T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI ÜZERİNE

ESRA TURHAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

YOZGAT – 2023

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI ÜZERİNE

ESRA TURHAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

YOZGAT – 2023

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ONAY FORMU

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111319009 numaralı öğrencisi Esra TURHAN'ın hazırladığı "**Özel Sayı Dizilerinin Kuaterniyonları Üzerine**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 19/01/2023 Perşembe günü saat 11:00' da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan :
Jüri Üyesi : (Danışman)
Jüri Üyesi :

ONAY:
Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ……../……../….. tarih ve ……sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

…...../……../.....
Prof. Dr. Hamdi TEMEL
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Müdürü

KYT-FRM-110/00

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

ESRA TURHAN

19/01/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI ÜZERİNE

ESRA TURHAN

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. FUNDA TAŞDEMİR

Bu tez çalışmasında özel sayı dizilerinin kuaterniyonları (dördeyler) ile ilgili detaylı bir çalışma yapılmıştır. Özellikle Tribonacci kuaterniyonlar ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlar ayrıntılı olarak incelenmiş ve farklı bir Fibonacci kuaterniyon matris kullanılarak temel özdeşlikler yeniden ispatlanmıştır. Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun detaylı bir literatür incelemesi verilmiştir. İkinci bölümde, tez çalışması boyunca geçen kavramlar ve yararlanılan teoremler temel bilgiler olarak verilmiştir. Üçüncü bölümde ise kuaterniyonlar ve kuaterniyonların temel özelliklerine yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, Fibonacci, Lucas gibi özel sayı dizilerinin kuaterniyonları ve özellikleri detaylı olarak çalışılmıştır. Beşinci bölümde, Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayı dizilerinin kuaterniyonları verilmiş ve Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlarının sağladığı bazı özdeşlikler ispatlanmıştır. Altıncı bölümde ise alınan farklı bir Fibonacci kuaterniyon matris kullanılarak Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar için Cassini özdeşliği gibi bilinen bazı temel özdeşlikler yeniden ispatlanmıştır. Sonuç ve öneriler bölümünde ise yapılan çalışmanın kısa bir özeti verildikten sonra tezin literatüre katkısı ve ileriki çalışmalara yönelik bazı öneriler sunulmuştur.

2023, viii+48 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Fibonacci kuaterniyonlar, Lucas kuaterniyonlar, Tribonacci kuaterniyonlar, Tribonacci-Lucas kuaterniyonlar

ABSTRACT

MASTER THESIS

ON QUATERNIONS OF SPECIAL NUMBER SEQUENCES

ESRA TURHAN

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: DOÇ. DR. FUNDA TAŞDEMİR

In this thesis a detailed study is made about the quaternions of special number sequences. Especially Tribonacci quaternions and Tribonacci-Lucas quaternions are examined in detail and fundamental identities are reproved again by using a different Fibonacci quaternion matrix. This thesis consists of seven sections. In the first section, a detailed literature review of the subject is given. In the second section, the concepts and theorems used throughout the thesis are given as fundamental information. In the third section, quaternions and their fundamental properties are given. In the fourth section, quaternions and properties of special number sequences such as Fibonacci and Lucas are studied in detail. In the fifth section, the quaternions of Tribonacci and Tribonacci-Lucas number sequences are given and some identities of Tribonacci and Tribonacci-Lucas quaternions are proved. In the sixth section, some known fundamental identities such as Cassini identity for Fibonacci and Lucas quaternions are reproved by using a different Fibonacci quaternion matrix. In the Conclusion and Suggestions section, after giving a brief summary of the study, the contribution of the thesis to the literature and some suggestions for future studies are presented.

2023, viii+48 PAGE

KEYWORDS: Fibonacci quaternions, Lucas quaternions, Tribonacci quaternions, Tribonacci-Lucas quaternions

ÖNSÖZ

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve her safhasında bilgisine başvurduğum danışmanım Sayın Hocam Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR'e teşekkürü bir borç bilirim. Yine bu çalışmanın hazırlanması aşamasında düşünce ve önerileriyle desteklerini esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Handan KÖSE ve Doç. Dr. Mehmet EKİCİ hocalarıma şükranlarımı sunarım. Ayrıca kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'ndeki bütün hocalarıma ve değerli eşim Mehmet TURHAN'a ve aileme desteklerinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

ESRA TURHAN

19/01/2023

İÇİNDEKİLER

Tez Onay Sayfası…….. ii

Tez Beyanı…….. iii

Özet…….. iv

Abstract…… v

Önsöz…… vi

İçindekiler…… vii

Simgeler ve Kısaltmalar Listesi…… viii

1. GİRİŞ…… 1

2. TEMEL BİLGİLER..……...…… 3

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları……... 3

2.2. Fibonacci Matris…… 12

3. KUATERNİYONLAR…….. 14

4. ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI…… 17

4.1. Fibonacci Kuaterniyonlar…….. 17

4.2. Lucas Kuaterniyonlar…….. 24

4.3. Pell Kuaterniyonlar……. 27

4.4. Pell-Lucas Kuaterniyonlar…….. 28

4.5. Jacobsthal Kuaterniyonlar…… 28

4.6. Jacobsthal-Lucas Kuaterniyonlar……. 29

5. TRIBONACCI KUATERNİYONLAR……. 30

6. FIBONACCI ve LUCAS KUATERNİYONLAR İÇİN BAZI ÖZELLİKLER …….. 39

7. SONUÇ ve ÖNERİLER…….. 45

8. KAYNAKLAR…….. 46

ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
F_m	: m. Fibonacci sayısı
J_n	: n. Jacobsthal sayısı
j_n	: n. Jacobsthal-Lucas sayısı
$\mathcal{K}_n$	: n. Lucas kuaterniyon
K_n	: n. Tribonacci-Lucas sayısı
L_m	: m. Lucas sayısı
N_q	: q Kuaterniyon normu
P_n	: n. Pell sayısı
T_n	: n. Tribonacci sayısı
q^{-1}	: q Kuaterniyon tersi
$\overline{q}$	: q Kuaterniyon eşleniği
Q	: Fibonacci matris
Q_F	: Fibonacci kuaterniyon matris
$\mathcal{Q}_n$	: n. Tribonacci kuaterniyon
$\tilde{\mathcal{Q}}_n$	: n. Tribonacci-Lucas kuaterniyon
Q_n	: n. Fibonacci kuaterniyon
$\bar{Q}_n$	: n. Fibonacci kuaterniyon eşleniği
$\mathcal{QP}_n$	: n. Pell kuaterniyon
$\mathcal{QPL}_n$	: n. Pell-Lucas kuaterniyon
$\mathcal{QJ}_n$	: n. Jacobsthal kuaterniyon
JLQ_n	: n. Jacobsthal-Lucas kuaterniyon
q_m	: m. Pell-Lucas sayısı

1. GİRİŞ

Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas gibi özel sayı dizileri, sayılar teorisinin en ilginç konularından birisidir. Bu sayı dizileri ile ilgili literatürde birçok yazar tarafından yapılmış çalışmalar mevcuttur. Kuaterniyonlar (ya da dördeyler) karmaşık sayıları bir gerçel, üç sanal boyuta genişleten sayı sistemidir. İlk defa İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanmış ve üç boyutlu uzaydaki matematiğe uygulanmıştır.

Matematikteki bu önemli kavramlar birleştirilerek özel sayı dizilerinin kuaterniyonlarına yönelik tanımlanan çeşitli kuaterniyon sayı dizileri ve analizi için aktif araştırmalar yürütülmektedir. Horadam (1963), yaptığı "Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Qaternions" çalışmasında kompleks Fibonacci sayıları ve Fibonacci kuaterniyonları üzerine yoğunlaşmıştır. Iyer (1969), Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarını birbirine bağlayan birçok sonuç elde ettiği çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmasında, Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları arasındaki ilişkilerden bahsetmiştir. Swamy (1973), Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları arasındaki ilişkilere değinmiş, Fibonacci ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarını da kullanarak kuaterniyonların çeşitli özelliklerinden bahsetmiştir. Horadam (1993), kuaterniyonların rekürans bağıntıları üzerinde çalışmalar yapmıştır. Halıcı (2012), Fibonacci ve Lucas kuarterniyonlarını araştırmış, bu kuaterniyonlar için üreteç fonksiyonları ve Binet formülleri verilmiştir. Ayrıca bu kuaterniyonlar için birçok toplam formül elde etmiştir. Halıcı (2013), kompleks Fibonacci kuaterniyonları ile ilgili çeşitli bağıntılara, Binet formüllerini, üreteç fonksiyonlarını elde etmiştir. Ramirez (2015), k-Fibonacci ve k-Lucas kuaterniyonlarının bazı kombinatoriyal özelliklerini elde etmiştir. Catarino (2015), h(x)-Fibonacci kuaterniyon polinomlarını çalışmıştır. Taşçı ve Yalçın (2015), Fibonacci-p sayılarını tanıtmış ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir. Polatlı ve Kesim (2015) genelleştirilmiş Fibonacci sayıları bileşenli kuaterniyoların çeşitli özelliklerini türetmişlerdir. Bolat ve İpek (2016) Pell kuaterniyolarını ve Pell-Lucas kuaterniyonlarını tanıtmışlar ve bazı özelliklerini vermişlerdir. Akyiğit ve arkadaşları (2014) farklı kuaterniyon birimlerini ele alarak Fibonacci genelleştirilmiş kuaterniyonlarını incelemiştir. Yine Akyiğit ve arkadaşları (2013) split Fibonacci kuaterniyonlarını tanıtmışlar ve çeşitli özelliklerini elde etmişlerdir. Yine Polatlı (2016), Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlarının bir genelleştirmesini elde etmiş ve bu kuaterniyonları içeren çeşitli toplam formülleri bulmuştur. Tribonacci kuaterniyonlar ve Tribonacci-Lucas

kuaterniyonlar ayrıntılı olarak incelenmiş ve bu kuaterniyonlarının sağladığı bazı özdeşlikler ispatlamıştır (Akkuş ve Kızılaslan, 2017). Fibonacci matrisini farklı şekilde tanımlayıp buna bağlı olarak Cassini özdeşliği gibi yeniden farklı şekilde özdeşlikler ispatlamıştır (Irmak, 2020).

Bu tez çalışmasının amacı, özel sayı dizilerinin kuaterniyonlarını detaylı olarak incelemektir. Bu anlamda, çoğu sayılar teorisi çalışanın ilgisini çeken toplam formülleri, üreteç fonksiyonları, Binet formülleri gibi kavramların Fibonacci, Lucas, Pell, Pell- Lucas, Tribonacci, Tribonacci-Lucas kuaterniyonlarda karşılığı verilmiştir. Özellikle beşinci bölümde Tribonacci kuaterniyonlar ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlar ayrıntılı olarak incelenmiş ve bu kuaterniyonlarının sağladığı bazı özdeşlikler ispatlanmıştır. Yine altıncı bölümde farklı bir Fibonacci kuaterniyon matris kullanılarak Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar için Cassini özdeşliği gibi bilinen bazı temel özdeşlikler yeniden ispatlanmıştır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasında geçen temel tanım ve teoremler verilmiştir (Koshy, 2017).

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları

Tanım 2.1.1. (Fibonacci Sayıları)

Fibonacci sayı dizisi $m \geq 2$ olmak üzere

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$$

yineleme bağıntısı ve $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlanan sayı dizisidir.

Tanım 2.1.2. (Lucas Sayıları)

Lucas sayı dizisi $m \geq 2$ olmak üzere

$$L_m = L_{m-1} + L_{m-2}$$

yineleme bağıntısı ve $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlanan sayı dizisidir.

Tanım 2.1.3. (Pell Sayıları)

$P_0 = 0$, $P_1 = 1$, $n \geq 2$ için

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan tam sayılar dizisindeki sayılara Pell sayıları denir ve n. Pell sayısı P_n ile gösterilir.

Başlıca Pell sayıları:

0,1,2,5,12,70,169, ... şeklindedir.

Tanım 2.1.4. (Pell-Lucas Sayıları)

$q_0 = 2$, $q_1 = 2$, $m \geq 2$ için

$$q_m = 2q_{m-1} + q_{m-2}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Pell-Lucas sayıları denir ve n. Pell-Lucas sayısı q_n ile gösterilir.

Başlıca Pell-Lucas sayıları:

2,2,6,14,34,82,198,478, ... şeklindedir.

1973 yılında Sloone, Jacobsthal sayılar kümesini tanıttı. Ayrıca, 1988'de Horadam, sırasıyla Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayı dizileri $\{J_n\}$ ve $\{j_n\}$'i tanımlamıştır.

Tanım 2.1.5. (Jacobsthal Sayıları)

$n \geq 2$ için başlangıç şartları $J_0 = 0, J_1 = 1$ olmak üzere

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Jacobsthal sayıları denir. İlk on terimi 0,1,1,3,5,11,21,43,85 ve 171 şeklindedir.

Tanım 2.1.6. (Jacobsthal-Lucas Sayıları)

$n \geq 2$ için başlangıç şartları $j_0 = 2, j_1 = 1$ olmak üzere

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan sayılara Jacobsthal-Lucas sayıları denir. İlk on terimi 2,1,5,7,17,31,65,127,257 ve 511 şeklindedir.

Tanım 2.1.7. (Tribonacci Sayıları)

$T_1 = T_2 = 1, T_3 = 2,\ n \geq 4$ için

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan tam sayılar dizisindeki sayılara Tribonacci sayıları denir ve n. Tribonacci sayısı T_n ile gösterilir.

Başlıca Tribonacci sayıları:

0,1,1,2,4,7,13,24,44, ... şeklindedir (Yılmaz ve Taskara, 2014).

Tanım 2.1.8. (Tribonacci-Lucas Sayıları)

$K_0 = 3, K_1 = 1, K_2 = 3 \quad n \geq 2$ için

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2} + K_{n-3}$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanan tam sayılar dizisindeki sayılara Tribonacci-Lucas sayıları denir ve n. Tribonacci-Lucas sayısı K_n ile gösterilir.

Başlıca Tribonacci-Lucas sayıları:

3,1,3,7,11,21,39, ... şeklindedir (Yılmaz ve Taskara, 2014).

Tanım 2.1.9. (Altın Oran)

Altın oran, matematik ve sanatta, bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik sayısal bir oran bağıntısıdır. Mısırlıların Keops Piramidinde, Leonardo da Vinci'nin resimlerinde kullanıldığı bilinen "Fibonacci sayıları" olarak da bilinmektedir.

Bu oranın gösterimi;

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$$

şeklindedir.

Fibonacci ve Lucas sayıları altın oran ile ilişkili iken, Pell ve Pell-Lucas sayıları gümüş oran $(1+\sqrt{2})$ ile ilişkilidir.

Ardışık Fibonacci ve Lucas sayılarının oranlarının altın orana yakınsaması gibi, T_{n+1}/T_n ardışık Tribonacci sayıları oranı da 1.83928675521416… irrasyonel sayısına yakınsar.

Tanım 2.1.10.

$\{a_0, a_1, a_2 \ldots\}$ dizisi için üreteç fonksiyonu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.11.

$n \geq 0$ için Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.12.

$n \geq 0$ için Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.13.

Pell dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklindedir (Zorçelik, 2017).

Tanım 2.1.14.

Pell- Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{1 - 2x - x^2}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.15.

Jacobsthal dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.16.

Jacobsthal-Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1 + 4x}{1 - x - 2x^2}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.17.

Tribonacci dizisi T_n ve Tribonacci-Lucas dizisi K_n nin üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2 - x^3}$$

ve

$$h(x) = \frac{3 - 2x - x^2}{1 - x - x^2 - x^3}$$

dir.

Teorem 2.1.1. (Binet Formülleri)

Fibonacci ve Lucas sayılarının Binet formülleri aşağıdaki gibidir:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ denkleminin çözümleri olmak üzere,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir.

İspat.

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

şeklindedir. Fibonacci dizisinin genel formülü $F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ ve başlangıç şartları ise $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ dir. Buradan karakteristik denklemin kökleri ise

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir.

$$F_m = A\alpha^m + B\beta^m$$

denkleminde α ve β yerine yazılırsa

$$F_m = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m$$

şeklindedir. Başlangıç koşulları için

$m = 0$ yazılırsa

$$0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0$$

ve $m = 1$ için

$$1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

şeklindedir.

$m = 0$ için denklemden $A = -B$ bulunur.

$m = 1$ için $A = -B$ olduğundan bulunan ifadeler yerine yazılırsa ve B parantezine alınırsa

$$1 = B\left[-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

şeklindedir. Buradan A ve B değerleri

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ve

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

olur. Bulunan A ve B katsayıları $F_m = A\alpha^m + B\beta^m$ denkleminde yerine yazıldığında

$$F_m = \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}$$

ifadesinden Fibonacci sayılarının Binet formülü elde edilir. Lucas sayılarının Binet formülüde Fibonacci sayılarına benzer şekilde elde edilir.

Tanım 2.1.18.

$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri γ ve δ olmak üzere n. Pell sayısı ve n. Pell-Lucas sayısının Binet formülleri sırasıyla

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

ve

$$q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

şeklinde olup burada

$$\gamma = 1 + \sqrt{2}$$

ve

$$\delta = 1 - \sqrt{2}$$

dir.

Tanım 2.1.19.

Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas için sırasıyla Binet formülleri

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

ve

$$j_n = 2^n + (-1)^n$$

şeklindedir (Akkuş ve Kızılaslan, 2017).

Tanım 2.1.20.

$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ denkleminin karakteristik kökleri $w = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ olmak üzere

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$\beta = \frac{1 + w\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w^2\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

$$\gamma = \frac{1 + w^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + w\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}$$

olup Tribonacci ve Tribonacci- Lucas dizileri için sırasıyla Binet formülleri

$$T_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

ve

$$K_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n$$

şeklindedir.

Ayrıca, F_n ve L_n için Binet formüllerinden

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$$

ve

$$L_{-n} = (-1)^n L_n$$

P_n ve q_n için Binet formüllerinden

$$P_{-n} = (-1)^{n+1} P_n$$

ve

$$q_{-n} = (-1)^n q_n$$

elde edilir.

Tanım 2.1.21.

$n \geq 0$ için $\mathcal{A}_n = T_{-n}$ ve $\mathcal{B}_n = K_{-n}$ olsun. Negatif indisli Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizileri aşağıdaki denklem ile tanımlanır.

$$\mathcal{A}_n = -\mathcal{A}_{n-1} - \mathcal{A}_{n-2} + \mathcal{A}_{n+3} \; ; \mathcal{A}_{-1} = 1 \, , \mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = 0$$

ve

$$\mathcal{B}_n = -\mathcal{B}_{n-1} - \mathcal{B}_{n-2} + \mathcal{B}_{n+3} \; ; \; \mathcal{B}_{-1} = 1 \, , \mathcal{B}_0 = 3 \, , \mathcal{B}_1 = -1$$

dir (Akkuş ve Kızılaslan, 2017).

Bu kısımdan itibaren, tezin diğer bölümlerinde kullanılmak üzere Fibonacci ve Lucas sayılarının bazı temel özdeşlikleri verilecektir.

Önerme 2.1.1.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$$

dir.

İspat.

Tümevarım yöntemi ile,

$n = 1$ ve $n = 2$ için yerine yazılırsa,

$$L_1 = F_0 + F_2$$

$$L_2 = F_1 + F_3$$

olur ve eşitlik sağlanır. Diğer taraftan $n = k$ ve $n = k + 1$ için özdeşlik doğru olsun.

$$L_k = F_{k-1} + F_{k+1}$$

$$L_{k+1} = F_k + F_{k+2}$$

olup taraf tarafa toplanarak $L_{k+2} = F_{k+1} + F_{k+3}$ elde edilir.

Önerme 2.1.2.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} F_{n+1}F_{n-1} - {F_n}^2 &= (F_{n-1} + F_n)F_{n-1} - {F_n}^2 \\ &= F_{n-1}^2 + F_n(F_{n-1} - F_n) \\ &= F_{n-1}^2 - F_nF_{n-2} \\ &= -(F_nF_{n-2} - F_{n-2}^2) \\ &= (-1)^2(F_{n-1}F_{n-3} - F_{n-2}^2) \\ &= (-1)^3(F_{n-2}F_{n-4} - F_{n-3}^2) \\ &= (-1)^n(F_1F_{-1} - F_0^2) \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 2.1.3.

$n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

dir.

İspat.

$n = 1$ için tümevarım yöntemi ile

$$L_2L_0 - L_1^2 = 3.2 - 1^2 = 5 = 5(-1)^0$$

olup doğrudur. $n = k$ için doğru olsun.

$$L_{k+1}L_{k-1} - L_k^2 = 5(-1)^{k-1}$$

$n = k + 1$ için özdeşliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} L_{k+2}L_k - L_{k+1}^2 &= (L_{k+1} + L_k)(L_{k+1} - L_{k-1}) - L_{k+1}^2 \\ &= L_{k+1}^2 - L_{k+1}L_{k-1} + L_kL_{k+1} - L_kL_{k-1} - L_{k+1}^2 \\ &= -L_{k+1}L_{k-1} - L_k(L_{k+1} - L_{k-1}) \\ &= -L_{k+1}L_{k-1} + L_k^2 \\ &= -5(-1)^{k-1} \\ &= 5(-1)^k \end{aligned}$$

olur.

2.2. Fibonacci Matrisler

Tanım 2.2.1. (Fibonacci Matris)

Matrislerin özellikleri kullanılarak matrisler ve Fibonacci sayıları arasında yakın bir ilişki olduğu gösterilebilir.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım. 1960 yılında Charles H. King tarafından çalışılan bu matrise Q matrisi denir.

Q matrisinin determinantı $|Q| = -1$ dir. Ayrıca,

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Bu şekilde devam edildiğinde bir örüntü görülmektedir. Bu durumu Teorem 2.2.1 ile verebiliriz (Koshy, 2017).

Teorem 2.2.1.

$n \geq 1$ için

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

dir.

İspat.

Tümevarım yöntemi ile,

$n = 1$ için

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$$

$n = k$ için doğru olsun.

$$Q^k = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix}$$

olsun. Bu durumda $n = k + 1$ için

$$Q^{k+1} = Q^k Q^1 = \begin{pmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+1} + F_k & F_k \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{pmatrix}$$

elde edilir (Koshy, 2017).

3. KUATERNİYONLAR

Matematikte, kuaterniyonlar (dördeyler), karmaşık sayıları bir gerçel, üç sanal boyuta genişleten sayı sistemidir. İlk defa İrlandalı matematikçi Sir William Rowan Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanmış ve üç boyutlu uzaydaki matematiğe uygulanmıştır. Hamilton'a göre, 16 Ekim'de eşiyle birlikte Dublin'deki Kraliyet Kanalı boyunca yürürken denklem formundaki çözüm

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

aniden aklına geldi. Hamilton daha sonra bu denklemi çakısını kullanarak yakındaki Broom Köprüsü'nün yan tarafına kazıdı. Bu olay, kuaterniyon grubunun keşfini işaret eder. Köprünün altındaki bir plaka, kendisi de matematikçi ve kuaterniyonlar ile ilgili olan Taoiseach Eamon de Valera tarafından 13 Kasım 1958' de açıldı.

Kuaterniyonlar değişme özelliğine $(ab = ba)$ sahip değildir. Her ne kadar pek çok uygulamada vektörler ve matrisler kuaterniyonlar yerini almışsa da, kuramsal ve uygulamalı matematikte hala kullanılmaktadırlar. Başlıca kullanım alanı, üç boyutlu uzayda dönme hareketinin hesaplanmasıdır.

Kuaterniyonlar bir halka olarak tanımlanır. Kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

olarak verilir. Burada kullanılan toplama şu şekilde tanımlanır:

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

$$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

çarpma ise

$$(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k)(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$$

ifadesinin dağıtma kuralları kullanılarak açılmasıyla ve aşağıdaki bağıntılar yardımıyla tanımlanır:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

kullanılarak gerekli işlemler yapıldığında sonuç elde edilir (https://tr.wikipedia.org/wiki/D%C3%B6rdey).

Tanım 3.1.

Bir kuaterniyon, hiper karmaşık bir sayıdır ve

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 = (q_0, q_1, q_2, q_3)$$

şeklinde bir denklem ile ifade edilir.

Burada q_0, q_1, q_2 ve q_3 gerçek sayılardır. Burada $i, j, k,$ $\mathbb{R}^3$ uzayının ortonormal baz vektörleridir.

Bir q kuaterniyonu

$$q = q_0 + u = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3$$

şeklinde yazılabilir. q_0 , q kuaterniyonunun skaler kısmı ve u, q kuaterniyonunun vektörel kısmı olmak üzere q_0, q_1, q_2, q_3 kuaterniyonunun bileşenleri olarak adlandırılır.

Kuaterniyonun çarpım kuralları ise aşağıdaki gibi tanımlanır (Horadam, 1993).

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k = -ij$$

$$jk = i = -kj$$

$$ki = j = -ik$$

Tanım 3.2. (Kuaterniyon Eşleniği)

Bir q kuaterniyonun eşleniği $\bar{q}$ ile gösterilir.

$$\bar{q} = q_0 - u = q_0 - iq_1 - jq_2 - kq_3$$

şeklinde tanımlanır.

p ve q kuaterniyonları için

$$(\overline{pq}) = \bar{q}\bar{p}$$

ve bir q kuaterniyonu için

$$q + \bar{q} = (q_0 + u) + (q_0 - u) = 2q_0$$

dır.

Tanım 3.3. (Kuaterniyonun normu)

Bir q kuaterniyonun normu

$$N_q = \sqrt{\bar{q}q}$$

ile tanımlanır. q kuaterniyonun normu 1 olduğu durumda bu kuaterniyona birim kuaterniyon denir (Halıcı, 2012).

Tanım 3.4.

Bir q kuaterniyonun tersi q^{-1} ile gösterilir ve

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N(q)} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

ile tanımlanır (Halıcı, 2012).

4. ÖZEL SAYI DİZİLERİNİN KUATERNİYONLARI

4.1. Fibonacci Kuaterniyonlar

Tanım 4.1.1. (Fibonacci Kuaterniyon)

F_n, n. Fibonacci sayısı ve $\{i, j, k\}$üç boyutlu uzayın bazları olmak üzere

$$Q_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}$$

ifadesine n. Fibonacci kuaterniyon denir (Halıcı, 2012).

Tanım 4.1.2. (Fibonacci Kuaterniyon Eşleniği)

F_n, n. Fibonacci sayısı ve $\{i, j, k\}$ üç boyutlu uzayın bazları olmak üzere

$$\bar{Q}_n = F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3}$$

ifadesine n. Fibonacci kuaterniyon eşleniği denir (Halıcı, 2012).

Teorem 4.1.1.

$$Q_n\bar{Q}_n = \sum_{i=0}^{3} F_{n+i}^2$$

dir (Horadam, 1963).

İspat.

$$\begin{aligned} Q_n\bar{Q}_n &= (F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3})\,(F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3}) \\ &= F_n^2 - iF_nF_{n+1} - jF_nF_{n+2} - kF_nF_{n+3} + iF_{n+1}F_n - i^2F_{n+1}F_{n+1} \\ &\quad - ijF_{n+1}F_{n+2} - ikF_{n+1}F_{n+3} + jF_{n+2}F_n - jiF_{n+2}F_{n+1} \\ &\quad - j^2F_{n+2}F_{n+2} - jkF_{n+2}F_{n+3} + kF_{n+3}F_n - kiF_{n+3}F_{n+1} \\ &\quad - kjF_{n+3}F_{n+2} - k^2F_{n+3}F_{n+3} \end{aligned}$$

olup

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k = -ji$$

$$jk = i = -kj$$

$$ki = j = -ik$$

gerekli ifadeler yerine yazılırsa

$$Q_n\bar{Q}_n = F_n^2 - iF_nF_{n+1} - jF_nF_{n+2} - kF_nF_{n+3} + iF_{n+1}F_n + F_{n+1}^2 - kF_{n+1}F_{n+2}$$
$$+jF_{n+1}F_{n+3} + jF_{n+2}F_n + kF_{n+2}F_{n+1} + F_{n+2}^2$$
$$-iF_{n+2}F_{n+3} + kF_{n+3}F_n - jF_{n+3}F_{n+1} + iF_{n+3}F_{n+2} + F_{n+3}^2$$
$$= F_n^2 + i(-F_nF_{n+1} + F_{n+1}F_n - F_{n+2}F_{n+3} + F_{n+3}F_{n+2}) + j(-F_nF_{n+2} +$$
$$F_{n+1}F_{n+3} + F_{n+2}F_n - F_{n+3}F_{n+1}) + k(-F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+2}F_{n+1} + F_{n+3}F_n) +$$
$$F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2$$

$$= F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = \sum_{i=0}^{3} F_{n+i}^2$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.1.2.

$$Q_n^2 = 2F_nQ_n - Q_n\bar{Q}_n$$

dir (Halıcı, 2012).

İspat.

$$Q_n^2 = Q_nQ_n$$
$$= Q_n(F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3})$$
$$= Q_n(2F_n - F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3})$$
$$= Q_n\big(2F_n - (F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3})\big)$$
$$= Q_n(2F_n - \bar{Q}_n)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.1.3.

Q_n, *n.* Fibonacci kuaterniyonu olmak üzere $Q_n \neq 0$ için

$$2F_n = Q_n + \bar{Q}_n$$

dir (Horadam, 1963).

İspat.

$\boldsymbol{Q_n} \neq 0$ olmak üzere

$$2F_n = F_n + F_n$$
$$= F_n + F_n + iF_{n+1} - iF_{n+1} + jF_{n+2} - jF_{n+2} + kF_{n+3} - kF_{n+3}$$

$$= F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3} + F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3}$$

$$= (F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}) + (F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3})$$

buradan

$$2F_n = Q_n + \bar{Q}_n$$

elde edilir.

Teorem 4.1.4.

Q_n , *n.* Fibonacci kuaterniyonu olmak üzere

$$Q_n + Q_{n+1} = Q_{n+2}$$

dir (Halıcı, 2012).

İspat.

Q_n Fibonacci kuaterniyonunun *u*, vektörel kısmı olmak üzere

$$Q_n = F_n + u \; ; \; u = iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}$$

şeklinde tanımlanırsa

$$Q_{n+1} = F_{n+1} + u \; ; u = iF_{n+2} + jF_{n+3} + kF_{n+4}$$

olduğundan $n \geq 0$ için kuaterniyonlar taraf tarafa toplanırsa

$$Q_n + Q_{n+1} = F_n + F_{n+1} + i(F_{n+1} + F_{n+2}) + j(F_{n+2} + F_{n+3}) + k(F_{n+3} + F_{n+4})$$

olur. Fibonacci sayıların tanımından

$$Q_n + Q_{n+1} = F_{n+2} + iF_{n+3} + jF_{n+4} + kF_{n+5}$$

olur. Böylece*;* $u = iF_{n+3} + jF_{n+4} + kF_{n+5}$ olmak üzere

$$Q_n + Q_{n+1} = F_{n+2} + u$$

$$= Q_{n+2}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.5.

$n \geq 0$ için

$$\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$$

$$\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$$

olmak üzere, Fibonacci kuaterniyonun Binet formülü

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{\alpha}\alpha - \underline{\beta}\beta\right)$$

şeklindedir (Halıcı, 2012).

İspat.

$Q_n + Q_{n+1} = Q_{n+2}$ bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

şeklindedir. Bu denklem kökleri sırasıyla

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. Böylece

$$Q_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

şeklinde olup

$$Q_0 = (0,1,1,2)$$

$$Q_1 = (1,1,2,3)$$

verilen başlangıç değerleri Fibonacci kuaterniyonunun rekürans bağıntısında kullanarak

$$Q_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

verilen denklemde yerine yazalım.

$n = 0$ için $(0,1,1,2) = A\alpha^0 + B\beta^0$

$n = 1$ için $(1,1,2,3) = A\alpha + B\beta$

$n = 0$ için denklem $-\alpha$ ile çarpılırsa ve $n = 1$ için verilen denklem ile toplanırsa

$(1,1-\alpha, 2-\alpha, 3-2\alpha) = A(\alpha-\alpha) + B(\beta-\alpha)$ olur ve denklem düzenlenirse

$$B = \frac{(1{,}1-\alpha, 2-\alpha, 3-2\alpha)}{(\beta-\alpha)} = \frac{\left(1{,}1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), 2-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), 3-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 2-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}\right)$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^3 = 2-\sqrt{5}$$

β' nın kuvvetleri B' nin son ifadesinde yerine yazılırsa

$$B = \frac{(1, \beta, \beta^2, \beta^3)}{-\sqrt{5}}$$

$\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3 = (1, \beta, \beta^2, \beta^3)$ olur. Buradan

$$B = \frac{-\underline{\beta}}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

$n = 0$ için denklem $-\beta$ ile çarpılırsa ve $n = 1$ için denklem ile toplanırsa

$(1{,}1-\beta, 2-\beta, 3-2\beta) = A(\alpha-\beta) + B(\beta-\beta)$ olur. Denklem de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A = \frac{(1{,}1-\beta, 2-\beta, 3-2\beta)}{(\alpha-\beta)} = \frac{\left(1{,}1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 3-2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \left(\frac{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)$$

şeklinde elde edilir.

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha^3 = 2+\sqrt{5}$$

α' nın kuvvetleri cinsinden A' nın son ifadesi yerine yazılırsa

$$A = \frac{(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)}{\sqrt{5}}$$

ve $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3 = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$

$$A = \frac{\underline{\alpha}}{\sqrt{5}}$$

elde edilir.

A ve B katsayılarını yerine yazarsak

$$Q_n = \frac{\underline{\alpha}}{\sqrt{5}}\alpha^n - \frac{\underline{\beta}}{\sqrt{5}}\beta^n$$

bu ifade

$$\frac{1}{\sqrt{5}}$$

parantezine alındığında Fibonacci kuaterniyonu için Binet formülü

$$Q^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n\right)$$

şeklinde elde edilir.

Teorem 4.1.6.

Fibonacci kuaterniyonu Q_n için üreteç fonksiyonu

$$G(x,t) = \frac{t + i + j(t+1) + k(t+2)}{1 - t - t^2}$$

şeklindedir (Halıcı, 2012).

İspat.

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n$$

genel denkleminde

$$Q_0 = (0,1,1,2)$$

ve

$$Q_1 = (1,1,2,3)$$

olan başlangıç şartları kullanılırsa Fibonacci kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n = G(x,t)$$

olsun ve genel denklemde üreteç fonksiyonu yazalım.

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+2} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n$$

ve toplam sembolünün indisi değiştirilerek

$$\sum_{n=2}^{\infty} Q_n t^{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n t^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n\, t^n$$

ve t'nin kuvvetleri olacak şekilde t parantezine alınırsa

$$t^{-2}(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n - Q_0 t^0 - Q_1 t^1) = t^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n - Q_0 t^0) + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n$$

$$Q_0 = (0,1,1,2)$$

ve

$$Q_1 = (1,1,2,3)$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n t^n = G(x,t)$$

ifadeleri yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$t^{-2}(G(x,t)-(0,1,1,2)-(1,1,2,3)t)=t^{-1}\big(G(x,t)-(0,1,1,2)\big)+G(x,t)$$

olur. Her taraf t^2 ile çarpılırsa

$$G(x,t)-(0,1,1,2)-(t,t,2t,3t)=tG(x,t)-(0,t,t,2t)+t^2G(x,t)$$

elde edilir.

$$G(x,t)(1-t-t^2)=(0,1,1,2)+(t,t,2t,3t)-(0,t,t,2t)$$

$$G(x,t)(1-t-t^2)=(t,1,1+t,2+t)$$

$$G(x,t)=\frac{(t,1,1+t,2+t)}{1-t-t^2}$$

$$G(x,t)=\frac{t+i+j(1+t)+k(2+t)}{1-t-t^2}$$

olduğu görülür.

4.2. Lucas Kuaterniyonlar

Tanım 4.2.1. (Lucas Kuaterniyon)

L_n, n. Lucas sayısı ve $i,j,k,\ \mathbb{R}^3$ uzayının bazları olmak üzere

$$\mathcal{K}_n=L_n+iL_{n+1}+jL_{n+2}+kL_{n+3}$$

ile tanımlanan kuaterniyona n. Lucas kuaterniyon denir (Horadam, 1963).

Teorem 4.2.1.

$\mathcal{K}_n$ **,** n. Lucas kuaterniyonu olmak üzere

$$\mathcal{K}_{n+2}=\mathcal{K}_{n+1}+\mathcal{K}_n$$

dir (Halıcı, 2012).

İspat.

Lucas kuaterniyonunun vektörel kısmı v, olmak üzere

$$\mathcal{K}_n=L_n+v\ ;\ v=iL_{n+1}+jL_{n+2}+kL_{n+3}$$

ile tanımlanırsa

$$\mathcal{K}_{n+1}=L_{n+1}+v\ ;\ v=iL_{n+2}+jL_{n+3}+kL_{n+4}$$

olur ve $n\geq 0$ için kuaterniyonlar taraf tarafa toplanırsa;

$$\mathcal{K}_n+\mathcal{K}_{n+1}=L_n+L_{n+1}+i(L_{n+1}+L_{n+2})+j(L_{n+2}+L_{n+3})+k(L_{n+3}+L_{n+4})$$

Lucas sayıları tanımından

$$\mathcal{K}_n + \mathcal{K}_{n+1} = L_{n+2} + iL_{n+3} + jL_{n+4} + kL_{n+5}$$

olup $v = iL_{n+3} + jL_{n+4} + kL_{n+5}$ olmak üzere

$$\mathcal{K}_n + \mathcal{K}_{n+1} = L_{n+2} + v$$
$$= \mathcal{K}_{n+2}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2.

$n \geq 0$ için

$$\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$$
$$\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$$

olmak üzere Lucas kuaterniyonunun Binet formülü

$$\mathcal{K}_n = \left(\underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n\right)$$

şeklindedir (Halıcı, 2012).

İspat.

$\mathcal{K}_{n+2} = \mathcal{K}_{n+1} + \mathcal{K}_n$ rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

olmak üzere denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olup

$$\mathcal{K}_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

dir.

$$\mathcal{K}_0 = (2,1,3,4)$$

$$\mathcal{K}_1 = (1,3,4,7)$$

başlangıç değerleri denklemde yerine yazıldığında

$n = 0$ için

$$(2,1,3,4) = A\alpha^0 + B\beta^0$$

$n = 1$ için

$$(1,3,4,7) = A\alpha^1 + B\beta^1$$

$n = 0$ için denklemi $-\alpha$ ile çarpılır. $n = 1$ için denklem taraf tarafa toplanırsa

$$(1 - 2\alpha, 3 - \alpha, 4 - 3\alpha, 7 - 4\alpha) = A(\alpha - \alpha) + B(\beta - \alpha)$$

olup buradan

$$\mathrm{B} = \frac{(1 - 2\alpha, 3 - \alpha, 4 - 3\alpha, 7 - 4\alpha)}{(\beta - \alpha)}$$

$$= \frac{\left(1 - 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), 3 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), 4 - 3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), 7 - 4\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(-\sqrt{5}, \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{5-3\sqrt{5}}{2}, 5 - 2\sqrt{5}\right)}{-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-\sqrt{5}\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right)}{-\sqrt{5}}$$

$$= \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 2 - \sqrt{5}\right)$$

olarak elde edilir.

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\beta^3 = 2 - \sqrt{5}$$

β' nın kuvvetleri B' nin son denkleminde yerine yazılırsa

$$B = (1, \beta, \beta^2, \beta^3)$$

$$\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3 = (1, \beta, \beta^2, \beta^3)$$

Buradan $B = \underline{\beta}$ elde edilir.

$n = 0$ için denklemi $-\beta$ ile çarpılır, $n = 1$ için denklem ile taraf tarafa toplanırsa

$$(1 - 2\beta, 3 - \beta, 4 - 3\beta, 7 - 4\beta) = A(\alpha - \beta) + B(\beta - \beta)$$

olup buradan

$$\mathrm{A} = \frac{(1 - 2\beta, 3 - \beta, 4 - 3\beta, 7 - 4\beta)}{(\alpha - \beta)}$$

$$= \frac{\left(1 - 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 4 - 3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), 7 - 4\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

$$= \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{5}\right)$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\alpha^3 = 2 + \sqrt{5}$$

α' nın kuvvetleri A' nın son denkleminde yerine yazılırsa

$$A = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$$
$$\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3 = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3)$$

$A = \underline{\alpha}$ elde edilir. A ve B katsayıları

$$\mathcal{K}_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

denkleminde yerine yazılırsa Lucas kuaterniyonu için Binet formülü

$$\mathcal{K}_n = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n$$

elde edilir.

4.3. Pell Kuaterniyonlar

Tanım 4.3.1. (Pell Kuaterniyon)

P_n, n. Pell sayısı olmak üzere

$$QP_n = P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}$$

ile tanımlanan kuaterniyona n. Pell kuaterniyon denir (Çimen ve İpek, 2016).

Teorem 4.3.1.

$\underline{\gamma} = 1 + i\gamma + j\gamma^2 + k\gamma^3$

$\underline{\delta} = 1 + i\delta + j\delta^2 + k\delta^3$ olmak üzere QP_n Pell kuaterniyonun Binet formülü

$$QP_n = \left[\frac{\underline{\gamma}\alpha^n - \underline{\delta}\beta^n}{2\sqrt{2}}\right]$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

Teorem 4.3.2.

QP_n Pell kuaterniyonun üreteç fonksiyonu

$$G(t) = \frac{t + i + j(t+2) + k(2t+5)}{1 - 2t - t^2}$$

şeklindedir.

4.4. Pell-Lucas Kuaterniyon

Tanım 4.4.1.

q_n, n. Pell-Lucas sayısı olmak üzere

$$QPL_n = q_n + iq_{n+1} + jq_{n+2} + kq_{n+3}$$

ile tanımlanan kuaterniyona n. Pell-Lucas kuaterniyon denir (Çimen ve İpek, 2016).

Teorem 4.4.1.

$$\underline{\gamma} = 1 + i\gamma + j\gamma^2 + k\gamma^3$$

$$\underline{\delta} = 1 + i\delta + j\delta^2 + k\delta^3$$

olmak üzere QPL_n Pell-Lucas kuaterniyonun Binet formülü

$$\mathcal{Q}PL_n = \underline{\gamma}\alpha^n + \underline{\delta}\beta^n$$

şeklindedir (Çimen ve İpek, 2016).

4.5. Jacobsthal Kuaterniyon

Tanım 4.5.1. (Jacobsthal Kuaterniyon)

J_n Jacobsthal sayısı olmak üzere

$$\mathcal{Q}J_n = J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}$$

ile tanımlanan kuaterniyona n. Jacobsthal kuaterniyon denir.

Teorem 4.5.1.

J_n Jacobsthal sayısı olmak üzere $n \geq 0$ için Jacobsthal kuaterniyon Binet formülü

$$\mathcal{Q}J_n = \frac{1}{3}(\underline{\lambda}\lambda^n + \underline{\mu}\mu^n)$$

şeklindedir.

Teorem 4.5.2.

$\mathcal{Q}J_n$ Jacobsthal kuaterniyon için üreteç fonksiyonu

$$G(t) = \frac{t + i + j(2t+1) + k(2t+3)}{1 - t - 2t^2}$$

şeklindedir.

4.6. Jacobsthal-Lucas Kuaterniyon

Tanım 4.6.1. (Jacobsthal-Lucas Kuaterniyon)

j_n Jacobsthal-Lucas sayısı olmak üzere

$$JL\mathcal{Q}_n = j_n + ij_{n+1} + jj_{n+2} + kj_{n+3}$$

ile tanımlanan kuaterniyona n. Jacobsthal-Lucas kuaterniyon denir.

5. TRIBONACCI KUATERNİYONLARI

Bu bölümde Tribonacci ve Tribonacci-Lucas Kuaterniyonları ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir (Akkuş ve Kızılaslan, 2017).

Tanım 5.1. (Tribonacci Kuaterniyon)

$n \geq 0$ için n. Tribonacci kuaterniyon $\mathcal{Q}_n$ ve n. Tribonacci-Lucas kuaterniyon $\tilde{\mathcal{Q}}_n$

$$\mathcal{Q}_n = T_n + iT_{n+1} + jT_{n+2} + kT_{n+3}$$

ve

$$\tilde{\mathcal{Q}}_n = K_n + iK_{n+1} + jK_{n+2} + kK_{n+3}$$

tanımlanır.

Burada T_n ve K_n sırasıyla n. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayılarıdır. $n \geq 0$ için

$$\mathcal{Q}_{n+3} = \mathcal{Q}_{n+2} + \mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_n$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{n+3} = \tilde{\mathcal{Q}}_{n+2} + \tilde{\mathcal{Q}}_{n+1} + \tilde{\mathcal{Q}}_n$$

dir.

Tanım 5.2. (Tribonacci Kuaterniyon Eşleniği)

Tribonacci kuaterniyon $\mathcal{Q}_n$'nin eşleniği $\bar{\mathcal{Q}}_n$ile gösterilir ve

$$\bar{\mathcal{Q}}_n = T_n - iT_{n+1} - jT_{n+2} - kT_{n+3}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 5.3.

n. Tribonacci sayısı T_n ve n. Tribonacci-Lucas sayısı K_n için negatif indisli Tribonacci ve Tribonacci-Lucas dizileri $\mathcal{A}_n = T_{-n}$ ve $\mathcal{B}_n = K_{-n}$ olup negatif indisli Tribonacci ve Tribonacci- Lucas kuaterniyonları aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\mathcal{Q}_{-n} = \mathcal{A}_n + i\mathcal{A}_{n-1} + j\mathcal{A}_{n-2} + k\mathcal{A}_{n-3}$$

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{-n} = \mathcal{B}_n + i\mathcal{B}_{n-1} + j\mathcal{B}_{n-2} + k\mathcal{B}_{n-3}$$

Teorem 5.2.

Tribonacci kuaterniyon $\mathcal{Q}_n$ için üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{x + i + j(1 + x + x^2) + k(2 + 2x + x^2)}{1 - x - x^2 - x^3}$$

şeklindedir.

İspat.

$G(x) = Q_0 + xQ_1 + x^2Q_2 + \cdots + x^nQ_n + \cdots$ Tribonacci kuaterniyon Q_n'nin üreteç fonksiyonu olsun. Q_{n-1}, Q_{n-2} ve Q_{n-3} mertebeleri Q_n'nin mertebesinden sırasıyla 1,2 ve 3 eksik olduğundan $xG(x)$,$x^2G(x)$ ve $x^3G(x)$' i bulalım.

$$xG(x) = Q_0x + Q_1x^2 + Q_2x^3 + \cdots + Q_{n-1}x^n + \cdots$$

$$x^2G(x) = Q_0x^2 + Q_1x^3 + Q_2x^4 + \cdots + Q_{n-2}x^n + \cdots$$

$$x^3G(x) = Q_0x^3 + Q_1x^4 + Q_2x^5 + \cdots + Q_{n-3}x^n + \cdots$$

gereken işlemler yapılarak

$$G(x) = \frac{Q_0 + x(Q_1 - Q_0) + x^2(Q_2 - Q_1 - Q_0)}{1 - x - x^2 - x^3}$$

olup değerler yerine yazıldığında

$$G(x) = \frac{x + i + j(1 + x + x^2) + k(2 + 2x + x^2)}{1 - x - x^2 - x^3}$$

şeklindedir.

Teorem 5.3.

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonları için Binet formülleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$Q_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}\underline{\gamma}$$

ve

$$\tilde{Q}_n = \alpha^n\underline{\alpha} + \beta^n\underline{\beta} + \gamma^n\underline{\gamma}$$

olup burada

$$\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$$

$$\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$$

$$\underline{\gamma} = 1 + i\gamma + j\gamma^2 + k\gamma^3$$

şeklindedir.

Özdeşlik 5.1.

- $\mathcal{Q}_n^2 = 2T_n\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}_n\bar{\mathcal{Q}}_n$
- $\tilde{\mathcal{Q}}_n = \mathcal{Q}_n + 2\mathcal{Q}_{n-1} + 3\mathcal{Q}_{n-2}$

dir.

İspat.

$\mathcal{Q}_n^2 = 2T_n\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}_n\bar{\mathcal{Q}}_n$ olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{Q}_n^2 = T_n^2 - T_{n+1}^2 - T_{n+2}^2 - T_{n+3}^2 + 2(iT_nT_{n+1} + jT_nT_{n+3} + kT_nT_{n+2})$$

olup

$$\mathcal{Q}_n\overline{\mathcal{Q}}_n = T_n^2 + T_{n+1}^2 + T_{n+2}^2 + T_{n+3}^2$$

olduğundan

$$2T_n\mathcal{Q}_n = 2T_n^2 + 2(iT_nT_{n+1} + jT_nT_{n+2} + kT_nT_{n+3})$$

ifadesi elde edilir.

$$\tilde{\mathcal{Q}}_n = \mathcal{Q}_n + 2\mathcal{Q}_{n-1} + 3\mathcal{Q}_{n-2}$$

için Tribonacci kuaterniyonun Binet formülü şu şekilde verilir.

$$\mathcal{Q}_n = \frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma}$$

o zaman

$$\mathcal{Q}_n + 2\mathcal{Q}_{n-1} + 3\mathcal{Q}_{n-2} = \left[\frac{\alpha^{n+1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n+1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n+1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma}\right]$$

$$+2\left[\frac{\alpha^{n}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma}\right]$$

$$+3\left[\frac{\alpha^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\underline{\alpha} + \frac{\beta^{n-1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\underline{\beta} + \frac{\gamma^{n-1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\underline{\gamma}\right]$$

$$= \left[\frac{\alpha^{n+1} + 2\alpha^n + 3\alpha^{n-1}}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right]\underline{\alpha} + \left[\frac{\beta^{n+1} + 2\beta^n + 3\beta^{n-1}}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\right]\underline{\beta} + \left[\frac{\gamma^{n+1} + 2\gamma^n + 3\gamma^{n-1}}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right]\underline{\gamma}$$

$$= \alpha^n\left[\frac{\alpha^2 + 2\alpha + 3}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right]\underline{\alpha} + \beta^n\left[\frac{\beta^2 + 2\beta + 3}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\right]\underline{\beta} + \gamma^n\left[\frac{\gamma^2 + 2\gamma + 3}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right]\underline{\gamma}$$

$$= \alpha^n\underline{\alpha} + \beta^n\underline{\beta} + \gamma^n\underline{\gamma}$$

$$= \tilde{Q}_n$$

şeklinde elde edilir.

Özdeşlik 5.2.

$n \geq 0$, $m \geq 0$ için

$$Q_{n+m} = T_{m-2}Q_n - (T_{m-3} + T_{m-2})Q_{n+1} + T_{m-1}Q_{n+2}$$

dir.

İspat.

Tümevarımla ispatlanacak olursa $m = 3$ için

$$Q_{n+3} = Q_n + Q_{n+1} + Q_{n+2}$$
$$= T_1Q_n + (T_0 + T_1)Q_{n+1} + T_2Q_{n+2}$$

ifade sağlanır. Diğer taraftan eşitliğin tüm $m \leq k$ için sağlandığı kabul edilsin. $m = k + 1$ için

$$Q_{n+k+1} = Q_{n+k} + Q_{n+k-1} + Q_{n+k-2}$$
$$= T_{k-2}Q_n + (T_{k-3} + T_{k-2})Q_{n+1} + T_{k-1}Q_{n+2} + T_{k-3}Q_n$$
$$+(T_{k-4} + T_{k-3})Q_{n+1} + T_{k-2}Q_{n+2} + T_{k-4}Q_n$$
$$+(T_{k-5} + T_{k-4})Q_{n+1} + T_{k-3}Q_{n+2}$$
$$= (T_{k-2} + T_{k-3} + T_{k-4})Q_n + (T_{k-3} + T_{k-2} + T_{k-4} + T_{k-3} + T_{k-5} + T_{k-4}) +$$
$$(T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3})Q_{n+2}$$
$$= T_{k-1}Q_n + (T_{k-2} + T_{k-1})Q_{n+1} + T_kQ_{n+2}$$

olup istenen sonuç elde edilir.

Özdeşlik 5.3.

Her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$C_n = \alpha^n\beta^n + \alpha^n\gamma^n + \beta^n\gamma^n$$

ve

$$\underline{C}_{2n-m} = C_{2n-m} + iC_{2n-m-1} + jC_{2n-m-2} + kC_{2n-m-3}$$

olmak üzere

$$Q_{m+n} = Q_m K_n - Q_{m-n}C_n + Q_{m-2n}$$

$$\tilde{Q}_{m+n} = \tilde{Q}_m K_n - \tilde{Q}_{m-n}C_n + \underline{C}_{2n-m}$$

$$Q_{n+2m} = K_m Q_{n+m} - K_m Q_n + Q_{n-2m}$$

dir.

İspat.

Tribonacci sayıları ve Tribonacci-Lucas sayıları için

$$T_{m+n} = T_m K_n - T_{m-n}C_n + T_{m-2n}$$

$$K_{m+n} = K_m K_n - K_{m-n}C_n + C_{2n-m}$$

dır (Yılmaz ve Taşkara, 2016).

$$\begin{aligned} Q_{m+n} &= T_{m+n} + iT_{m+n+1} + jT_{m+n+2} + kT_{m+n+3} \\ &= (T_m K_n - T_{m-n}C_n + T_{m-2n}) + i(T_{m+1}K_n - T_{m+1-n}C_n \\ &\quad + T_{m+1-2n}) + j(T_{m+2}K_n - T_{m+2-n}C_n + T_{m+2-2n}) + \\ &\quad k(T_{m+3}K_n - T_{m+3-n}C_n + T_{m+3-2n}) \\ &= (T_m + iT_{m+1} + jT_{m+2} + kT_{m+3})K_n - (T_{m-n} + iT_{m-n-1} + \\ &\quad jT_{m-n+2} + kT_{m-n+3})C_n + (T_{m-2n} + iT_{m-2n+1} + \\ &\quad jT_{m-2n+2} + kT_{m-2n+3} \\ &= Q_m K_n - Q_{m-n}C_n + Q_{m-2n} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde diğer verilen özdeşlikler de gösterilir.

Özdeşlik 5.4.

$$\hat{S}_n = \sum_{k=0}^{n} Q_k$$

olsun. Bu durumda

$$Q_n = \frac{1}{2}\left[\hat{S}_n - \hat{S}_{n-4}\right]$$

ve $n \geq 0, m \geq 5$ için

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} T_k$$

olmak üzere

$$\hat{S}_{n+m} = -S_{m-3}\hat{S}_n - S_{m-4}\hat{S}_{n+1} - S_{m-5}\hat{S}_{n+2} + S_{m-2}\hat{S}_{n+3}$$

elde edilir.

İspat.

$$\begin{aligned}\hat{S}_n &= Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_n \\ &= Q_0 + Q_1 + \cdots + Q_{n-4} + Q_{n-3} + Q_{n-2} + Q_{n-1} + Q_n \\ &= \hat{S}_{n-4} + Q_n + Q_n \\ &= \hat{S}_{n-4} + 2Q_n\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$Q_n = \frac{1}{2}\left[\hat{S}_n - \hat{S}_{n-4}\right]$$

dır. Diğer özdeşlik ispatı n ve m üzerinden tümevarım yoluyla yapılabilir. Öncelikle aşağıdaki özdeşliği ispatlayalım.

$$\hat{S}_{n+5} = -2\hat{S}_n - \hat{S}_{n+1} + 4\hat{S}_{n+3}$$

$n = 0$ için

$$\begin{aligned}\hat{S}_5 &= Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 \\ &= Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + (Q_1 + Q_2 + Q_3) + (Q_2 + Q_3 + Q_4) \\ &= Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3 + (Q_1 + Q_2 + Q_3) \\ &\qquad + (Q_2 + Q_3 + Q_1 + Q_2 + Q_3) \\ &= Q_0 + 3Q_1 + 4Q_2 + 4Q_3 \\ &= -2Q_0 - Q_0 - Q_1 + 4(Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3)\end{aligned}$$

$$= -2\hat{S}_0 - \hat{S}_1 + 4\hat{S}_3$$

olur. Kabul edelim ki eşitlik $n = k$ için sağlansın. Yani,

$$\hat{S}_{k+5} = -2\hat{S}_k - \hat{S}_{k+1} + 4\hat{S}_{k+3}$$

olsun. $n = k + 1$ için

$$\hat{S}_{k+6} = \hat{S}_{k+5} + Q_{k+6} = -2\hat{S}_k - \hat{S}_{k+1} + 4\hat{S}_{k+3} + Q_{k+6}$$

$$= -2\hat{S}_k - \hat{S}_{k+1} + 4\hat{S}_{k+3} + (Q_{k+3} + Q_{k+4} + Q_{k+5})$$

$$= -2\hat{S}_k - \hat{S}_{k+1} + 4\hat{S}_{k+3} + (Q_{k+4} - Q_{k+2} - Q_{k+1} + Q_{k+4} + Q_{k+4} - Q_{k+2} - +Q_{k+4})$$

$$= -2\hat{S}_{k+1} - \hat{S}_{k+2} + 4\hat{S}_{k+4}$$

yani eşitlik $n \geq 0$ için geçerlidir. $m = 5$ için

$$\hat{S}_{n+5} = -2\hat{S}_{k+1} - \hat{S}_{k+2} + 4\hat{S}_{k+4}$$

$$= -S_2\hat{S}_n - S_1\hat{S}_{n+1} - S_0\hat{S}_{n+2} + S_3\hat{S}_{n+3}$$

dir. $m = r$ için eşitliğin sağlandığını kabul edelim. Yani

$$\hat{S}_{n+r} = -S_{r-3}\hat{S}_n - S_{r-4}\hat{S}_{n+1} - S_{r-5}\hat{S}_{n+2} + S_{r-2}\hat{S}_{n+3}$$

dır. $m = r + 1$ için

$$\hat{S}_{n+r+1} = \hat{S}_{n+r} + Q_{n+r+1}$$

$$= -S_{r-3}\hat{S}_n - S_{r-4}\hat{S}_{n+1} - S_{r-5}\hat{S}_{n+2} + S_{r-2}\hat{S}_{n+3} + (Q_{n+r-2} + Q_{n+r-1} + Q_{n+r})$$

$$= -S_{r-2}\hat{S}_n - S_{r-3}\hat{S}_{n+1} - S_{r-4}\hat{S}_{n+2} + S_{r-1}\hat{S}_{n+3}$$

m için tümevarım ile sonuç elde edilir.

Özdeşlik 5.6.

$$(Q_nQ_{n+4})^2 + (2(Q_{n+1} + Q_{n+2})Q_{n+3})^2 = (Q_n^2 + 2(Q_{n+1} + Q_{n+2})Q_{n+3})^2$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n^2 &= (\mathcal{Q}_{n+3} - (\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2}))^2 \\ &= \mathcal{Q}_{n+3}^2 + (\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})^2 - 2(\mathcal{Q}_{n+1} + \\ &\qquad \mathcal{Q}_{n+2})\mathcal{Q}_{n+3} \end{aligned}$$

ve

$$\mathcal{Q}_n^2 + 2(\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})\mathcal{Q}_{n+3} = \mathcal{Q}_{n+3}^2 + (\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})^2$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_n^2 + 2(\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})\mathcal{Q}_{n+3})^2 &= \mathcal{Q}_{n+3}^4 + (\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})^4 + 2((\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})\mathcal{Q}_{n+3})^2 \\ &= (\mathcal{Q}_{n+3}^2 - (\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})^2)^2 + 2((\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})\mathcal{Q}_{n+3})^2 \\ &= (\mathcal{Q}_{n+3}^2 - (\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})^2)^2 \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_{n+3}^2 - (\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2})^2)^2 &= (\mathcal{Q}_{n+3} - (\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2}))^2 + (\mathcal{Q}_{n+3}(\mathcal{Q}_{n+1} + \mathcal{Q}_{n+2}))^2 \\ &= \mathcal{Q}_n^2 \mathcal{Q}_{n+4}^2 \end{aligned}$$

dir. Bulunan değer yerine yazılarak ispat tamamlanır.

Özdeşlik 5.7.

Bazı kuaterniyonların sonlu toplamları ile ilgili özdeşlikler aşağıda verilmiştir.

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{Q}_k = \frac{\mathcal{Q}_{n+2} + \mathcal{Q}_n + \mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}_2}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{Q}_{2k} = \frac{\mathcal{Q}_{2n+1} + \mathcal{Q}_{2n} - (1 + j + 2k)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{Q}_{2k+1} = \frac{\mathcal{Q}_{2n+2} + \mathcal{Q}_{2n+1} - (1 + 2j + 3k)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{Q}_{3k} = \sum_{k=0}^{3n-1} \mathcal{Q}_k + \mathcal{Q}_0 = \frac{\mathcal{Q}_{3n+2} + \mathcal{Q}_{3n} - (1 - i + j + k)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{Q}_{4k} = \frac{\mathcal{Q}_{4n+2} + \mathcal{Q}_{4n} - (1 - i + j + k)}{4}$$

İspat.

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k = \frac{Q_{n+2} + Q_n + Q_0 - Q_2}{2}$$

olduğunu gösterelim. Tümevarımdan faydalanarak ispatını yapabiliriz.$n = 0$ için

$$Q_0 = \frac{Q_2 + Q_0 + Q_0 - Q_2}{2}$$

için doğrudur.

$n = m$ için doğru olsun. Yani

$$\sum_{k=0}^{m} Q_k = \frac{Q_{m+2} + Q_m + Q_0 - Q_2}{2}$$

dır. $n = m + 1$ için

$$\sum_{k=0}^{m+1} Q_k = \sum_{k=0}^{m} Q_k + Q_{m+1}$$

olup

$$\sum_{k=0}^{m} Q_k + Q_{m+1} = \frac{Q_{m+2} + Q_m + Q_0 - Q_2}{2} + Q_{m+1}$$

$$= \frac{Q_{m+2} + Q_m + Q_0 - Q_2 + 2Q_{m+1}}{2}$$

$$= \frac{Q_{m+2} + Q_{m+1} + Q_m + Q_{m+1} + Q_0 - Q_2}{2}$$

$$= \frac{Q_{m+3} + Q_{m+1} + Q_0 - Q_2}{2}$$

böylece istenilen elde edilir.

$$\sum_{k=0}^{m+1} Q_k = \frac{Q_{m+3} + Q_{m+1} + Q_0 - Q_2}{2}$$

elde edilir. Diğerleri de aynı şekilde elde edilebilir.

6. FIBONACCI VE LUCAS KUATERNİYONLAR İÇİN BAZI ÖZELLİKLER

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar ile ilgili Halıcı (2012) ve Irmak (2020) tarafından yapılan çalışmalar verilmiştir.

Tanım 6.1.

$$Q_F = \begin{pmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix}$$

ifadesine Fibonacci kuaterniyon matris denir.

$$H = \{Q_n : Q_n = (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}); F_n\ n.\text{Fibonacci sayısı}\}$$

ve

$$\grave{H} = \left\{P_n : P_n = \begin{pmatrix} w & -z \\ \overline{z} & \overline{w} \end{pmatrix}; w, z \in \mathbb{C}\right\}$$

için

$$Q_n = (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n+3}) \to P_n = \begin{pmatrix} F_n + iF_{n+1} & -F_{n+2} - iF_{n+3} \\ F_{n+2} - iF_{n+3} & F_n - iF_{n+1} \end{pmatrix}$$

olacak şekilde H ve $\grave{H}$ arasında bir izomorfizm vardır.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$P_n = F_n E + F_{n+1} I + F_{n+2} J + F_{n+3} K$$

şeklindedir.

Teorem 6.1. (Cassini Özdeşliği)

$n \geq 1$ için

$$Q_{n-1} Q_{n+1} - Q_n^2 = (-1)^n (2Q_1 - 3k)$$

dir.

İspat.

$$Q_F = \begin{pmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix}$$

Fibonacci kuaterniyon matrisin determinantı alınırsa

$$\det(Q_F) = Q_0Q_2 - Q_1^2 = -(2Q_1 - 3k)$$

dır.

$$Q_F^2 = Q_2 = \begin{pmatrix} Q_3 & Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}$$

$$\det(Q_F^2) = Q_1Q_3 - Q_2^2 = (2Q_1 - 3k)$$

elde edilir. Kuaterniyon çarpımı ile Q^n

$$Q^n = (F_{n-1} + iF_n + jF_{n+1} + kF_{n+2})(F_{n+1} + iF_{n+2} + jF_{n+3} + kF_{n+4}) - (F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3})^2$$

ve

$$Q^n = Q_n = (-1)^n(2Q_1 - 3k)$$

böylece istenilen elde edilir.

Irmak (2020) farklı bir Fibonacci kuaterniyon matrisi tanımlayarak Halici (2012) tarafından ispatlanan teoremleri yeniden ispatlamıştır.

F matrisini

$$F = \begin{pmatrix} 1 + i + 2j + 3k & i + j + 2k \\ i + j + 2k & 1 + j + k \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Tanım 6.2.

$H = \{q = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 : a_n \in \mathbb{Z}\}$ kuaterniyonlar kümesi olmak üzere bir kuaterniyon kare matris i= 1,2 , j = 1,2 ve $a_{ij} \in H$ için

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ile tanımlanır.

A'nın determinantı $detA$

$$detA = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

olup bu çarpım yukarıdan aşağıya çarpma olarak adlandırılır. Tüm kuatermiyonların kümesi değişmeli olmadığından, başka bir çarpım yönü tanımlanabilir. Yani

$$detA = det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}$$

olup bu kurala aşağıdan yukarıya doğru çarpma kuralı denir.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 + i + 2j + 3k & i + j + 2k \\ i + j + 2k & 1 + j + k \end{pmatrix}$$

olarak alınsın.

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

olduğu daha önce gösterilmişti.

Şimdi verilecek olan teorem Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar için verilen Cassini özdeşliğidir.

Kuaterniyon matrisler için iki farklı determinant tanımı olduğundan Cassini özdeşliği için iki farklı versiyon elde edilir. Halıcı (2012) tarafından verilen 1. Tip Cassini Özdeşliği ispatlanırken aşağıdan yukarıya olarak tanımlanan determinant kullanılmıştır.

Teorem 6.2. (1. Tip Cassini Özdeşliği)

$n \geq 1$ için

$$Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 = (-1)^n(2Q_1 - 3k)$$

ve

$$\mathcal{K}_{n-1}\mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_n^2 = 5(-1)^{n-1}(2Q_1 - 3k)$$

dir.

İspat.

$$Q^nF = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + i + 2j + 3k & i + j + 2k \\ i + j + 2k & 1 + j + k \end{pmatrix}$$

olup örnek olarak birinci satır ile birinci sütunu çarpalım.

$$[(F_{n+1})\ (1+i+2j+3k)+F_n(i+j+2k)]$$

$=F_{n+1}+iF_{n+1}+2jF_{n+1}+3kF_{n+1}+iF_n+jF_n+2kF_n=F_{n+1}+iF_{n+2}+jF_{n+3}+kF_{n+4}$

$=F_{n+1}+i(F_n+F_{n+1})+j(2F_{n+1}+F_n)+k(3F_{n+1}+2F_n)$

$=F_n+iF_{n+2}+j(F_{n+1}+F_{n+1}+F_n)+k(F_{n+1}+F_{n+1}+F_{n+1}+F_n+F_n)$

$=F_n+iF_{n+2}+j(F_{n+1}+F_{n+2})+k(2F_{n+2}+F_{n+1})$

$=F_n+iF_{n+2}+jF_{n+3}+k(F_{n+2}+F_{n+2}+F_{n+1})$

$=F_n+iF_{n+2}+jF_{n+3}+k(F_{n+2}+F_{n+3})$

$=F_n+iF_{n+2}+jF_{n+3}+kF_{n+4}$

$=Q_{n+1}$

benzer şeklde matrisin diğer elemanları da elde edilebilir. Böylece çarpım sonucu

$$\begin{pmatrix} Q_{n+1} & Q_n \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix}$$

olur. Aşağıdan yukarıya determinant kuralı uygulanarak ifadesini kullanarak Önerme 2.1.2. den

$Q_{n-1}Q_{n+1}-Q_n^2=(\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{n-1}-\mathrm{F}_n^2)((1+j+k)(1+i+2j+3k)-(i+j+2k)^2)$

$=(-1)^n(1+i+2j+3k+j+ji+2j^2+3kj+k+ki+2kj+3k^2+i^2+ij+2ik+ji+j^2+2jk+2ki+2kj+4k^2)$

$=(-1)^n(-4+2i+4j+3k-(-6))$

$=(-1)^n2+2i+4j+6k-3k$

$=(-1)^n(2Q_1-3k)$

elde edilir. Önerme 2.1.1 den $F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$ ifadesi kullanılarak

$$(Q^{n-1}+Q^{n-1})F=\begin{pmatrix} L_{n+1} & L_n \\ L_n & L_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i+2j+3k & i+j+2k \\ i+j+2k & 1+j+k \end{pmatrix}$$

olup örnek olarak birinci satır ile birinci sütunu çarpalım.

$[(L_{n+1})(1+i+2j+3k)]+[L_n(i+j+2k)]$

$=L_{n+1}+iL_{n+1}+2jL_{n+1}+3kL_{n+1}+iL_n+jL_n+2kL_n$

$=L_{n+1}+i(L_{n+1}+L_n)+j(2L_{n+1}+L_n)+k(3L_{n+1}+2L_n)$

$$= L_{n+1} + iL_{n+2} + j(L_{n+1} + L_{n+1} + L_n) + k(L_{n+1} + 2L_{n+2})$$

$$= L_{n+1} + iL_{n+2} + j(L_{n+1} + L_{n+2}) + k(L_{n+2} + L_{n+3})$$

$$= L_{n+1} + iL_{n+2} + jL_{n+3} + kL_{n+4}$$

$$= \mathcal{K}_{n+1}$$

elde edilir. Benzer şekilde matris çarpımı yapılarak sonuç

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_{n+1} & \mathcal{K}_n \\ \mathcal{K}_n & \mathcal{K}_{n-1} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Aşağıdan yukarıya çarpım kuralı kullanılarak

$$\mathcal{K}_{n-1}\mathcal{K}_{n+1} - \mathcal{K}_n^2 = (L_{n+1}\, L_{n-1} - L_n^2)\,((1 + j + k)(1 + i + 2j + 3k) - (i + j + 2k)^2)$$

olup gerekli çarpma işlemleri yapıldığında

$$= 5(-1)^{n-1}(2Q_1 - 3k)$$

elde edilir.

Teorem 6.3. (2. Tip Cassini Özdeşliği)

$n \geq 1$ olmak üzere

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^2 = (-1)^n(2 + 2j + 5k)$$

ve

$$\mathcal{K}_{n+1}\mathcal{K}_{n-1} - \mathcal{K}_n^2 = 5(-1)^{n-1}(2 + 2j + 5k)$$

dır.

İspat.

Birinci Tip Cassini Özdeşliğindeki benzer yol takip edilerek

$$Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^2 = (F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2)((1 + i + 2j + 3k)(1 + j + k) - (i + j + 2k)^2)$$

$$= (-1)^n(2 + 2j + 5k)$$

dır. Benzer şekilde

$$\mathcal{K}_{n+1}\mathcal{K}_{n-1} - \mathcal{K}_n^2 = (L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2)((1 + i + 2j + 3k)(1 + j + k) - (i + j + 2k)^2$$

$$= 5(-1)^{n-1}(2 + 2j + 5k)$$

elde edilir.

Teorem 6.4.

$m, n \geq 1$

$$Q_{m+n} = F_{m+1}Q_n + F_m Q_{n-1}$$

dir.

İspat.

$$Q^{m+n}F = Q^m(Q^n F)$$

olduğundan

$$Q^{m+n}F = \begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i+2j+3k & i+j+2k \\ i+j+2k & 1+j+k \end{pmatrix}$$

çarpımında örnek olarak birinci satır ve birinci sütun çarpıldığında

$$(F_{m+n+1})(1+i+2j+3k) + (F_{m+n})(i+j+2k)$$

$$= F_{m+n+1} + iF_{m+n+1} + 2jF_{m+n+1} + 3kF_{m+n+1} + iF_{m+n} + jF_{m+n} + 2kF_{m+n}$$

$$= F_{m+n+1} + i(F_{m+n} + F_{m+n+1)} + j(F_{m+n+1} + F_{m+n}) + jF_{m+n+1} +$$
$$k(F_{m+n+1} + F_{m+n}) + kF_{m+n+1} + kF_{m+n+1} + kF_{m+n}$$

$$= F_{m+n+1} + iF_{m+n+2} + jF_{m+n+2} + jF_{m+n+1} + kF_{m+n+2} + kF_{m+n+1} + kF_{m+n+2}$$

$$= F_{m+n+1} + iF_{m+n+2} + jF_{m+n+3} + kF_{m+n+4}$$

$$= Q_{m+n+1}$$

şeklinde tüm matris elemanlarını elde edebiliriz. Böylece çarpım sonucu

$$\begin{pmatrix} Q_{m+n+1} & Q_{m+n} \\ Q_{m+n} & Q_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan

$$Q^m(Q^n F) = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{n+1} & Q_n \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix}$$

olup birinci satır ve ikinci sütunu çarparsak

$$Q_{m+n} = F_{m+1}Q_n + F_m Q_{n-1}$$

elde edilir.

Teorem 6.5.

$m, n \geq 1$ için

$$Q_{m+1}Q_{n+1} + Q_mQ_n = Q_{m+n+1} + iQ_{m+n+2} + jQ_{m+n+3} + kQ_{m+n+4}$$

dir.

Teorem 6.6.

$n \geq 1$ için

$$\bar{Q}_{n-1}\bar{Q}_{n+1} - \bar{Q}_n^2 = (-1)^n(2 - 2j - 5k)$$

$$\bar{Q}_{n+1}\bar{Q}_{n-1} - \bar{Q}_n^2 = (-1)^n(2\bar{Q}_1 + 3k)$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{n-1}\bar{\mathcal{K}}_{n+1} - \bar{\mathcal{K}}_n^2 = 5(-1)^{n-1}(2 - 2j - 5k)$$

$$\bar{\mathcal{K}}_{n+1}\bar{\bar{\mathcal{K}}}_{n-1} - \bar{\mathcal{K}}_n^2 = 5(-1)^{n-1}(2\bar{Q}_1 + 3k)$$

şeklindedir.

İspat.

Teorem 6.3 ün ispatından benzer yol izlenerek ispatlanır.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Özel sayı dizilerinin kuaterniyonları üzerine çalışmalar literatürde geniş bir yer tutmaktadır. Bu tez çalışmasında özel sayı dizilerinin kuaterniyonları ile ilgili detaylı bir çalışma yapılmıştır. Özellikle Tribonacci kuaterniyonlar ve Tribonacci-Lucas kuaterniyonlar ayrıntılı olarak incelenmiştir. Yine farklı bir Fibonacci kuaterniyon matris kullanılarak önceden bilinen temel özdeşlikler yeniden ispatlanmıştır. İleride farklı sayı dizileri için kuaterniyonlar tanımlanıp bu kuaterniyonların Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve temel özellikleri elde edilip literatürle karşılaştırması yapılarak çalışmalara devam edilebileceği düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

Akkus, I., & Kizilaslan, G. (2017). On some properties of Tribonacci quaternions. *ArXiv preprint arXiv:*1708.05367.

Akyiğit, M., Kösal, H., H., & Tosun, M. (2014). Fibonacci generalized quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24(3), 631-641.

Akyiğit, M., Kösal, H. H., & Tosun, M. (2013). Split fibonacci quaternions. *Advances in applied Clifford algebras*, 23(3), 535-545.

Çimen, C. B., & İpek, A. (2016). On pell quaternions and Pell-Lucas quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 39-51.

Halici, S., (2012). On Fibonacci quaternions, Adv. Appl. *Clifford Algebr.*, 22, 321-327.

Halici, S., (2013). On complex Fibonacci quaternions. *Advances in applied Clifford algebras*, 23(1), 105-112.

Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *The American Mathematical Monthly*, 70(3), 289-291.

Horadam, A. F. (1993). Quaternion recurrence relations. *Ulam Quarterly*, 2(2), 23-33.

Irmak, N. (2020). More identities for Fibonacci and Lucas quaternions. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(1), 369-375.

Iyer, M. R. (1969). A note on Fibonacci quaternions. *Fibonacci Quart*, 7(3), 225-229.

Iyer, M. R. (1969). Some results on Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quarterly*, 7(2), 201-210.

Koshy T.(2017) *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications* Vol.1, 125-130, 202-204, John Wiley & Sons, Inc., Newyork.

Polatli, E., Kizilates, C., & Kesim, S. (2016). On split k-Fibonacci and k-Lucas quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 353-362.

Polatli, E., & Kesim, S. (2015). On quaternions with generalized Fibonacci and Lucas number components. *Advances in Difference Equations*, 2015(1), 1-8.

Polatlı, E. (2016). A generalization of Fibonacci and Lucas Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(2), 719-730.

Ramírez, J. L. (2015). Some combinatorial properties of the k-Fibonacci and the k-Lucas quaternions. *Analele Universitatii" Ovidius" Constanta-Seria Matematica*, 23(2), 201-212.

Szynal-Liana, A., & Włoch, I. (2016). The Pell quaternions and the Pell octonions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 435-440.

Swamy, M. N. S. (1973). On generalized Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quarterly*, 11(5), 547-550.

Tasci, D., & Yalcin, F. (2015). Fibonacci-p quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(1), 245-254.

Vikipedi, (2001). Erişim: 06.12.2022, https://tr.wikipedia.org/wiki/D%C3%B6rdey

Yılmaz, N., & Taskara, N. (2014). Tribonacci and Tribonacci-Lucas numbers via the determinants of special matrices. *Applied Mathematical Sciences*, 8(39), 1947-1955.

Zorçelik, A. *Sayı ve matris dizilerinin üreteç fonksiyonları* (Master's thesis, Fen Bilimleri Enstitüsü).