^{R_{2b}^2} = \frac{azz'(a^2 - 1) - a'(z^2 - \lambda^2)}{2zz'\sqrt{(\lambda^2 - z^2)(1-a^2)^3}} \tag{4.3.45}$$

eşitlikler elde edilir. Diğer taraftan (4.3.12) denklemini kullanarak

$$a^2 = \frac{\lambda^2 z'^2 - z^2x'^2}{z^2z'^2} \tag{4.3.46}$$

bulunur. (4.3.46) denklemini (4.3.45)'te yerine yazılarak

$$H_2^{R_{2b}^2} = -\frac{z^2x'\left(x'z'^2(2\lambda^2 - z^2) - z^2x'^3 + z(\lambda^2 - z^2)(x''z' - x'z'')\right)}{2\left(z^2\left(x'^2 + z'^2\right) - \lambda^2 z'^2\right)^{3/2}\sqrt{(\lambda^2 - z^2)(\lambda^2 z'^2 - z^2x'^2)}} \tag{4.3.47}$$

elde edilir. Ayrıca (4.3.40) ve (4.3.41) denklemleri kullanılarak

$$-x'(u)z(u) = a(u)z(u)z'(u)\sinh\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2 - z^2(u)}du\right) \tag{4.3.48}$$

ve

$$\lambda z'(u) = a(u)z(u)z'(u)\sin\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2 - z^2(u)}du\right) \tag{4.3.49}$$

elde edilir. (4.3.48) ve (4.3.49) denklemleri karşılaştırılarak

$$-\frac{x'(u)z(u)}{\lambda z'(u)} = \tanh\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{\lambda^2 - z^2(u)}du\right) \tag{4.3.50}$$

olarak bulunur. (4.3.50) denklemini u'ya göre türevi alındığında

$$x'z'^2(2\lambda^2 - z^2) - x'^3z^2 + z(\lambda^2 - z^2)(x''z' - x'z'') = 0 \tag{4.3.51}$$

elde edilir. Buradan $H_2^{X_{2b}} = H_2^{R_{2b}^2} = 0$ bulunur. Böylece X_{2b} ve R_{2b}^2 yüzeyleri minimaldir. Şimdi bu yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduklarında yüzeylerin parametrizasyonlarını bulalım. Eğer R_{2b}^2 yüzeyi minimal ise, (4.3.45) denkleminden

$$(z^2(u) - \lambda^2)a'(u) + z(u)z'(u)a(u) = z(u)z'(u)a^3(u) \tag{4.3.52}$$

Bernoulli diferansiyel denklemi elde edilir. (4.3.52) denklemi çözülerek

$$a^2 = \frac{1}{1 + c_3(\lambda^2 - z^2)} \tag{4.3.53}$$

bulunur. Burada c_3 keyfi sabittir. Son olarak (4.3.46) ve (4.3.53) denklemleri karşılaştırılarak

$$x(u) = \pm\sqrt{1 + c_3\lambda^2}\int \frac{z'(u)}{z(u)}\sqrt{\frac{\lambda^2 - z^2(u)}{1 + c_3(\lambda^2 - z^2(u))}}\,du \tag{4.3.54}$$

elde edilir. Burada $c_3 > 0$ şeklindedir. Ayrıca R_{2b}^2 yüzeyinin son bileşeni

$$\int \frac{z(u)z'(u)}{\sqrt{(\lambda^2 - z^2(u))\left(1 + c_3(\lambda^2 - z^2)\right)}}\,du = \pm\frac{1}{\sqrt{c_3}}\sinh^{-1}\sqrt{c_3(\lambda^2 - z^2(u))} + c_4 \tag{4.3.55}$$

şeklinde bulunur. Burada c_4 keyfi sabittir. Böylece istenen sonuç elde edilir.

Ikawa (2001) $\mathbb{E}_1^3$ uzayında izometrik yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduğu yüzeyleri belirlemiştir. Eğer Teorem 4.3.4'de verilen X_{2b} ve R_{2b}^2 izometrik yüzeylerde $z(u) = u$ alınırsa, Ikawa (2001)'nın elde ettiği yüzeyler ile çakıştığı görülür.

ii. X_{2b} zamansal helikoidal yüzey ve R^3_{2b} zamansal dönel yüzeylerinin aynı Gauss tasvirlerine sahip olduğunu ele alalım. (4.3.31) ve (4.3.34) denklemleri karşılaştırarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\lambda y'(u) = 0, \tag{4.3.56}$$

$$x'(u)z(u)\sinh v - \lambda z'(u)\cosh v = a(u)z(u)z'(u)\sinh\mu, \tag{4.3.57}$$

$$x'(u)z(u)\cosh v - \lambda z'(u)\sinh v = a(u)z(u)z'(u)\cosh\mu, \tag{4.3.58}$$

$$y'(u)z(u)\sinh v = b(u)z(u)z'(u)\sinh\mu, \tag{4.3.59}$$

$$y'(u)z(u)\cosh v = b(u)z(u)z'(u)\cosh\mu. \tag{4.3.60}$$

(4.3.56) denkleminden $\lambda \neq 0$ olduğundan $u \in I_2$ için $y'(u) = 0$ olur. Ayrıca (4.3.59) ve (4.3.60) denklemlerinden $b(u) = 0$ bulunur. Böylece X_{2b} ve R^3_{2b} hiperdüzlemseldir. Yani X_{2b} ve R^3_{2b} yüzeyleri $\mathbb{E}^3_1$'e indirgenir. (4.3.6) ve (4.3.27) denklemlerinden $H_1^{X_{2b}} = 0$ ve $H_1^{R^3_{2b}} = 0$ bulunur. Ayrıca,

$$H_2^{X_{2b}} = \frac{x'z'^2(z^2-2\lambda^2) + z^2x'^3 + z(\lambda^2-z^2)(x'z'' - x''z')}{2\left(z^2\left(x'^2+z'^2\right) - \lambda^2z'^2\right)^{3/2}} \tag{4.3.61}$$

ve

$$H_2^{R^3_{2b}} = \frac{azz'(1+a^2) + a'(z^2-\lambda^2)}{2zz'\sqrt{(z^2-\lambda^2)(1+a^2)^3}} \tag{4.3.62}$$

eşitlikler elde edilir. Diğer taraftan (4.3.14) denklemini kullanarak

$$a^2 = \frac{z^2x'^2 - \lambda^2z'^2}{z^2z'^2} \tag{4.3.63}$$

bulunur. (4.3.63) denklemini (4.3.62)'te yerine yazılarak

$$H_2^{R^3_{2b}} = \frac{z^2x'\left(x'z'^2(z^2-2\lambda^2) + z^2x'^3 + z(\lambda^2-z^2)(x'z'' - x''z')\right)}{2\left(z^2\left(x'^2+z'^2\right) - \lambda^2z'^2\right)^{3/2}\sqrt{(z^2-\lambda^2)(z^2x'^2-\lambda^2z'^2)}} \tag{4.3.64}$$

elde edilir. Ayrıca (4.3.57) ve (4.3.58) denklemleri kullanılarak

$$x'(u)z(u) = a(u)z(u)z'(u)\cosh\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{z^2(u)-\lambda^2}du\right) \tag{4.3.65}$$

ve

$$\lambda z'(u) = a(u)z(u)z'(u)\sinh\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{z^2(u)-\lambda^2}du\right) \tag{4.3.66}$$

elde edilir. (4.3.65) ve (4.3.66) denklemleri karşılaştırılarak

$$\frac{x'(u)z(u)}{\lambda z'(u)} = \coth\left(\int \frac{\lambda x'(u)}{z^2(u)-\lambda^2}du\right) \tag{4.3.67}$$

olarak bulunur. (4.3.67) denklemini u'ya göre kısmi türevi alındığında

$$x'z'^2(z^2-2\lambda^2)+x'^3z^2+z(\lambda^2-z^2)(x'z''-x''z')=0 \tag{4.3.68}$$

elde edilir. Buradan $H_2^{X_{2b}} = H_2^{R_{2b}^3} = 0$ bulunur. Böylece X_{2b} ve R_{2b}^3 yüzeyleri minimaldir. Şimdi bu yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduklarında yüzeylerin parametrizasyonlarını bulalım. Eğer R_{2b}^3 yüzeyi minimal ise, (4.3.62) denkleminden

$$(z^2(u)-\lambda^2)a'(u)+z(u)z'(u)a(u) = -z(u)z'(u)a^3(u) \tag{4.3.69}$$

Bernoulli diferansiyel denklemi elde edilir. (4.3.69) denklemi çözülerek

$$a^2 = \frac{1}{c_3(z^2-\lambda^2)-1} \tag{4.3.70}$$

bulunur. Burada c_3 keyfi sabittir. Son olarak (4.3.70) ve (4.3.63) denklemlerini karşılaştırılarak

$$x(u) = \pm\sqrt{1+c_3\lambda^2}\int \frac{z'(u)}{z(u)}\sqrt{\frac{z^2(u)-\lambda^2}{c_3(z^2(u)-\lambda^2)-1}}\,du \tag{4.3.71}$$

elde edilir. Burada $c_3 > 0$ şeklindedir. Ayrıca R_{2b}^3 yüzeyinin son bileşeni

$$\int \frac{z(u)z'(u)}{\sqrt{(z^2(u)-\lambda^2)(c_3(z^2(u)-\lambda^2)-1)}}\,du = \pm\frac{1}{\sqrt{c_3}}\cosh^{-1}\sqrt{c_3(z^2(u)-\lambda^2)}+c_4 \tag{4.3.72}$$

şeklinde bulunur. Burada c_4 keyfi sabittir. Böylece istenen sonuç elde edilir. Ikawa (2001) $\mathbb{E}_1^3$ uzayında izometrik yüzeylerin aynı Gauss tasvirine sahip olduğu yüzeyleri belirlemiştir. Eğer Teorem 4.3.4'de verilen X_{2b} ve R_{2b}^3 izometrik yüzeylerde $z(u) = u$ alınırsa, Ikawa (2001)'nın elde ettiği yüzeyler ile çakıştığı görülür. (2.16) denklemiyle verilen X_{2b} helikoidal yüzeyinde eğer $x'(u) = 0$ alınırsa, X_{2b} helikoidal yüzeyi dik helikoidal yüzeyine indirgenir. Ayrıca bu durum altında yüzeyi dik helikoidal yüzey ve R_{2b}^3 yüzeyin aynı Gauss tasvirine sahip olduğunda $a^2 = -\frac{\lambda^2}{z^2(u)}$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla Gauss tasviri birbirinden farklıdır.

Teorem 4.3.5. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.16) denklemi ile verilen X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyi ve (4.3.9) denklemi ile verilen R_{2b}^1 zamansal dönel yüzeylerini düşünelim. X_{2b} ve R_{2b}^1 yüzeylerin Gauss tasviri birbirinden farklıdır.

İspat. X_{2b} ve R_{2b}^1 yüzeylerin sırasıyla (4.3.31) ve (4.3.32) denklemlerinde Gauss tasvirleri verilmiştir. Bu yüzeylerin Gauss tasvirlerini karşılaştırarak $z(u) = 0$ veya $z'(u) = 0$ bulunur. Böylece $\nu_{R_{2b}^1} = 0$ elde edilir ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla X_{2b} ve R_{2b}^1 yüzeylerinin Gauss tasvirleri birbirinden farklıdır.

Şimdi izometrik yüzeylerin aynı Gauss eğriliklerine sahip olduklarını (yani Gauss Egregium teoremini sağladıklarını) aşağıdaki teorem yardımıyla gösterilir.

Teorem 4.3.6. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.16) denklemiyle verilen X_{2b} zamansal helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği, sırasıyla (4.3.9) denklemiyle verilen R_{2b}^1 zamansal dönel yüzeyin ve (4.3.11) denklemiyle verilen R_{2b}^2 zamansal dönel yüzeyin Gauss eğrilikleri aynıdır.

İspat. Teorem 3.1.5'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Son olarak, Teorem 4.3.4'ü kullanarak, izometrik ve aynı Gauss tasvirine sahip olan yüzeyler için bir örnek verilecektir.

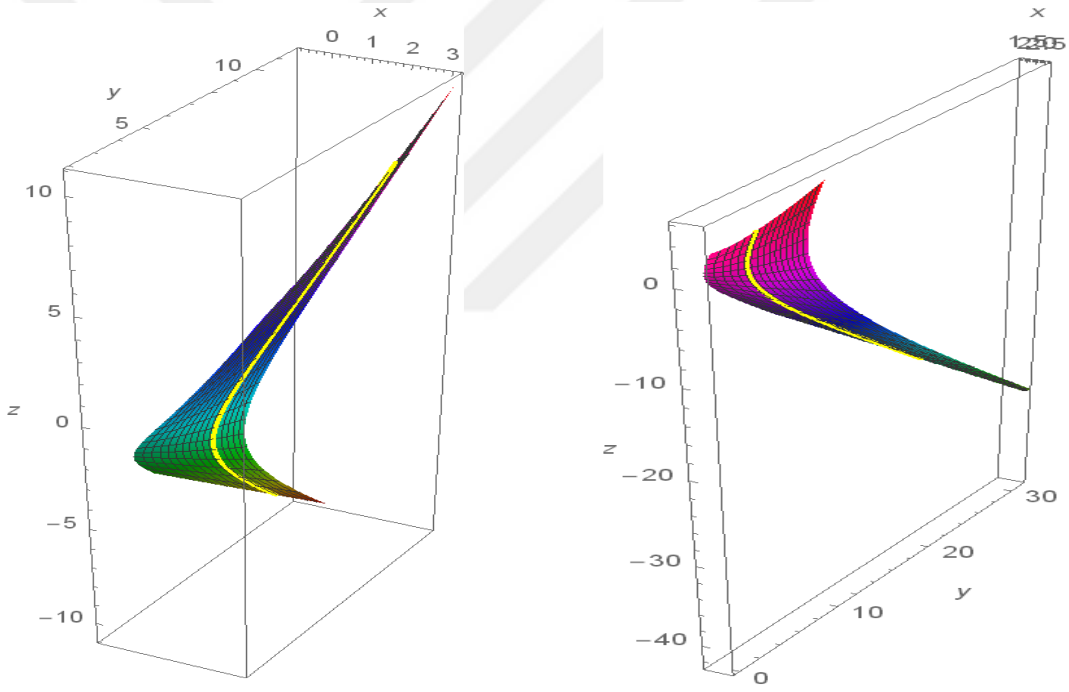
Örnek 4.3.1. Teorem 4.3.4'de verilen X_{2b} ve R_{2b}^2 zamansal yüzeylerini ele alalım. Eğer $z(u) = u$, $\lambda = 1$, $c_3 = \frac{1}{2}$ ve $c_4 = 0$ alınırsa, bu yüzeylerin parametrizasyonları;

$$X_{2b}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{u^2-3}{2}} - \frac{1}{2}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{u^2-3}{3u^2-3}} + v \\ c_1 \\ u\cosh v \\ u\sinh v \end{bmatrix} \tag{4.3.73}$$

ve

$$R_{2b}^{2}(u,v)=\begin{bmatrix} \sqrt{2}\cosh^{-1}\sqrt{\dfrac{u^2-1}{2}} \\ c_2 \\ \sqrt{u^2-1}\cosh\left(v-\tanh^{-1}\sqrt{\dfrac{u^2-3}{3u^2-3}}\right) \\ \sqrt{u^2-1}\sinh\left(v-\tanh^{-1}\sqrt{\dfrac{u^2-3}{3u^2-3}}\right) \end{bmatrix} \tag{4.3.74}$$

şeklindedir. Wolfram Mathematica 10.4 proramını kullanarak, $2 \leq u \leq 8$ ve $-1 \leq v \leq 1$ aralıkları için, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında helikoidal yüzey X_{2b} ve zamansal dönel yüzey $R_{2b}^{2}{}'$in grafikleri aşağıdaki şekilde çizilir.



(a) (b)

Şekil 4.3.1 (a) IIb. tip zamansal helikoidal yüzey; zamansal helis (b) zamansal dönel yüzey; zamansal hiperbol.

4.4. Minkowski uzay-zamanda III. Tip Zamansal Helikoidal Yüzey

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında, (2.17) denklemiyle verilen X_3'ün parametrik denkleminin sırasıyla u ve v'ye göre kısmi türevleri alınarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$X_{3_u} = \left(x'(u)\eta_1 + \sqrt{2}vw'(u)\eta_2 + \left(z'(u) + v^2w'(u)\right)\xi_3 + w'(u)\xi_4\right)$$

ve

$$X_{3_v} = \sqrt{2}w(u)\eta_2 + 2vw(u)\xi_3.$$

Böylece helikoidal yüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$g_{11} = x'^2(u) - 2w'(u)z'(u), \quad g_{12} = -\lambda w'(u) \text{ ve } g_{22} = 2w^2(u) \tag{4.4.1}$$

şeklinde elde edilir. X_3 helikoidal yüzeyin zamansal olması için her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W = 2w^2(u)\left(x'^2(u) - 2w'(u)z'(u)\right) - \lambda^2 w'^2(u) < 0$ olmalıdır.

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında e_1 ve e_2 vektörleri X_3'e teğet ve N_1, N_2 vektörleri X_3'e normal olacak şekilde X_3 yüzeyi üzerinde tanımlı $\{e_1, e_2, N_1, N_2\}$ şeklinde yönlendirilmiş bir ortonormal çatı alanı

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon g_{11}}} X_{3_u}, \; e_2 = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon W g_{11}}}\left(g_{11}X_{3_v} - g_{12}X_{3_u}\right), \tag{4.4.2}$$

$$N_1 = \eta_1 + \frac{x'}{w'}\xi_3, \tag{4.4.3}$$

$$\begin{aligned} N_2 \; = & \frac{1}{w'\sqrt{-W}}(\sqrt{2}\,x'ww'\eta_1 + \left(\lambda w'^2 + 2vww'^2\right)\eta_2 \\ & + \sqrt{2}\left(\lambda vw'^2 + v^2ww'^2 + wx'^2 - ww'z'\right)\xi_3 + \sqrt{2}ww'^2\xi_4) \end{aligned} \tag{4.4.4}$$

olarak seçilebilir. Burada $\langle e_1, e_1\rangle = -\langle e_2, e_2\rangle = \epsilon$ ve $\langle N_1, N_1\rangle = \langle N_2, N_2\rangle = 1$ şeklindedir. Eğer $\epsilon = 1$ ise X_3 yüzeyi uzaysal meridyene sahiptir. Aksi taktirde zamansal meridyene sahiptir. Gerekli hesaplamalar yapılarak, X_3 yüzeyine ait ikinci temel form katsayıları:

$$\begin{aligned} & b_{11}^1 = \frac{x''w' - x'w''}{w'}, \quad b_{12}^1 = b_{21}^1 = b_{22}^1 = 0, \; b_{11}^2 = \\ & \frac{\sqrt{2}w(x'x''w' - x'^2w'' + w'(w''z' - w'z''))}{w'\sqrt{-W}}, \; b_{12}^2 = b_{21}^2 = \frac{\sqrt{2}\lambda w'^2}{\sqrt{-W}}, \; b_{22}^2 = -\frac{2\sqrt{2}w^2w'}{\sqrt{-W}} \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

şeklinde elde edilir. İkinci temel form katsayıları göz önünde bulundurularak, X_3 yüzeyin ortalama eğrilik vektörünün bileşenleri $H_i^{X_3}$ (i = 1,2), sırasıyla

$$H_1^{X_3} = \frac{w^2}{w'W}(x''w' - x'w'') \tag{4.4.6}$$

ve

$$H_2^{X_3} = \frac{-\sqrt{2}}{w'(-W)^{3/2}}(\lambda^2 w'^4 + 2w^2 w'^3 z' - w^3 x'^2 w'' + w^3 w'(z'w'' + x'x'') - w^2 w'^2(x'^2 + wz'')) \tag{4.4.7}$$

elde edilir. Ayrıca (4.5.5)'deki eşitlikler kullanılarak, X_3 zamansal helikoidal yüzeyinin Gauss eğriliği $K^{X_{2b}}$,

$$K^{X_3} = \frac{1}{W^2}\left(2\lambda^2 w'^4 - 4w^3 w'' + w'(w''z' - w'z'' + x'x'')\right) \tag{4.3.8}$$

X_3 zamansal helikoidal yüzeye Bour teoremine göre izometrik olan dönel yüzey aşağıdaki teorem yardımıyla belirlenecektir.

Teorem 4.4.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.17) ile verilen X_3 zamansal helikoidal yüzey aşağıdaki R_3 dönel yüzeyine izometriktir:

$$R_3(u,v) = \int a(u)w'(u)du\eta_1 + \sqrt{2}w(u)\left(v + \frac{\lambda}{2w(u)}\right)\eta_2 + \left(\int b(u)w'(u)du + w(u)\left(v + \frac{\lambda}{2w(u)}\right)^2\right)\xi_3 + w(u)\xi_4 \tag{4.4.9}$$

öyleki, X_3 zamansal helikoidal yüzey üzerindeki helisler, R_3 zamansal dönel yüzey üzerindeki parallel parabollere karşılık gelir. Burada, $a(u)$ ve $b(u)$ eşitliğini sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$$a^2(u) - 2b(u) = \frac{x'^2(u) - 2w'(u)z'(u)}{w'^2(u)} - \frac{\lambda^2}{2w^2(u)}. \tag{4.4.10}$$

Burada, her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $w'(u) \neq 0$ dır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.17) denklemi ile verilen X_3 helikoidal yüzeyi ele alınsın. (4.4.1) denklemini kullanarak X_3 helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriği

$$ds_{X_3}^2 = \left(x'^2(u) - 2w'(u)z'(u)\right)du^2 - 2\lambda w'(u)dudv + 2w^2(u)dv^2 \tag{4.4.11}$$

şeklindedir. Şimdi X_1 zamansal helikoidal yüzeye benzer, ortogonal olan v-parametreli bir eğri ile X_3 zamansal helikoidal yüzeyin indirgenmiş metriğini yeniden aşağıdaki gibi parametrelenebilir.

$$ds_{X_3}^2 = \left(x'^2(u) - 2w'(u)z'(u) - \frac{\lambda^2 w'^2(u)}{2w^2(u)}\right)du^2 + 2w^2(u)d\bar{v}^2 \tag{4.4.12}$$

Burada $\bar{v} = v + \frac{\lambda}{2w(u)}$'dur. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_3 helikoidal yüzeyin zamansal olması için her $u \in I \subset \mathbb{R}$ için $W < 0$ olmalıdır.

X_3 zamansal helikoidal yüzeyine izometrik yüzeyi bulmak için aşağıda R_3 dönel yüzeyin yer vektörleri verilir.

$$R_3(k,t) = n(k)\eta_1 + \sqrt{2}tr(k)\eta_2 + \left(\mathrm{s(k)} + \mathrm{t}^2 r(k)\right)\xi_3 + r(k)\xi_4 \tag{4.4.13}$$

ele alalım. $R_3(k,t)$'nin indirgenmiş metriği

$$ds_{R_3}^2 = \left(\dot{n}^2(k) - 2\dot{r}(k)\dot{s}(k)\right)dk^2 + 2r^2(k)dt^2 \tag{4.4.14}$$

şeklindedir. Burada $r(k) > 0$'dır. (4.4.12) denklemi ve (4.4.14) denklemi karşılaştırılarak, $\bar{v}$=t, $r(k) = w(u)$ ve

$$\left(\dot{n}^2(k) - 2\dot{r}(k)\dot{s}(k)\right)dk^2 = \left(x'^2(u) - 2w'(u)z'(u) - \frac{\lambda^2 w'^2(u)}{2w^2(u)}\right)du^2 \tag{4.4.15}$$

şeklinde alınarak, X_3 ve R_3 yüzeylerin arasında izometri bulunur. Ayrıca $a(u) = \frac{n'(u)}{r'(u)}$ ve $b(u) = \frac{s'(u)}{r'(u)}$ şeklinde tanımlanırsa (4.4.15) denkleminden (4.4.10) eşitliği elde edilir. Böylece

$$n(u) = \int a(u)w'(u)du \text{ ve } s(u) = \int b(u)w'(u)du \tag{4.4.16}$$

bulunur. Sonuç olarak (4.4.9) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_3, (2.17) ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_3'e Bour teoremine göre izometriktir. u_0 keyfi bir sabit olmak üzere X_3 zamansal helikoidal yüzeyi üzerinde bir $X_3(u_0, v)$ olacak şekilde bir uzaysal helis ele alalım. X_3 zamansal helikoidal yüzeyi üzerindeki $X_3(u_0, v)$ uzaysal helisleri, R_3 zamansal dönel yüzeyi üzerindeki uzaysal parabollere karşılık gelir. Bu uzaysal parabollerin oluşturduğu eğri, c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $R_3(u_0, v) =$

$c_1\eta_1 + \sqrt{2}w_0\left(v + \frac{\lambda}{2w_0}\right)\eta_2 + \left(c_2 + w_0\left(v + \frac{\lambda}{2w_0}\right)^2\right)\xi_3 + w_0\xi_4$ şeklindedir. Eğer $t = v + \frac{\lambda}{2w_0}$ alınırsa bu eğrinin yeni parametrizasyonu $\alpha(t) = \sqrt{2}w_0\left(0, t, -\frac{t^2}{2}, \frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}c_1, 0, w_0 - c_2, w_0 + c_2\right)$ elde edilir (Kaya ve Lopez, 2022).

Teorem 4.4.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $\{\eta_1, \eta_2, \xi_3, \xi_4\}$ standart ortonormal baz olmak üzere (2.13) ve (4.4.9) denklemleri ile verilen X_3 ve R_3 zamansal yüzeylerin Gauss tasvirleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}\nu_{X_3} &= \frac{\epsilon}{\sqrt{-W}}(\sqrt{2}x'w\eta_1 \wedge \eta_2 + x'(\lambda + 2vw)\eta_1 \wedge \xi_3 + \sqrt{2}(v^2ww' - wz' \\ &+\lambda vw')\eta_2 \wedge \xi_3 - \sqrt{2}ww'\eta_2 \wedge \xi_4 - w'(\lambda + 2vw)\xi_3 \wedge \xi_4)\end{aligned} \tag{4.4.17}$$

ve

$$\begin{aligned}\nu_{R_3} &= \frac{\epsilon ww'}{\sqrt{-W}}(\sqrt{2}a\eta_1 \wedge \eta_2 + 2a(v + \frac{\lambda}{2w})\eta_1 \wedge \xi_3 + \sqrt{2}((v + \frac{\lambda}{2w})^2 - b)\eta_2 \wedge \xi_3 \\ &-\sqrt{2}\eta_2 \wedge \xi_4 - (2v + \frac{\lambda}{w})\xi_3 \wedge \xi_4)\end{aligned} \tag{4.4.18}$$

şeklinde bulunur.

İspat. Teorem 3.1.2'nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.4.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.17) denklemi ile verilen zamansal helikoidal yüzey X_3 ve (4.4.9) denklemi ile verilen zamansal dönel yüzey R_3'ün Gauss tasvirleri aynıdır.

İspat. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında X_3 zamansal helikoidal yüzey ve R_3 zamansal dönel yüzeyin Gauss tasvirleri sırasıyla (4.4.17) ve (4.4.18)'te verilmiştir. Bu denklemler karşılaştırarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$x'(u) = a(u)w'(u), \tag{4.4.19}$$

$$x'(u)(\lambda + 2vw(u)) = 2a(u)w(u)w'(u)\left(v + \frac{\lambda}{2w(u)}\right), \tag{4.4.20}$$

$$w(u)z'(u) = b(u)w(u)w'(u) - \frac{\lambda^2 w'(u)}{4w(u)}. \tag{4.4.21}$$

(4.4.19) ve (4.4.21) denklemlerinden $a(u)$ ve $b(u)$ elde edilir. Eğer bu fonksiyonlar (4.4.10) denkleminde yerine yazılırsa yüzeylerin aynı Gauss tasvirlerine sahip olduğu bulunur.

Şimdi izometrik yüzeylerin aynı Gauss eğriliklerine sahip olduklarını (yani Gauss Egregium teoremini sağladıklarını) aşağıdaki teorem yardımıyla gösterilir.

Teorem 4.4.4. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında (2.17) denklemiyle verilen X_3 zamansal helikoidal yüzeyin Gauss eğriliği ve (4.4.9) denklemiyle verilen R_3 zamansal dönel yüzeyin Gauss eğriliği aynıdır.

İspat. Teorem 3.1.5'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Son olarak, Teorem 4.4.1'i kullanarak aşağıdaki örnek verilir.

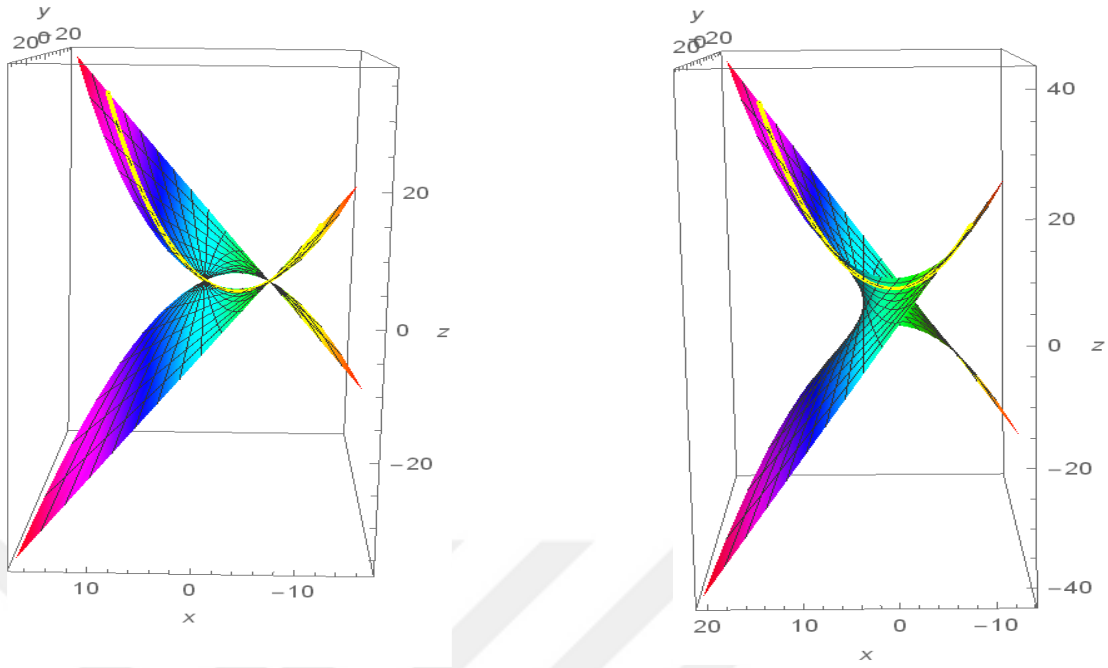
Örnek 4.4.1. Teorem 4.4.1'de verilen X_3 ve R_3 yüzeylerini ele alalım. Eğer $x(u) = a(u) = 0, \quad z(u) = w(u) = u, \quad \lambda = 5, \quad$ ve $\quad c_4 = 0$ alınırsa, bu yüzeylerin parametrizasyonları;

$$X_3(u,v) = \sqrt{2}uv\eta_2 + (\mathrm{u} + uv^2 + 5v)\xi_3 + u\xi_4 \tag{4.4.22}$$

ve

$$R_3(u,v) = \left(\sqrt{2}uv + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\eta_2 + \left(\mathrm{u} - \frac{25}{4u} + u\left(v + \frac{5}{2u}\right)^2\right)\xi_3 + u\xi_4 \tag{4.4.23}$$

şeklinde elde edilir. Wolfram Mathematica 10.4 proramını kullanarak, $-4 \leq u \leq 4$ ve $-3 \leq v \leq 3$ aralıkları için, $\mathbb{E}_1^3$ uzayında zamansal helikoidal yüzey X_3 ve zamansal dönel yüzey $R_3{}'$ün grafikleri aşağıdaki şekilde çizilir.



(a) (b)

Şekil 4.4.1 (a) III. tip zamansal helikoidal yüzey; uzaysal helis (b) zamansal dönel yüzey; uzaysal parabol.

5. KAYNAKLAR

Babaarslan, M., Yaylı, Y. (2015). Differential Equation of the Loxodrome on a Helicoidal Surface. *Journal of Navigation*, 68, 962-970.

Babaarslan, M., Kayacık, M. (2017). Time-like Loxodromes on Helicoidal Surfaces in Minkowski 3-Space. *Filomat*, 31, 4405-4414.

Babaarslan, M., Kayacık, M. (2020). Differential Equations of the Space-Like Loxodromes on the Helicoidal Surfaces in Minkowski 3-Space. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 28, 495-512.

Babaarslan, M., Sönmez, N. (2021). Loxodromes on Non-Degenerate Helicoidal Surfaces in Minkowski Space-Time. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 52, 1212-1228.

Babaarslan M., Demirci B. B., Küçükarıkan Y. (2023). Bour's theorem of spacelike surfaces in Minkowski 4-space. *Results in Mathematics*, 78, 12. https://doi.org/10.1007/s00025-022-01780-8.

Baikoussis, C., Koufogiorgos, T. (1998). Helicoidal surfaces with prescribed mean or Gaussian curvature. *Journal of Geometry*, 63, 25-29.

Bektaş, B., Dursun, U. (2015). Timelike Rotational Surface of Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types in Minkowski Space $\mathbb{E}_1^4$ with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Filomat*, 29, 381-392.

Beneki, Chr C., Kaimakamis, G., Papantoniou, B. J. (2002). Helicoidal surfaces in three-dimensional Minkowski space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 275, 586-614.

Bour, E. (1862). Memoire sur le deformation de surfaces. Journal de l'Ecole Polytechnique, XXXIX *Cahier*, 1-148.

Cabrerizo, J. L., Fernandez, M., Gomez, J. S. (2010). Isotropy and marginally trapped surfaces in a spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 27, 135005.

Chen, B. Y., Piccinni, P. (1987). Submanifolds with finite type Gauss map. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 35, 161--186.

Chen, B. Y., Li, S. J. (1998). Spherical Hypersurfaces with 2-Type Gauss Map. *Beiträge zur Algebra und Geometrie*, 39, 169-179.

Choi, M. K., Kim, Y. H., Park, G. C. (2009). Helicoidal surfaces and their Gauss map in Minkowski 3-space II. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 46, 567-576.

Choi, M. K., Kim, Y. H., Liu, H., Yoon, D. W. (2010). Helicoidal surfaces and their Gauss map in Minkowski 3-space. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 47, 859-881.

Demirci B. B., Babaarslan M., Küçükarıkan Y. (2023). Isometric timelike surfaces in 4-dimensional Minkowski space, bkz. arXiv:2209.14920.

Do Carmo, M. P., Dajczer, M. (1982). Helicoidal surfaces with constant mean curvature. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 34, 425-435.

Dursun, U., Bektaş, B. (2014). Spacelike Rotational Surface of Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types in Minkowski Space $\mathbb{E}_1^4$ with Pointwise 1-Type Gauss Map. *Mathematical Physics Analysis and Geometry*, 17, 247-263.

Güler, E., Vanlı, A. T. (2006). Bour's Theorem in Minkowski 3-space. *Journal Mathematics of Kyoto University*, 46, 47-63.

Güler, E., Yaylı, Y., Hacısalihoğlu, H. H. (2010). Bour's Theorem on the Gauss Map in 3-Euclidean Space. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 39, 515-525.

Güler, E., Yaylı, Y. (2015). Generalized Bour's Theorem. *Kuwait Journal of Science*, 42, 79-90.

Hieu, D. T., Thang, N. N. (2017). Bour's Theorem in 4-dimensional Euclidean Space. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 54, 2081-2089.

Ikawa, T. (2000). Bour's Theorem and Gauss Map. *Yokohama Mathematical Journal*, 48, 174-180.

Ikawa, T. (2001). Bour's Theorem in Minkowski Geometry. *Tokyo Journal Mathematics*, 24, 377-394.

Karacan, M. K., Tuncer Y., Yüksel N., (2020). Classifications of conformal rotational surfaces in Euclidean 3-space. *Applied Mathematics and Computation*, 220, 1-11.

Kaya, S., Lopez, R. (2022). Riemann zero mean curvature examples in Lorentz-Minkowski space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45, 5067-5085.

Ji, F., Hou, Z. H. (2005). A kind of helicoidal surfaces in 3-dimensional Minkowski space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 304, 632-643.

Ji, F., Kim, Y. H. (2010). Mean curvatures and Gauss maps of a pair of isometric helicoidal and rotation surfaces in Minkowski 3-space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 368, 623-635.

Ji, F., Kim, Y. H. (2013). Isometries between minimal helicoidal surfaces and rotation surfaces in Minkowski space. *Applied Mathematics and Computation*, 220, 1-11.

Kim, Y. H., Turgay, N. C. (2013). Classifications of helicoidal surfaces with L_1-pointwise 1-type Gauss map. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50, 1345-1356.

López, R., Demir, E. (2014). Helicoidal surfaces in Minkowski space with constant mean curvature and constant Gauss curvature. *Open Mathematics*, 12, 1349-1361.

Moore, C. L. E. (1919). Surfaces of Rotation in a Space of Four Dimensions. *Annals of Mathematics*, 21, 81-93.

O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Pure and Applied Mathematics. New York: Academic Press.

Oprea, J. (1997). *Differential Geometry and its Applications.* New Jersey: MMA Press.

Ratcliffe, J. G. (2006). *Foundations of Hyperbolic Manifolds (Second Edition).* New York: Springer.

Sasahara, N. (2000) Spacelike helikoidal surfaces with constant mean curvature in Minkowski 3-space. *Tokyo Journal Mathematics*, 23, 477-502.

Turgay, N. C. (2014). On the marginally trapped surfaces in 4-dimensional space-times with finite type Gauss map. *General Relativity and Gravitation*, 46, 1–17.