T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

CHEBYSHEV POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

HALİME TURGUT

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

YOZGAT - 2023

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

CHEBYSHEV POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

HALİME TURGUT

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

Bu çalışma Yozgat Bozok Üniversitesi Araştırma Projeleri Birimi tarafından FYL-2022-1063 kodu ile desteklenmiştir.

YOZGAT - 2023

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ONAY FORMU

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111319015 numaralı öğrencisi Halime TURGUT'un hazırladığı "**Chebyshev Polinomlarının Özellikleri Üzerine**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 19/01/2023 günü saat 09:30'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan :

Jüri Üyesi :
(Danışman)

Jüri Üyesi :

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun …….. tarih ve ……sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

…...../...../.....

Prof. Dr. Hamdi TEMEL

Müdür

KYT-FRM-110/00

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

HALİME TURGUT

19/01/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

CHEBYSHEV POLİNOMLARININ ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

HALİME TURGUT

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. FUNDA TAŞDEMİR

Bu tez çalışmasında birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları ve özellikleri ile ilgili detaylı bir inceleme yapılmıştır. Ayrıca, Chebyshev polinomlarının, özel sayı dizileri ve özel sayı dizilerinin polinomları ile ilişkilerine yer verilmiştir. Bu çalışmanın birinci bölümünde Chebyshev polinomları ile ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde tez boyunca yararlanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümünde ise özel sayı dizileri ile ilgili polinomlara değinilmiştir. Dördüncü bölümde, Chebyshev polinomlarının her bir çeşidinin temel özellikleri detaylı olarak verilmiştir. Yine, Chebyshev polinomlarının, özel sayı dizileri ve özel sayı dizilerinin polinomları ile ilişkilerine örneklerle yer verilmiştir. Bu bölümde birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomlarının trigonometri ile ilişkileri çalışılmıştır. Son olarak bu bölümde Chebyshev polinomlarının farklı bir hali olan ötelenmiş (shifted) Chebyshev polinomları dört çeşit Chebyshev polinomlar için incelenmiştir. Beşinci bölümde ise Chebyshev polinomlarının dört farklı çeşidinin türev ve integralleri ayrıntılı olarak verilmiştir. Son olarak altıncı bölümde ise yapılan çalışma özetlenerek, değerlendirmeler yapılmış ve bazı önerilerde bulunulmuştur.

2023, ix+60 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Chebyshev polinomları, Fibonacci sayıları, Pell sayıları, Lucas sayıları, Pell- Lucas sayıları.

ABSTRACT

MASTER THESIS

ON THE PROPERTIES OF CHEBYSHEV POLYNOMIALS

HALİME TURGUT

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. FUNDA TAŞDEMİR

In this thesis, a detailed examination of the first, second, third and fourth kinds of Chebyshev polynomials and their properties have been made. Also, the relations of Chebyshev polynomials with special number sequences and polynomials of special number sequences are given. In the first section of this study, studies on Chebyshev polynomials are mentioned. In the second section, the basic definitions and theorems used throughout the thesis are given. In the third section, polynomials related to special number sequences are mentioned. In the fourth section, the basic properties of each kind of Chebyshev polynomials are given in detail. Again, the relations of Chebyshev polynomials with special number sequences and polynomials of special number sequences are given with examples. In this section, the relations of the first and second kind of Chebyshev polynomials with trigonometry are studied. Finally, in this section, shifted Chebyshev polynomials, which are different versions of Chebyshev polynomials, are examined for four kinds of Chebyshev polynomials. In the fifth chapter, derivatives and integrals of four different kinds of Chebyshev polynomials are given in detail. Finally, in the sixth section, the study is summarized, evaluations are made and some suggestions are given.

2023, ix+60 PAGE

KEYWORDS: Chebyshev polynomials, Fibonacci numbers, Pell numbers, Lucas numbers, Pell-Lucas numbers.

ÖNSÖZ

Ciddi bir emek ve özveri ile hazırladığım tezimin çalışma sürecinde olumlu tavırlarıyla beni cesaretlendiren bilgi ve birikimiyle farklı açılardan bakmamı sağlayan öğrencisi olmaktan gurur duyduğum sayın hocam Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR'e teşekkür ederim. Tez çalışmamda katkılarından dolayı sayın Doç. Dr. Handan KÖSE ve Doç. Dr. Mehmet EKİCİ hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Çalışma sürecinde bana desteklerini esirgemeyen eşim Mustafa TURGUT'a çok teşekkür ederim. Bu çalışmanın gerçekleşmesinde maddi destek sağlayan Yozgat Bozok Üniversitesi Araştırma Projeleri (BAP) birimine katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Bu tez çalışması;
Yozgat Bozok Üniversitesi Araştırma Projeleri Birimi tarafından FYL-2022-1063 nolu proje ile desteklenmiştir.

HALİME TURGUT

19/01/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Tez Onay Sayfası…….. i

Tez Beyanı…… ii

Özet…….. iii

Abstract…… iv

Önsöz…… v

İçindekiler…… vi

Tablolar Listesi…… viii

Simgeler ve Kısaltmalar Listesi…… ix

1. GİRİŞ…… 1

2. TEMEL BİLGİLER..……..... 3

3. ÖZEL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİLİ POLİNOMLAR……..…… 6

3.1. Fibonacci ve Lucas Polinomları..……..…….. 6

3.2. Pell ve Pell-Lucas Polinomları ……..……. 8

4. CHEBYSHEV POLİNOMLARI ve ÖZELLİKLERİ..……...…….. 10

4.1. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomları……..…… 10

4.1.1. $T_n(x)$ için Açık Bir Formül..……..…… 13

4.1.2. $T_n(x)$ için Başka Bir Açık Formül…… 16

4.1.3. $T_n(x)$ ve Pell Denklemi……. 18

4.1.4. $T_n(x)$ ve Trigonometri……... 18

4.1.5. $T_n(x)$ için Bir Toplam Formülü……..... 22

4.2. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomları……... 24

4.2.1. $U_n(x)$ için Açık Bir Formül……..... 27

4.2.2. $U_n(x)$ için Başka Bir Açık Formül…… 28

4.2.3. $U_n(x)$ ve Trigonometri…….. 32

Sayfa

4.2.4. $U_n(x)$ için Chebyshev Yinelemeleri……. 34

4.2.5. Chebyshev Polinomları için Cassini-benzeri Formüller……. 41

4.2.6. Chebyshev Polinomları için Fonksiyon Oluşturma……..... 41

4.3. Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomları……..... 41

4.4. Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomları……...……. 42

4.5. Ötelenmiş (Shifted) Chebyshev Polinomları..……....……... 43

4.5.1. Ötelenmiş Chebyshev Polinomları……..……..... 43

4.5.2. $[a, b]$ Genel Aralığı için Chebyshev Polinomları…….....…….…..... 46

5. CHEBYSHEV POLİNOMLARININ TÜREV ve İNTEGRALLERİ……..... 48

6. SONUÇ ve ÖNERİLER ……...…….. 58

7. KAYNAKLAR……... 59

ÖZGEÇMİŞ

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo		**Sayfa**
Tablo 3.1.	İlk 10 Fibonacci polinomu	7
Tablo 3.2.	İlk 10 Lucas polinomu	8
Tablo 3.3.	İlk 10 Pell ve Pell-Lucas sayıları	9
Tablo 3.4.	İlk 10 Pell ve Pell-Lucas polinomları	9
Tablo 4.1.	Farklı n değerleri için $\cos n\theta$ fonksiyonu	19

SİMGELER VE KISALTMALAR

Tez çalışması boyunca kullanılmış olan simgeler ve kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{F_n}$	: n. Fibonacci sayısı
$\boldsymbol{f_n(x)}$	**:** n. Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{g_n(x)}$	**:** Genelleştirilmiş Fibonacci polinomu
$\boldsymbol{L_n}$	: n. Lucas sayısı
$\boldsymbol{l_n(x)}$	**:** n. Lucas polinomu
$\boldsymbol{P_n}$	**:** n. Pell sayısı
$\boldsymbol{p_n(x)}$	**:** n. Pell polinomu
$\boldsymbol{T_n(x)}$	**:** n. mertebeden birinci çeşit Chebyshev polinomu
$\boldsymbol{T_n^*(x)}$	**:** n. mertebeden birinci çeşit ötelenmiş Chebyshev polinomu
$\boldsymbol{U_n(x)}$	**:** n. mertebeden ikinci çeşit Chebyshev polinomu
$\boldsymbol{U_n^*(x)}$	**:** n. mertebeden ikinci çeşit ötelenmiş Chebyshev polinomu
$\boldsymbol{V_n(x)}$	**:** n. mertebeden üçüncü çeşit Chebyshev polinomu
$\boldsymbol{V_n^*(x)}$	**:** n. mertebeden üçüncü çeşit ötelenmiş Chebyshev polinomu
$\boldsymbol{Q_n}$	**:** n. Pell-Lucas sayısı
$\boldsymbol{q_n(x)}$	**:** n. Pell-Lucas polinomu
$\boldsymbol{W_n(x)}$	**:** n. mertebeden dördüncü çeşit Chebyshev polinomu
$\boldsymbol{W_n^*(x)}$	**:** n. mertebeden dördüncü çeşit ötelenmiş Chebyshev polinomu

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
LHS	**:** Eşitliğin Sol Tarafı
RHS	**:** Eşitliğin Sağ Tarafı

1. GİRİŞ

Literatürde önemli bir yere sahip Chebyshev polinomları yaklaşım teorisinde kullanılan polinom ailesinin önemli bir üyesidir. Üstelik Chebyshev polinomlarının Fibonacci ve Lucas sayı dizileri ve polinomları ile yakından ilişkili olması bu alanda yapılan çalışmalarda motivasyon kaynağı olmuştur. Chebyshev polinomlarının temel özellikleri, üreteç fonksiyonları, türevleri, integralleri, özel sayı dizileri ve polinomları ile bağlantıları birçok kaynakta çalışma konusu olmuştur.

Dört çeşit olan Chebyshev polinomları arasında birinci çeşit Chebyshev polinomunun çok yönlü ve önemli olması yapılan çalışmalarda daha çok yer verilmesine neden olmuştur. Özellikle Chebyshev polinomlarının türev ve integrallerini içeren çalışmalarda sürekli olarak birinci çeşit Chebyshev polinomları üzerinden eşitlikler ve sonuçlar verilmiştir. Chebyshev polinomlarının diğer çeşitlerinin (özellikle ikinci çeşit) özellikleri, türev ve integrallerinin hesaplanması açık problemler olarak literatürde yer almaktadır. Chebyshev polinomlarının Fibonacci ve Lucas gibi özel sayı dizileri ve bu dizilerin polinomları ile yakın ilişkide olması, (ikinci çeşit Chebyshev polinomu ile Fibonacci dizisi ve birinci çeşit Chebyshev polinomu ile Lucas dizisi yakından ilişkili) elde edilecek sonuçların ilginç ve yararlı olmasına neden olmaktadır.

Chebyshev polinomlarının diğer önemli bir özelliği ise; maksimum hatayı minimum yapma eğiliminde olmalarıdır. Sayısal analiz, Fourier serileri, graf teorisi ve diğer birçok alanda önemli bir role sahip olan Chebyshev polinomları sayılar teorisi alanında da aynı önemli rolü devam ettirmektedir. Bu nedenle farklı tipteki Chebyshev polinomlarının ilginç özelliklerinin, önemli ilişkilerinin, türev ve/veya integrallerinin elde edilmesi ile Chebyshev polinomlarına dolayısıyla Fibonacci ve/veya Lucas sayı dizilerine ilişkin önemli katkılar sağlanacaktır.

Chebyshev polinomları matematiğin birçok alanında yer almış ve bu konuda çok sayıda makale ve kitap yazılmıştır (Rivlin, 1990; Mason, 2003). Zhang (2002), Chebyshev polinomları ile ilgili bazı özdeşlikler vermiştir. Horadam (2002) tarafından tanımlanan Vieta-Fibonacci ve Vieta-Lucas polinomları birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları ile yakından bağlantılıdır. Bu nedenle modifiye Chebyshev polinomları olarak Vieta polinomları Vitula ve Slota (2006) tarafından yeniden tanımlamıştır. Zhang (2004)

Chebyshev polinomlarının türevini kullanarak bazı teoremler ispatlamıştır. Yakın geçmişte; Gospava B. Djordjevic (2009) de genelleştirilmiş Chebyshev polinomları üzerine çalışmalar yapmıştır. Çalık (2010), Chebyshev polinomlarının dört farklı çeşidinin bazı temel özelliklerini vermiştir. Wang ve Zhang (2012) Chebyshev polinomlarının kuvvet toplamlarını içeren bir problemi incelemiş ve birinci çeşit Chebyshev polinomlarının türevini vermiştir. Yang (2014) Chebyshev polinomları ve Fibonacci polinomlarının türevleri üzerine çalışmıştır. Cesarano (2015) Chebyshev polinomunun integrali üzerine çalışmıştır. Whang (2015), Chebyshev polinomları, Fibonacci polinomları ve Lucas polinomları arasındaki ilişkiyi göstermiştir. Wang ve Hu (2018), Wang ve Zhang (2012) tarafından önerilen açık problemi çözmüşlerdir.

Chebyshev polinomları hem sayılar teorisi hem de matematiğin farklı alanlarında teorik ve uygulamada önemli bir role sahiptir. Aynı zamanda bu polinomların Fibonacci ve Lucas dizileri gibi özel sayı dizileri ile yakından ilişkili olması birçok araştırmacı için ilgi çekici olmuştur. Literatürde bazı açık problemlerin yer alması, türev ve integral konusunda araştırılacak açık problemlerin yer alması nedeniyle bu alanda yapılacak katkı ile hem literatürün detaylı bir incelemesi yapılmış olacak hem de açık problemlere çözüm bulunmaya çalışılacaktır.

2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde, tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir (Koshy, 2001).

Tanım 2.1. (Fibonacci Sayıları)

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Fibonacci sayıları denir ve n. Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir.

Başlıca Fibonacci sayıları:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, … şeklindedir.

Tanım 2.2. (Lucas Sayıları)

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Lucas sayıları denir ve n. Lucas sayısı L_n ile gösterilir.

Başlıca Lucas sayıları:

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, … şeklindedir.

Tanım 2.3. (Pell Sayıları)

$P_0 = 0$, $P_1 = 1$ ve $n \geq 2$ için $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Pell sayıları denir ve n. Pell sayısı P_n ile gösterilir.

Başlıca Pell sayıları:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, … şeklindedir.

Tanım 2.4. (Pell-Lucas Sayıları)

$Q_0 = 2$, $Q_1 = 2$ ve $n \geq 2$ için $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Pell-Lucas sayıları denir ve n. Pell-Lucas sayısı Q_n ile gösterilir.

Başlıca Pell-Lucas sayıları:

2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, … şeklindedir.

Tanım 2.5. (Altın Oran)

Altın oran, uyum açısından matematikte, bir bütünün parçaları olarak gözlemlenen, en yetkin boyutları verdiği düşünülen geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır. Aynı zamanda iki miktardan büyük olanın küçüğe oranı, miktarların büyük olanına oranı ile aynı ise altın orandır. Altın oran konusundan ilk bahseden kişiler belli olmasa da Mısırlılar'ın ve Yunanlılar'ın bu konu üzerinde yapmış oldukları bazı çalışmalar olduğu görülmektedir. Öklid, milattan önce 300'lü yıllarda yazdığı "Elementler" adlı tezinde "uç ve önemli oranda bölmek" olarak altın oranı ifade etmiştir. Mısırlıların Keops Piramidinde, Leonardo da Vinci'nin "İlahi Oran" adlı çalışmada sunduğu resimlerde kullanıldığı bilinen "altın oran", "Fibonacci Sayıları" olarak da bilinmektedir.

Bu oranın kısaca gösterimi:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$$

şeklindedir.

Bir Fibonacci sayısının kendinden önceki Fibonacci sayısına bölümü ile elde edilen sonuç, 1,618…'dir. Örneğin; $6765/4181 = 1{,}618\ldots$ sonucunu vermektedir. Bu durum 89'dan daha küçük olan Fibonacci sayıları için 0,01 gibi küçük bir farklılıkla ortaya çıksa da, büyük sayıların tamamında sonuç aynıdır. Yani dizideki ardışık iki sayının oranı, sayılar büyüdükçe Altın Oran'a yani 1.618'e yaklaşır, 89/55 ve sonrasında ise 1.618…'de sabitlenir.

Teorem 2.6. (Binet Formülleri)

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri α ve β olmak üzere F_n ve L_n için Binet formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir (Özvatan, 2018).

Burada

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ile verilir.

Benzer şekilde $x^2 - 2x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri γ ve δ olmak üzere P_n ve Q_n için Binet formülleri sırasıyla

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}$$

ve

$$Q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2}$$

dır. Burada

$$\gamma = 1 + \sqrt{2} \text{ ve } \delta = 1 - \sqrt{2}$$

ile verilir.

F_n ve L_n için Binet formüllerinden

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n \text{ ve } L_{-n} = (-1)^n L_n,$$

P_n ve Q_n için Binet formüllerinden

$$P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n \text{ ve } Q_{-n} = (-1)^n Q_n$$

elde edilir.

3. ÖZEL SAYI DİZİLERİ İLE İLİŞKİLİ POLİNOMLAR

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan $p_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir polinom (çok terimli) denir. Buradaki n doğal sayısına polinomun derecesi, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sayılarına da polinomun katsayıları denir. Örneğin; $x^2 - 6x + 15$ ifadesi ikinci dereceden bir polinom olarak ifade edilebilirken, $x^2 - 5x + 2x^{\frac{3}{2}}$ ifadesi bir polinomu ifade etmez. Bunun sebebi polinom derecelerinin rasyonel değil bir doğal sayı olmasıdır. Bir polinomda, toplama, çıkarma, çarpma, pozitif sayıların üssünü alma gibi işlemler kullanılabilmektir.

Polinom fonksiyonları çok uygun özelliklere sahiptirler. Polinomlar, x in istenilen her değeri için türevlenebilir ve herhangi bir aralıkta integrallenebilirdirler. Bunun yanı sıra $p(x)$ polinomu a_0, a_1, a_2, … , a_n gibi $n+1$ tane katsayı tarafından tam olarak belirtilebilir.

3.1. Fibonacci ve Lucas Polinomları

Fibonacci polinomları $f_n(x)$, ilk olarak 1883 yılında Belçikalı matematikçi Eugene C. Catalan ve daha sonra Alman matematikçi Ernst Jacobsthal (1882-1965) tarafından araştırıldı. Aynı derecede ünlü Lucas polinomları $l_n(x)$ 1970 yılında Marjorie Bicknell tarafından çalışılmıştır. Fibonacci ve Lucas polinomları, daha geniş bir tamsayı ailesi olan $g_n(x)$ gibonacci (genelleştirilmiş Fibonacci) polinomlar ailesine aittir.

Tanım 3.1.1.

$n \geq 2$ olmak üzere

$$g_n(x) = xg_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısında başlangıç değerleri olan $g_0(x) = 0$ ve $g_1(x) = 1$ olarak alındığında $g_n(x) = f_n(x)$ Fibonacci polinomu elde edilir. Örneğin $f_2(x)$ ve $f_3(x)$ polinomları

$$f_2(x) = xf_1(x) + f_0(x) = x.1 + 0 = x$$

ve benzer şekilde,

$$f_3(x) = xf_2(x) + f_1(x) = x.x + 1 = x^2 + 1$$

dır.

İlk 10 Fibonacci polinomu aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 3.1. İlk 10 Fibonacci Polinomu

n	$f_n(x)$
1	1
2	x
3	$x^2 + 1$
4	$x^3 + 2x$
5	$x^4 + 3x^2 + 1$
6	$x^5 + 4x^3 + 3x$
7	$x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$
8	$x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$
9	$x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$
10	$x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x$

$g_0(x) = 2$ ve $g_1(x) = x$ olarak alındığında $g_n(x) = l_n(x)$ Lucas polinomu elde edilmiş olur. Örneğin $l_2(x)$ ve $l_3(x)$ polinomları

$$l_2(x) = xl_1(x) + l_0(x) = x.x + 2 = x^2 + 2$$

ve benzer şekilde

$$l_3(x) = xl_2(x) + l_1(x) = x(x^2 + 2) + x = x^3 + 3x$$

bulunur.

İlk 10 Lucas polinomu aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 3.2. İlk 10 Lucas Polinomu

n	$l_n(x)$
1	x
2	x^2+2
3	x^3+3x
4	x^4+4x^2+2
5	x^5+5x^3+5x
6	$x^6+6x^4+9x^2+2$
7	$x^7+7x^5+14x^3+7x$
8	$x^8+8x^6+20x^4+16x^2+2$
9	$x^9+9x^7+27x^5+30x^3+9x$
10	$x^{10}+10x^8+35x^6+50x^4+25x^2+2$

Açık olarak $F_n = f_n(1)$ ve $L_n = l_n(1)$ dir.

Dikkat çekici bir diğer özellik ise n tek ise f_n çift bir fonksiyon, n çift ise f_n tek bir fonksiyondur. Yine n tek ise l_n tek , n çift ise l_n çift bir fonksiyondur.

3.2. Pell ve Pell-Lucas Polinomları

Pell polinomu $p_n(x)$ ve Pell-Lucas polinomu $q_n(x)$ olmak üzere, $p_n(x) = f_n(2x)$ ve $q_n(x) = l_n(2x)$ olarak tanımlanır. $n \geq 2$ için hem Pell polinomu $p_n(x)$ hem de Pell-Lucas Polinomu $q_n(x)$

$$g_n(x) = 2xg_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)$$

ikinci mertebeden indirgeme bağıntısını sağlarlar.

$g_0(x) = 0$ ve $g_1(x) = 1$ alındığında

$$g_n(x) = p_n(x)$$

olur. Benzer şekilde, $g_0(x) = 2$ ve $g_1(x) = 2x$ alındığında

$$g_n(x) = q_n(x)$$

olacaktır. Pell sayıları P_n ve Pell-Lucas sayıları Q_n olmak üzere $P_n = p_n(1) = f_n(2)$, $2Q_n = q_n(1) = l_n(2)$ dir. Aynı ifade $p_n\left(\frac{1}{2}\right) = F_n$, $q_n(\frac{1}{2}) = L_n$ şeklinde de ifade edilebilir.

İlk 10 Pell ve Pell-Lucas sayısı Tablo 3.3'te, ilk 10 Pell ve Pell-Lucas polinomu Tablo 3.4'te gösterilmiştir:

Tablo 3.3. İlk 10 Pell ve Pell-Lucas Sayıları

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
Q_n	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363

Tablo 3.4. İlk 10 Pell ve Pell-Lucas Polinomları

n	$p_n(x)$	$q_n(x)$
1	1	$2x$
2	$2x$	$4x^2+2$
3	$4x^2+1$	$8x^3+6x$
4	$8x^3+4x$	$16x^4+16x^2+2$
5	$16x^4+12x^2+1$	$32x^5+40x^3+10x$
6	$32x^5+32x^3+6x$	$64x^6+94x^4+36x^2+2$
7	$64x^6+80x^4+24x^2+1$	$128x^8+224x^5+112x^3+14x$
8	$128x^8+192x^5+80x^3+8x$	$256x^8+512x^6+320x^4+64x^2+2$
9	$256x^8+448x^6+240x^4+40x^2+1$	$512x^9+1152x^7+864x^5+240x^3+18x$
10	$512x^9+1024x^7+672x^5+160x^3+10x$	$1024x^{10}+2560x^8+2240x^6+800x^4+100x^2+2$

Pell-Lucas sayıları, Pell ve Lucas ile hiçbir ilgisi olmamasına rağmen hem Pell hem de Lucas'tan adını alır. Fibonacci ve Lucas sayıları gibi, Pell ve Pell-Lucas sayıları da, ikiz sayılar gibi davranır ve birçok ortak formül ve bağıntıları mevcuttur.

4. CHEBYSHEV POLİNOMLARI VE ÖZELLİKLERİ

Adını ünlü Rus matematikçi Pafnuty Lvovich Chebyshev'den (1821-1894) alan Chebyshev polinomları, Pell ve Pell-Lucas polinomlarıyla yakından ilişkilidir. Tıpkı Pell polinom ailesinin, birbirleriyle yakından ilişkili iki alt aile olan $\{p_n(x)\}$ ve $\{q_n(x)\}$'den oluştuğu gibi Chebyshev ailesi de yakından ilişkili iki alt aile $\{T_n(x)\}$ ve $\{U_n(x)\}$ den oluşur. T harfi Fransızca Tchebycheff'ten veya Almanca Tschebyscheff'ten gelir. Chebyshev polinomları, yaklaşım teorisi, kombinatorik, Fourier serileri, nümerik analiz, graf teorisinde ve diğer birçok alanda çeşitli uygulamalara sahiptir.

Bu bölümde dört çeşit Chebyshev polinomu detaylı olarak incelenecektir.

4.1. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomları

$T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$ ve $n \geq 2$ için

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \tag{1.2}$$

yinelemeli (tekrarlı) bağıntısı ile tanımlanan polinomlara birinci çeşit Chebyshev polinomu denir ve $T_n(x)$ ile gösterilir.

Örneğin;

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x)$$

$$= 2x.x - 1$$

$$= 2x^2 - 1$$

ve

$$T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x)$$

$$= 2x(2x^2 - 1) - x$$

$$= 4x^3 - 3x$$

dir.

Birinci çeşit Chebyshev polinomunun ilk 11 terimi aşağıda verilmiştir:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$

$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$

$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1.$

Lemma 4.1.1. (https://brillant.org/wiki/)

$n \geq 0$ olmak üzere birinci çeşit Chebyshev polinomu için aşağıdakiler özellikler vardır:

1) $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$

2) $T_{2n}(0) = (-1)^n$

3) $T_n(1) = 1$

4) $T_{2n+1}(0) = 0$

5) $T_n(-1) = (-1)^n$

x değişkeninin kuvvetlerinin $T_n(x)$ birinci çeşit Chebyshev polinomları cinsinden ifadesi

$$x^k = \begin{cases} 2^{\frac{1}{k-1}}\left[T_k(x)+\binom{k}{1}T_{k-2}(x)+\binom{k}{2}T_{k-4}(x)+\cdots+\binom{k}{\frac{(k-1)}{2}}T_1(x)\right]; & k \text{ tek ise} \\ 2^{\frac{1}{k-1}}\left[T_k(x)+\binom{k}{1}T_{k-2}(x)+\binom{k}{2}T_{k-4}(x)+\cdots+\frac{1}{2}\binom{k}{\frac{k}{2}}T_0(x)\right]; & k \text{ çift ise} \end{cases}$$

eşitlikleri ile verilir (Vetterling ve Press, 1988).

Şimdi $T_n(x)$ ve $q_n(x)$ polinomlarının yakından ilişkili olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} q_1(x) &= 2x \\ &= 2i^4x \\ &= 2(-i)(ix) \\ &= 2(-i)T_1(ix) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q_2(x) &= 4x^2 + 2 \\ &= 2(2x^2 + 1) \\ &= 2i^4(2x^2 + 1) \\ &= 2(-i)^2[2(ix)^2 - 1] \\ &= 2(-i)^2T_2(ix) \end{aligned}$$

Daha genel olarak, $n \geq 2$ olmak üzere n ye kadar tüm tamsayılar için eşitliğin doğru olduğunu varsayalım. Böylece, (1.2) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} T_n(ix) &= 2(ix)T_{n-1}(ix) - T_{n-2}(ix) \\ &= 2ix\left[\frac{q_{n-1}(x)}{2(-i)^{n-1}}\right] - \left[\frac{q_{n-2}(x)}{2(-i)^{n-2}}\right] \\ &= \frac{2xq_{n-1}(x)}{2(-i)^n} + \frac{q_{n-2}(x)}{2(-i)^n} \\ &= \frac{2xq_{n-1}(x) + q_{n-2}(x)}{2(-i)^n} \\ &= \frac{q_n(x)}{2(-i)^n} \end{aligned}$$

olup $2(-i)^nT_n(ix) = q_n(x)$ bulunur. Böylece tümevarım yöntemiyle $n \geq 0$ için $q_n(x) = 2(-i)^nT_n(ix)$ olduğu ispatlanmış olur.

Örneğin,

$$2(-i)^5 T_5(ix) = -2i[16(ix)^5 - 20(ix)^3 + 5(ix)]$$

$$= -2i(16ix^5 + 20ix^3 + 5ix)$$

$$= 32x^5 + 40x^3 + 10x$$

$$= q_5(x)$$

bulunur.

Aynı zamanda, $q_n(1) = 2Q_n$, olduğundan $2Q_n = 2(-i)^n T_n(i)$; yani $Q_n = |T_n(i)|$, burada $|z|$, z karmaşık sayısının mutlak değerini gösterir.

Örneğin;

$$Q_5 = (-i)^5 T_5(i)$$

$$= -i(16i^5 - 20i^3 + 5i)$$

$$= 16 + 20 + 5$$

$$= 41$$

benzer şekilde

$$Q_6 = (-i)^6 T_6(i)$$

$$= -1(32i^6 - 48i^4 + 18i^2 - 1)$$

$$= 32 + 48 + 18 + 1$$

$$= 99$$

bulunur.

4.1.1. $T_n(x)$ için Açık Bir Formül

$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ yineleme bağıntısının karakteristik denklemi $t^2 - 2xt + 1 = 0$ olup denklemin çözümleri

$$\frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

dır. Böylece yineleme bağıntısının genel çözümü şu şekilde verilir:

$T_n(x) = A(x+\sqrt{x^2-1})^n + B(x-\sqrt{x^2-1})^n$ için $A = A(x)$ ve $B = B(x)$ belirlenecektir. İki başlangıç koşulunu kullanarak

$$T_n(x) = A(x+\sqrt{x^2-1})^n + B(x-\sqrt{x^2-1})^n$$

denkleminde

$$T_0(x) = A + B$$

$T_0(x) = 1$ olduğundan $A + B = 1$ bulunur.

$$T_1(x) = Ax + Bx + A\sqrt{x^2-1} - B\sqrt{x^2-1}$$

$$= x(A+B) + \sqrt{x^2-1}(A-B)$$

$T_1(x) = x$ olduğundan $A = B$ olup $A = B = \frac{1}{2}$ bulunur. Böylece istenen açık formül $n \geq 0$ için

$$T_n(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2} \qquad (1.3)$$

bulunur.

Örneğin;

$$2T_3(x) = (x+\sqrt{x^2-1})^3 + (x-\sqrt{x^2-1})^3$$

$$= 2[x^3 + 3x(x^2-1)]$$

$$= 2(4x^3 - 3x)$$

bulunur. Böylece $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ olduğu görülür.

(1.3) denklemi aynı zamanda $|T_n(i)| = Q_n$ ispatı için de kullanılabilir:

$$2T_n(i) = \left(i+\sqrt{i^2-1}\right)^n + \left(i-\sqrt{i^2-1}\right)^n$$

$$= \left(i+i\sqrt{2}\right)^n + \left(i-i\sqrt{2}\right)^n$$

$$= i^n(\gamma^n + \delta^n)$$

$|i| = 1$ olduğundan

$$|T_n(i)| = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2} = Q_n$$

olur.

Aşağıdaki örnek, birinci çeşit Chebyshev polinomu $T_n(x)$ in ilginç bir özelliğini göstermektedir.

Örnek 4.1.1.1.

$$2T_m(x)T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x)$$

olduğunu gösterelim.

İspat için $m \geq n \geq 0$ olduğunu kabul edelim. Kolaylık için $\sqrt{x^2 - 1} = r$, yani $x^2 - r^2 = 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
4T_m(x)T_n(x) &= [(x+r)^m + (x-r)^m][(x+r)^n + (x-r)^n] \\
&= [(x+r)^{m+n} + (x-r)^{m+n}] + (x+r)^m(x-r)^n + (x-r)^m(x+r)^n \\
&= 2T_{m+n}(x) + (x+r)^n(x-r)^n[(x+r)^{m-n} + (x-r)^{m-n}] \\
&= 2T_{m+n}(x) + (x^2 - r^2)^n 2T_{m-n}(x) \\
&= 2T_{m+n}(x) + 2T_{m-n}(x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$2T_m(x)T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)$$

bulunur.

Benzer şekilde $n \geq m$ için $2T_m(x)T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{n-m}(x)$ olduğu da gösterilebilir. Böylece istenen sonuç, iki durumun birleştirilmesiyle elde edilir.

Örneğin, $m = 5$ ve $n = 3$ olsun. Bu durumda

$$T_8(x) + T_2(x) = (128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1) + (2x^2 - 1)$$

$$= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 30x^2$$

$$= 2(16x^5 - 20x^3 + 5x)(4x^3 - 3x)$$

$$= 2T_5(x)T_3(x)$$

dir.

Özel olarak $n = 1$ ve $m \geq 1$ alındığında

$$T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x) = 2T_m(x)T_1(x)$$

$$= 2xT_m(x)$$

bulunur.

Bu denklem (1.2) ile verilen Chebyshev yineleme bağıntısıdır. (1.2) denklemi ve binom teoremi kullanılarak $T_n(x)$ için başka bir açık formül geliştirelim.

4.1.2. $T_n(x)$ için Başka Bir Açık Formül

Kolaylık için $\sqrt{x^2 - 1} = r$ olsun. Bu durumda (1.3) ve binom teoreminden

$$2T_n(x) = (x + r)^n + (x - r)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [1 + (-1)^k] \binom{n}{k} x^{n-k} r^k$$

$$= 2 \sum_{k\ çift}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} x^{n-2k} r^{2k}$$

ve buradan

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} x^{n-2k} r^{2k}$$

bulunur. Böylece

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} (x^2-1)^k x^{n-2k} \tag{1.4}$$

elde edilir.

Örneğin,

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{3}{2k} (x^2-1)^k x^{3-2k}$$

$$= \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{2} (x^2-1)x$$

$$= x^3 + 3x(x^2-1)$$

$$= 4x^3 - 3x$$

bulunur.

(1.4)'ten Q_n için açık bir formül türetebiliriz:

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} 2^k \tag{1.5}$$

olur. (1.5) ile verilen formül, $T_n(x)$'deki katsayıların mutlak değerlerinin toplamının Q_n olduğunu gösterir. Örneğin, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ dir. Katsayıların mutlak değerlerinin toplamı $8+8+1 = 17 = Q_4$ tür.

$T_n(x)$'in iki ilginç özelliğini (1.4) formülden çıkarabiliriz. Bunlar

1) $(x^2-1)^{\mathrm{k}}$ çarpanında *x* in en büyük kuvveti x^{2k} dır. Bu durumda *x*'in en büyük kuvveti $(x^2-1)^k x^{n-2k}$ olup $x^{2k+n-2k} = x^n$ dir. Sonuç olarak, $T_n(x)$, n dereceli bir polinomdur (Koshy, 2019).

2) $T_n(x)$'deki x^n katsayısı

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k}$$

ile verilir (Koshy, 2019). Üstelik

$$\sum_{r\ çift} \binom{n}{r} = \sum_{r\ tek} \binom{n}{r} = 2^{n-1}$$

dir. Bu durumda x^n nin katsayısı 2^{n-1} dir; yani, $T_n(x)$'deki baş katsayı 2^{n-1} olur.

Örneğin, $T_5(x)$'in baş katsayısı $16 = 2^4$ ve $T_6(x)$'in $32 = 2^5$ e eşittir.

Şimdi $T_n(x)$ ile $u^2 - (x^2 - 1)\ v^2 = 1$ Pell denklemi arasında yakın bir ilişki olduğunu gösterelim.

4.1.3. $T_n(x)$ ve Pell Denklemi

Açık olarak görülür ki, $(u_1, v_1) = (x, 1)$; $u^2 - (x^2 - 1)v^2 = 1$ Pell denkleminin genel çözümüdür. Burada $x^2 - 1 > 0$ ve karesel değildir. $n \geq 2$ için (u_n, v_n) çözümleri:

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x^2 - 1 \\ 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= 2x \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{bmatrix}$$

olur (Dikkat edecek olursak $(u_0, v_0) = (1,0)$ da bir çözümdür.). Böylece (1.3) den $u_n = T_n(x)$ dir.

4.1.4. $T_n(x)$ ve Trigonometri

$0 \leq \theta \leq \pi$ için u, v, θ herhangi üç açı olsun. $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ Euler formülünü kullanarak

$$e^{i(u+v)} = e^{iu}.e^{iv}$$

$$\cos(u+v) + i\sin(u+v) = (\cos u + i \sin u)(\cos v + i \sin v)$$

$$= (\cos u \cos v - \sin u \sin v) + i(\sin u \cos v + \cos u \sin v)$$

Reel ve sanal kısımlarını eşitleyerek kosinüs ve sinüs fonksiyonları için toplama formüllerini elde edelim:

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \tag{1.6}$$

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v \tag{1.7}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ olduğundan (1.6) dan

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos(\theta+\theta)\\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ &= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta)\\ &= 2\cos^2\theta - 1\end{aligned}$$

formülü elde edilir. Benzer şekilde (1.7) den $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ olarak bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ dir. Tablo 4.1 ile farklı n değerleri için $\cos n\theta$ fonksiyonu verilmiştir. $\cos n\theta$ Tablo 4.1 de görüldüğü gibi kosinüs cinsinden bir polinomdur. Buradaki katsayılar $T_n(x)$ ile aynı katsayılar ve $0 \le n \le 7$ için $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ dir.

Tablo 4.1. Farklı n Değerleri İçin $\cos n\theta$ Fonksiyonu

$\cos 0\theta = 1$

$\cos 1\theta = \cos\theta$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + \cos\theta$

$$\cos 6\theta = 32\cos^6\theta - 48\cos^4\theta + 18\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 7\theta = 64\cos^7\theta - 112\cos^5\theta + 56\cos^3\theta - 7\cos\theta$$

Her $n \geq 0$ için $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$'dır. Bu eşitlik tümevarım yöntemi ve De Moivre teoremi kullanılarak ispatlanabilir.

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1\\ &= 2\cos\theta\,(\cos 1\theta) - \cos 0\theta\\ &= 2\cos\theta\, T_1(\cos\theta) - T_0(\cos\theta)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\\ &= 2\cos\theta\,(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta\\ &= 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta\\ &= 2\cos\theta\, T_2(\cos\theta) - T_1(\cos\theta)\end{aligned}$$

bulunur.

$T_0(cos\,\theta) = 1 = cos\,0\theta$ ve $T_1(\cos\theta) = \cos\theta$ olduğundan $n = 0$ ve $n = 1$ için ifade doğrudur. n'den küçük bütün tamsayılar için doğru olduğunu kabul edelim. $a = e^{i\theta}$ ve $b = e^{-i\theta}$ olsun. Bu durumda $a + b = 2\cos\theta$ ve $ab = 1$ dir. Buradan $a^k = e^{ik\theta}$ ve $b^k = e^{-ik\theta}$ olur. Böylece $a^k + b^k = 2\cos k\theta$ dır.

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2})$$

biçiminde yazılabileceğinden a ve b yerine yazılırsa

$$2\cos n\theta = 2\cos\theta.\,2\cos(n-1)\,\theta - 1.2\cos(n-2)\theta$$

olup

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= 2\cos\theta\,[\cos(n-1)\theta] - \cos(n-2)\theta\\ &= 2\cos\theta.\,T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta)\\ &= T_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, tümevarım yöntemi ile $n \geq 0$ için $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ dır. Yani, $\cos n\theta$ $\cos\theta$'nın Chebyshev polinom fonksiyonudur.

$0 \leq \theta \leq \pi$ olduğundan, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$; yani $-1 \leq x \leq 1$ dir. Böylece $0 \leq arc\cos x \leq \pi$ için $T_n(x) = \cos n\theta = \cos(narc\cos x)$ dir.

(1.1) Chebyshev yinelemesi toplam formülü kullanılarak elde edilebilir:

$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$

olduğu biliniyor.

$u = n\theta$ ve $v = (n-2)\theta$ olsun. Buradan

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\,\theta = 2\cos(n-1)\theta\cos\theta$$

$$T_n(x) + T_{n-2}(x) = 2xT_{n-1}(x)$$

bulunur.

$x = \cos\theta$ olsun. O zaman Chebyshev polinomu $T_n(x)$'in bir özelliğini elde etmek için $\cos n\theta = T_n(x)$ nın kullanılabileceği aşağıdaki örnekte gösterilmiştir:

Örnek 4.1.4.1.

m ve n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$ olduğunu gösterelim.

Örneğin,

$m = 3$ ve $n = 2$ olsun. $T_2(x) = 2x^2 - 1$ ve $T_3(x) = 4x^3 - 3x$ olduğu biliniyor. Buna göre

$$\begin{aligned} T_3(T_2(x)) &= 4(2x^2-1)^3 - 3(2x^2-1) \\ &= 4(8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1) - 6x^2 + 3 \\ &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ &= T_6(x) \end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde,

$$T_2(T_3(x)) = 2(4x^3 - 3x)^2 - 1$$

$$= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$= T_6(x)$$

bulunur.

4.1.5. $T_n(x)$ için Bir Toplam Formülü

Binom teoremi ve De Moivre teoremi kullanılarak $T_n(x)$ için bir toplam formülü elde edilebilir.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{r=0}^{n} i^r \binom{n}{r} \cos^{n-r}\theta \sin^r\theta$$

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \cos^n\theta + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \cdots$$

Her iki tarafın reel kısımları eşitlenerek,

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \cdots +$$

$$(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\cos^{n-2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\theta\sin^{2\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}cos^{n-2k}\theta(1-\cos^2\theta)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\theta\left[\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\cos^{2j}\theta\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}(-1)^k\sum_{j=k}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n}{2j}\binom{j}{k}\cos^{n-2k}\theta$$

olup buradan

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^k \sum_{j=k}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} x^{n-2k} \tag{1.8}$$

bulunur. Örneğin;

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \sum_{j=k}^{1} \binom{3}{2j} \binom{j}{k} x^{3-2k}$$

$$= \sum_{j=0}^{1} \binom{3}{2j} \binom{j}{0} x^3 - \sum_{j=1}^{1} \binom{3}{2j} \binom{j}{1} x$$

$$= (1+3)x^3 - 3x$$

$$= 4x^3 - 3x$$

bulunur.

(1.8) ile verilen formül ayrıca $T_n(x)$'in n dereceli bir polinom olduğunu gösterir. Baş katsayısı da

$$\sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2j} \binom{j}{0} = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2j} = 2^{n-1}$$

dir.

(1.8) den aşağıdaki ilginç sonuç elde edilir:

$$Q_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \sum_{j=k}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2j} \binom{j}{k} \tag{1.9}$$

dir. Sonuç olarak, Pascal üçgeninin n. satırındaki çift numaralı binom katsayılarını kullanarak Q_n'yi hesaplayabiliriz.

Örneğin,

$$Q_5 = \sum_{k=0}^{2} \sum_{j=k}^{2} \binom{5}{2j} \binom{j}{k}$$

$$= \sum_{j=0}^{2} \binom{5}{2j}\binom{j}{0} + \sum_{j=1}^{2} \binom{5}{2j}\binom{j}{1} + \sum_{j=2}^{2} \binom{5}{2j}\binom{j}{2}$$

$$= \left[\binom{5}{0}\binom{0}{0} + \binom{5}{2}\binom{1}{0} + \binom{5}{4}\binom{2}{0}\right] + \left[\binom{5}{2}\binom{1}{1} + \binom{5}{4}\binom{2}{1}\right] + \binom{5}{4}\binom{2}{2}$$

$$= (1 + 10 + 5) + (10 + 10) + 5$$

$$= 41$$

bulunur. Benzer şekilde

$$Q_4 = \sum_{k=0}^{2} \sum_{j=k}^{2} \binom{4}{2j}\binom{j}{k} = 8 + 8 + 1 = 17$$

bulunur.

Son olarak birinci çeşit Chebyshev polinomunun katsayı özellikleri verilsin:

1) Katsayılar tamsayıdır.

2) $n = 2k$ için sabit terim $(-1)^k$ ve $n = 2k + 1$ için sabit terim 0'dır.

3) Baş katsayısı 2^{n-1} dir.

4) $T_{2n+1}(x)$ nin lineer terimi $(-1)^n(2n + 1)$ dir.

5) Sıfırdan farklı terimler n ile aynı (teklik-çiftlik) özelliğe sahiptir.

6) Polinomun katsayılarının toplamı 1'dir.

7) Sıfır olmayan katsayılar $+1$ ve -1 ile devam eder.

8) $T_{2k}(x)$ deki x^2 teriminin katsayısı $(-1)^{k+1}2k^2$ dır.

9) Katsayıların mutlak değerlerinin toplamı $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})^n$ dir.

10) $k \in \mathbb{Z}$ için T_n nin kökleri $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$ dir (https://brillant.org/wiki/).

4.2. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomları

$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, n \geq 2$ için

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \tag{1.10}$$

yineleme (tekrar) bağıntısı ile tanımlanan polinomlara İkinci çeşit Chebyshev polinomları denir ve $U_n(x)$ ile gösterilir.

İkinci çeşit Chebyshev polinomunun ilk 11 terimi aşağıda verilmiştir:

$U_0(x) = 1$

$U_1(x) = 2x$

$U_2(x) = 4x^2 - 1$

$U_3(x) = 8x^3 - 4x$

$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$

$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$

$U_9(x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$

$U_{10}(x) = 1024x^{10} - 2304x^8 + 1792x^6 - 560x^4 + 60x^2 - 1.$

Tıpkı birinci çeşit Chebyshev polinomu $T_n(x)$ ve Pell-Lucas polinomu $q_n(x)$ in yakından ilişkili olduğu gibi, ikinci çeşit Chebyshev polinomu $U_n(x)$ ve Pell polinomu $p_n(x)$ yakından ilişkilidir. Bu ilişki aşağıda da görülebilir:

$$p_1(x) = 1 = (-i)^0.1 = (-i)^0 U_0(ix)$$

$$p_2(x) = 2x = (-i)(2ix) = (-i)^1 U_1(ix)$$

$$p_3(x) = 4x^2 + 1 = (-i)^2[4(ix)^2 - 1] = (-i)^2 U_2(ix).$$

Daha genel olarak, $n \geq 1$ için $p_n(x) = (-i)^{n-1} U_{n-1}(ix)$ olduğunu iddia ediliyor. $n \geq 2$ keyfi bir tamsayı olmak üzere n ve n'den küçük tamsayılar için eşitlik doğru olsun. Bu durumda (1.10) dan

$$U_n(ix) = 2ixU_{n-1}(ix) - U_{n-2}(ix)$$

$$= 2ix\left[\frac{p_n(x)}{(-i)^{n-1}}\right] - \left[\frac{p_{n-1}(x)}{(-i)^{n-2}}\right]$$

$$= \frac{2xp_n(x)}{(-i)^n} + \frac{p_{n-1}(x)}{(-i)^n}$$

$$(-i)^n U_n(ix) = 2xp_n(x) + p_{n-1}(x)$$

$$= p_{n+1}(x).$$

olup böylece, tümevarım yönteminden $n \geq 1$ için $p_n(x) = (-i)^{n-1}U_{n-1}(ix)$ dir.

Örneğin,

$$(-i)^5 U_5(ix) = -i[32(ix)^5 - 32(ix)^3 + 6(ix)]$$

$$= 32x^5 + 32x^3 + 6x$$

$$= p_6(x)$$

bulunur.

$P_n = p_n(1)$ olduğundan $p_n(x) = (-i)^{n-1}U_{n-1}(ix)$ formülünden $P_n = (-i)^{n-1}U_{n-1}(i)$ yani $P_n = |U_{n-1}(i)| = U_{n-1}(x)$ deki katsayıların mutlak değerlerinin toplamıdır.

Örneğin,

$$P_5 = (-i)^4 U_4(i)$$

$$= 16i^4 - 12i^2 + 1$$

$$= 16 + 12 + 1$$

$$= 29$$

bulunur.

Benzer şekilde, $P_7 = (-i)^6 U_6(i) = 169$ olur.

Şimdi (1.10) dan $U_n(x)$ için açık bir formül verilebilir:

4.2.1. $U_n(x)$ için Açık Bir Formül

$T_n(x)$ ve $U_n(x)$ benzer yineleme bağıntısını sağlayıp önceki bölümlerdeki yol izlenerek

$$U_n(x) = A\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + B\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n$$

olup burada $A = A(x)$ ve $B = B(x)$ belirlenecektir. $U_0(x) = 1$ ve $U_1(x) = 2x$ başlangıç koşullarının kullanılarak $n \geq 0$ için,

$$U_n(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}} \tag{1.11}$$

elde edilir.

Örneğin,

$$U_3(x) = \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^4 - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^4}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{(2x)2\sqrt{x^2-1}\left(\left[x^2+(x^2-1)+2x\sqrt{x^2-1}\right]+\left[x^2+(x^2-1)-2x\sqrt{x^2-1}\right]\right)}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 2x(4x^2-2)$$

$$= 8x^3 - 4x$$

olur. burada $a^4 - b^4 = (a+b)(a-b)(a^2+b^2)$ formülünden yararlanılmıştır. İlginç bir şekilde, (1.11), $P_n = |U_{n-1}(i)|$ yi gösterebilmek için de kullanılabilir.

$$2\sqrt{2}U_{n-1}(i) = \left(i+\sqrt{i^2-1}\right)^n - \left(i-\sqrt{i^2-1}\right)^n$$

$$= \left(i+i\sqrt{2}\right)^n - \left(i-i\sqrt{2}\right)^n$$

$$= i^n(\gamma^n - \delta^n)$$

$$|U_{n-1}(i)| = \frac{\gamma^n - \delta^n}{2\sqrt{2}}$$

$$= P_n$$

olur.

4.2.2. $U_n(x)$ için Başka Bir Açık Formül

Formül (1.10), binom teoremi ile birleştiğinde, $U_n(x)$ için ikinci bir açık ifade geliştirilebilir. Kolaylık olması açısından $r = \sqrt{x^2 - 1}$ olduğunu kabul edelim.

$$2rU_n(x) = (x + r)^{n+1} - (x - r)^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} [1 - (-1)^k] x^{n-k+1} r^k$$

$$= 2 \sum_{k\ tek} \binom{n+1}{k} x^{n-k+1} r^k$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k} r^{2k+1}$$

olur. Buradan da

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n+1}{2k+1} (x^2 - 1)^k x^{n-2k} \tag{1.12}$$

bulunur.

Örneğin,

$$U_3(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{4}{2k+1} (x^2 - 1)^k x^{3-2k}$$

$$= \binom{4}{1} x^3 + \binom{4}{3} (x^2 - 1)x$$

$$= 8x^3 - 4x$$

elde edilir.

(1.12) formülünden

$$P_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{(n-1)}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^k \tag{1.13}$$

sonucu elde edilir.

(1.12) formülü dikkate alınırsa, bunun $U_n(x)$'nin n dereceli bir polinom olduğu ve baş katsayısı

$$\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n+1}{2k+1} = \sum_{r\ tek} \binom{n+1}{r} = 2^n$$

olur. Örneğin, $U_7(x)$, baş katsayısı 128$= 2^7$ olan 7. dereceden bir polinomdur. $x = 1$ olduğunda,

$$U_n(1) = \binom{n+1}{1} + \sum_{k\geq 2} \binom{n+1}{2k-1}.0 = (n+1)$$

dir.

Örneğin,

$$U_4(1) = 16 - 12 + 1 = 5$$

bulunur.

Öte yandan, $x = -1$ olsun. Buradan da

$$U_n(-1) = \binom{n+1}{1}(-1)^n + \sum_{k\geq 2} \binom{n+1}{2k-1}.0 = (n+1)(-1)^n$$

bulunur. Örneğin,

$$U_4(-1) = 16(-1)^4 - 12(-1)^2 + 1$$

$$= 5$$

$$= (4+1)(-1)^4;$$

benzer şekilde,

$$U_5(-1) = 32(-1)^5 - 32(-1)^3 + 6(-1)$$

$$= -6$$

$$= (5+1)(-1)^5$$

bulunur.

Farz edelim ki (1.12) formülünde $n = 2m$ olsun. Buradan

$$U_{2m}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (x^2-1)^k x^{2m-2k}$$

olur. $k = m$ olduğunda yani $U_{2m}(x)$ nin sabit terimi $\binom{2m+1}{2m+1}(-1)^m = (-1)^m$ elde edilir. Böylece, n çift olduğunda $U_n(x)$ deki sabit terim $(-1)^{\frac{n}{2}}$ dir. Örneğin $U_6(x)$ deki sabit terim $-1 = (-1)^3$ ve $U_8(x)$ deki sabit terim $1 = (-1)^4$ dir. Öte yandan (1.12) formülünden $n = 2m+1$ olduğunu kabul edelim. Buradan

$$U_{2m+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+2}{2k+1} (x^2-1)^k x^{2m-2k+1}$$

dir. $k = m$ olduğunda $U_{2m+1}(x)$, nin sabit terimi $\binom{2m+2}{2m+1}(-1)^m = (2m+2)(-1)^m$ elde edilir. Böylece, n tek olduğunda $U_n(x)$'deki x'in katsayısı $(n+1)(-1)^{\frac{(n-1)}{2}}$ dir. Örneğin $U_5(x)$, de x'in katsayısı $6 = (5+1)(-1)^{\frac{(5-1)}{2}}$ ve $U_7(x)$ de $-8 = (7+1)(-1)^{\frac{(7-1)}{2}}$ dir.

Örnek 4.2.2.1.

$n \geq 2$ için

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x)$$

olduğunu gösterelim.

Örneğin,

$$U_7(x) - U_5(x) = (128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x) - (32x^5 - 32x^3 + 6x)$$

$$= 2(64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x)$$

$$= 2T_7(x)$$

dir. Bir sonraki örnek için, $U_{-1}(x)$ değerini bulalım.

$$U_1(x) = 2xU_0(x) - U_{-1}(x);$$

$$2x = 2x.1 - U_{-1}(x)$$

buradan da $U_{-1}(x) = 0$ bulunur.

Örnek 4.2.2.2.

$n \geq 0$ için

$$U_n(x) - xU_{n-1}(x) = T_n(x)$$

olduğunu gösterelim.

Örneğin;

$$\begin{aligned} U_7(x) - xU_6(x) &= (128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x) - x(64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1) \\ &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \\ &= T_7(x) \end{aligned}$$

bulunur.

$x^2 - 1 > 0$ olmak üzere $(T_n(x), U_{n-1}(x))$ nin $u^2 - (x^2 - 1)v^2 = 1$ Pell denkleminin bir çözümü olduğunu gösterelim.

Örnek 4.2.2.3.

$n \geq 1$ için

$$T_n^2(x) - (x^2 - 1)U_{n-1}^2(x) = 1$$

olduğunu gösterelim.

İspat için $T_n(x)$ ve $U_{n-1}(x)$ için açık formüllerini kullanılsın. Kolaylık için, $\sqrt{x^2 - 1} = r$ olsun; yani $x^2 - r^2 = 1$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 4T_n^2(x) &= [(x + r)^n + (x - r)^n]^2 \\ &= (x + r)^{2n} + (x - r)^{2n} + 2 \end{aligned}$$

$$4(x^2-1){U_{n-1}}^2(x) = [(x+r)^n + (x-r)^n]^2$$

$$= (x+r)^{2n} + (x-r)^{2n} - 2$$

$$4[T_n^2(x) - (x^2-1)U_{n-1}^2(x)] = 4$$

$$T_n^2(x) - (x^2-1)U_{n-1}(x) = 1$$

bulunur.

Sonuç olarak, $(T_n(x), U_{n-1}(x))$, $u^2 - (x^2-1)v^2 = 1$ Pell denkleminin bir çözümüdür.

Örneğin, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ve $U_3(x) = 8x^3 - 4x$ polinomlarını göz önüne alalım. Buradan

$$T_4^2(x) - (x^2-1)U_3^2(x) = (8x^4 - 8x^2 + 1)^2 - (x^2-1)(8x^3 - 4x)^2$$

$$= (64x^8 - 128x^6 + 80x^4 - 16x^2 + 1) - (64x^8 - 128x^6 + 80x^4 - 16x^2)$$

$$= 1$$

elde edilir.

Tersine $u^2 - (x^2-1)v^2 = 1$ denkleminin her çözümü $(T_n(x), U_{n-1}(x))$ biçiminde midir? Bunun için her (u_n, v_n) çözümünün $n \geq 2$ için aşağıdaki şekilde verildiğini hatırlatalım:

$$\begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = 2x \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{bmatrix}$$

dir. Açıktır ki, $u_n = T_n(x)$ dir. Ancak $v_n = U_n(x)$ değil $n \geq 1$ olmak üzere $v_n = U_{n-1}(x)$ dir. Böylece $u^2 - (x^2-1)v^2 = 1$ Pell denkleminin her çözümü $(T_n(x), U_{n-1}(x))$ formundadır.

Şimdi $U_n(x)$ polinomları ile trigonometri arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

4.2.3. $U_n(x)$ ve Trigonometri

$T_n(x)$ Chebyshev polinomu ile trigonometri arasındaki ilişkiyi kosinüs fonksiyonu için formülleri kullanarak incelemiştik. Benzer bir ilişkiyi $U_n(x)$ polinomu ile trigonometri arasında görmek için bazı sinüs fonksiyonu değerlerini inceleyelim:

$$\sin 1\theta = 1.\sin\theta$$

$$\sin 2\theta = (2\cos\theta)\sin\theta$$

$$\sin 3\theta = (4\cos^2\theta - 1)\sin\theta$$

$$\sin 4\theta = (8\cos^3\theta - 4\cos\theta)\sin\theta$$

$$\sin 5\theta = (16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1)\sin\theta$$

$$\sin 6\theta = (32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta)\sin\theta$$

$x = \cos\theta$ olduğunda bu formüller aşağıdaki denklemleri verir.

$$\frac{\sin 1\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2x$$

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = 4x^2 - 1$$

$$\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 8x^3 - 4x$$

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta} = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$x = \cos\theta$ ve $0 \leq n \leq 5$ için

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \tag{1.14}$$

olduğu tahmin edilebilir. Ancak ispat için sinüs fonksiyonu için toplam formülünü ve Örnek 4.2.2.2.'ü kullanarak,

$$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta$$

$$= xU_{n-1}(x)\sin\theta + T_n(x)\sin\theta$$

olur. Buradan

$$\frac{sin(n+1)\theta}{sin\,\theta} = xU_{n-1}(x) + T_n(x)$$

$$= U_n(x)$$

elde edilir.

Bu sonuç $n = 0$ ve $n = 1$ için sağlandığından tümevarım yöntemiyle tüm $n \geq 0$ tam sayıları için geçerlidir.

4.2.4. $U_n(x)$ için Chebyshev Yinelemeleri

Şimdi $sin\,u + sin\,v = 2\,sin\frac{u+v}{2}cos\frac{u-v}{2}$ toplam formülünü kullanarak $U_n(x)$ için bir yineleme elde edilsin. Bunun için $u = (n+1)\theta$ ve $v = (n-1)\theta$ olsun. Buradan

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\sin n\theta\cos\theta$$

olur. Her iki tarafı da sinüse bölerek,

$$U_n(x) + U_{n-2}(x) = 2xU_{n-1}(x)$$

istenen yinelemeyi elde edilir.

Trigonometrik ilişki kullanılarak, aşağıdaki örnek ile de gösterilen bir dizi formül geliştirilebilir.

Örnek 4.2.4.1.

$m \geq n$ için

$$T_{m+n}(x) - T_{m-n}(x) = 2(x^2-1)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x)$$

dir.

Şimdi bir özel durumdan bahsedelim. $q_n(x) = 2(-i)^n T_n(ix)$ olduğundan, bir ilginç Pell-Lucas polinom özdeşliği:

$$\frac{q_{m+n}(x)}{2(-i)^{m+n}} - \frac{q_{m-n}(x)}{2(-i)^{m-n}} = 2[(ix)^2 - 1]\frac{p_m(x)}{(-i)^{m-1}}\cdot\frac{p_n(x)}{(-i)^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2(-i)^{m+n}}[q_{m+n}(x) - (-1)^n q_{m-n}(x)] = \frac{-2(x^2+1)p_m(x)p_n(x)}{(-i)^{m+n-2}}$$

$$q_{m+n}(x) - (-1)^n q_{m-n}(x) = 4(x^2+1)p_m(x)p_n(x)$$

bulunur.

Örneğin, LHS (eşitliğin sol tarafı), RHS (eşitliğin sağ tarafı) ve $m = 5$ ve $n = 3$ olsun.

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= q_8(x) + q_2(x) \\
&= (256x^8 + 512x^6 + 320x^4 + 64x^2 + 2) + (4x^2 + 2) \\
&= 256x^8 + 512x^6 + 320x^4 + 68x^2 + 4 \\
&= 4(x^2+1)(16x^4 + 12x^2 + 1)(4x^2 + 1) \\
&= 4(x^2+1)p_5(x)p_3(x) \\
&= \text{RHS}
\end{aligned}$$

bulunur. (1.13) formülü iki ilginç sonuca sahiptir:

1) Diyelim ki $x = 1$ olsun. $q_k(1) = 2Q_k$ ve $p_k(1) = P_k$, olduğundan Pell özdeşliği

$$Q_{m+n} - (-1)^n Q_{m-n} = 4P_m P_n \qquad (1.15)$$

olur. Örneğin, $m = 8$ ve $n = 5$ olsun,

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= Q_{13} + Q_3 \\
&= 47321 + 7 \\
&= 47328 \\
&= 4.408.29 \\
&= 4P_8P_5 \\
&= \text{RHS;}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde $m = 10$ ve $n = 4$ olsun,

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= Q_{14} - Q_6 \\
&= 114114 \\
&= 4P_{10}P_5 \\
&= \text{RHS.}
\end{aligned}$$

(1.15) özdeşliğinin, $Q_{m+1} + Q_{m-1} = 4P_m$, formülünü verdiği görülür.

2) (1.14) özdeşliğinde $x = \frac{1}{2}$ olsun. $q_k(\frac{1}{2}) = L_k$ ve $p_k(\frac{1}{2}) = F_k$ olduğundan, Fibonacci-Lucas özdeşliği

$$L_{m+n} - (-1)^n L_{m-n} = 5F_m F_n \tag{1.16}$$

bulunur. Örneğin, $m = 8$ ve $n = 5$ olsun. LHS= $L_{13} + L_3 = 521 + 4 = 525 = 5.21.5 = 5F_8F_5$ =RHS ve benzer şekilde, $m = 10$ ve $n = 4$ olsun. LHS= $L_{14} - L_6 = 825 = 5F_{10}F_4$ =RHS bulunur.

Örnek 4.2.4.2.

$m \geq n$ için

$$U_{m+n}(x) + U_{m-n}(x) = 2U_m(x)T_n(x)$$

dir. Benzer şekilde,

$$U_{m+n}(x) - U_{m-n}(x) = 2T_{m+1}(x)U_{n-1}(x) \tag{1.17}$$

olduğu da gösterilebilir.

Örneğin,

$m = 6$ ve $n = 3$ olsun. Buradan

$$U_9(x) - U_3(x) = (512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x) - (8x^3 - 4x)$$

$$= 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 168x^3 + 14x$$

$$= 2(64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x)(4x^2 - 1)$$

$$= 2T_7(x)U_2(x)$$

bulunur.

$p_k(x) = (-i)^{k-1}U_{k-1}(ix)$ ve $q_k(x) = (-i)^k T_k(ix)$ olduğundan, (1.17) Pell polinomları için bir formül üretmek için kullanılabilir:

$$\frac{p_{m+n+1}(x)}{(-i)^{m+n}} - \frac{p_{m-n+1}(x)}{(-i)^{m-n}} = 2\frac{q_{m+1}(x)p_n(x)}{2(-i)^{m+1}(-i)^{n-1}}$$

$$\frac{1}{(-i)^{m+n}}[p_{m+n+1}(x) - (-1)^n p_{m-n+1}(x)] = \frac{q_{m+1}(x)p_n(x)}{(-i)^{m+n}}$$

$$p_{m+n+1}(x) - (-1)^n p_{m-n+1}(x) = q_{m+1}(x)p_n(x)$$

olur. m yerine $m-1$ yazıldığında

$$p_{m+n}(x) - (-1)^n p_{m-n}(x) = q_m(x)p_n(x) \tag{1.18}$$

bulunur. Örneğin,

$m = 5$ ve $n = 3$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned} p_8(x) + p_2(x) &= (128x^7 + 192x^5 + 80x^3 + 8x) + 2x \\ &= 128x^7 + 192x^5 + 80x^3 + 10x \\ &= (32x^5 + 40x^3 + 10x)(4x^2 + 1) \\ &= q_5(x)p_3(x) \end{aligned}$$

bulunur. Formül (1.18) iki ilginç özel sonuca sahiptir:

1) Diyelim ki $x = 1$ olsun. $p_k(1) = P_k$ ve $q_k(1) = 2Q_k$ olduğundan Pell özdeşliğinden

$$P_{m+n} - (-1)^n P_{m-n} = 2Q_m P_n \tag{1.19}$$

olur. Örneğin, $m = 8$ ve $n = 5$ olsun. LHS= $P_{13} + P_3 = 33{,}466 = 2Q_8P_5$ =RHS; ve $m = 10$ ve $n = 4$ olsun. LHS= $P_{14} - P_6 = 80{,}712 = 2Q_{10}P_4$ =RHS.

2) $x = \frac{1}{2}$ olsun. $p_k(\frac{1}{2}) = F_k$ ve $q_k(\frac{1}{2}) = L_k$ olduğundan, Fibonacci -Lucas özdeşliği

$$F_{m+n} - (-1)^n F_{m-n} = L_m F_n \tag{1.20}$$

olur. Örneğin, $m = 7$ ve $n = 4$ olduğunda, LHS= $F_{11} + F_3 = 87 = L_7F_4$ =RHS; ve $m = 12$ ve $n = 7$ olduğunda, LHS= $F_{19} + F_5 = 4186 = L_{12}F_7$ =RHS dir.

Aşağıdaki örnek, $U_n(x)$ için Örnek 4.1.4.1.'in karşılığıdır.

Örnek 4.2.4.3.

$m, n \geq 1$ için

$$U_{m-1}\big(T_n(x)\big)U_{n-1}(x) = U_{mn-1}(x)$$

dir.

Örneğin,

$m = 5$ ve $n = 2$ olsun. Buradan

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$U_4(T_2(x)) = 16(2x^2 - 1)^4 - 12(2x^2 - 1)^2 + 1$$

$$= 256x^8 - 512x^6 + 336x^4 - 80x^2 + 5$$

$$U_4\big(T_2(x)\big)U_1(x) = (256x^8 - 512x^6 + 336x^4 - 80x^2 + 5)(2x)$$

$$= 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x$$

$$= U_{5.2-1}(x)$$

bulunur. $\hat{U}_k(x) = U_k(x)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda Örnek 4.2.4.1.'deki formül şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\hat{U}_m(T_n(x))\hat{U}_n(x) = \hat{U}_{mn}(x)$$

Bundan sonra her iki Chebyshev polinomu için toplama formüllerini oluşturalım. Bunun için yine sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kullanılacaktır.

Örnek 4.2.4.4.

$m, n \geq 1$ için

$$T_{m+n}(x) = T_m(x)U_n(x) - T_{m-1}(x)U_{n-1}(x)$$

olduğunu gösterelim.

İspat için, toplama formülleri (1.6) ve (1.7) kullanılarak,

$\sin\theta$.RHS$= \cos m\theta \sin(n+1)\theta - \cos(m-1)\theta \sin n\theta$

$$= \cos m\theta\,(\sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta) - \sin n\theta(\cos m\theta \cos\theta + \sin m\theta \sin\theta)$$

$$= (\cos m\theta \cos n\theta - \sin m\theta \sin n\theta)\sin\theta$$

Buradan,

$$\text{RHS} = \cos(m+n)\theta$$

$$= T_{m+n}(x)$$

$$=\text{LHS}$$

dır. Örneğin,

$m = 3$ ve $n = 5$ olsun. Bu durumda

$$T_3(x)U_5(x) - T_2(x)U_4(x) = (4x^3 - 3x)(32x^5 - 32x^3 + 6x) - (2x^2 - 1)(16x^4 - 12x^2 + 1)$$

$$= 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$= T_{3+5}(x)$$

dir. $q_k(x) = 2(-i)^k T_k(ix)$ ve $p_k(x) = (-i)^{k-1}U_{k-1}(ix)$ olduğundan, Örnek 4.2.4.2.'den

$$\frac{q_{m+n}(x)}{2(-i)^{m+n}} = \frac{q_m(x)}{2(-i)^m}.\frac{p_{n+1}(x)}{(-i)^n} - \frac{q_{m-1}(x)}{2(-i)^{m-1}}.\frac{p_n(x)}{(-i)^{n-1}} \qquad (1.21)$$

$$q_{m+n}(x) = q_m(x)p_{n+1}(x) + q_{m-1}(x)p_n(x)$$

elde edilir.

Örneğin,

$m = 3$ ve $n = 5$ olsun. Bu durumda

$$q_3(x)p_6(x) + q_2(x)p_5(x) = (8x^3 + 6x)(32x^5 + 32x^3 + 6x) + (4x^2 + 2)(16x^4 + 12x^2 + 1)$$

$$= 256x^8 + 512x^6 + 320x^4 + 64x^2 + 1$$

$$= q_8(x)$$

Özel olarak, (1.21) $Q_{m+n} = Q_m P_{n+1} + Q_{m-1}P_n$ toplama formülünü verir.

Aşağıdaki örnek, $U_k(x)$ için toplama formülünü verir.

Örnek 4.2.4.5.

$n \geq 1$ için

$$U_{m+n}(x) = U_m(x)U_n(x) - U_{m-1}(x)U_{n-1}(x)$$

olduğunu gösterelim.

İspat için, $2\sin u \sin v = cos(u-v) - cos(u+v)$ çarpım formülü kullanılarak,

$\sin^2\theta.RHS = \sin(m+1)\theta \sin(n+1)\theta - \sin m\theta \sin n\theta$

$$= \frac{1}{2}[cos(m-n)\theta - cos(m+n+2)\theta] - \frac{1}{2}[cos(m-n)\theta - cos(m+n)\theta]$$

$$= \frac{1}{2}[cos(m+n)\theta - cos(m+n+2)\theta]$$

$$= \sin(m+n+1)\theta \sin\theta$$

$$RHS = \frac{\sin(m+n+1)\theta}{\sin\theta}$$

$$= U_{m+n}(x)$$

$$= \text{LHS}$$

olur. Örneğin,

$m = 3$ ve $n = 5$ olsun. Buradan

$$U_3(x)U_5(x) - U_2(x)U_4(x) = (8x^3 - 4x)(32x^5 - 32x^3 + 6x) - (4x^2 - 1)(16x^4 - 12x^2 + 1)$$

$$= 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$$

$$= U_{3+5}(x)$$

dir.

$p_k(x) = (-i)^{k-1}U_{k-1}(ix)$ olduğundan, bu örnekten anlaşılacağı üzere,

$$\frac{p_{m+n+1}(x)}{(-i)^{m+n}} = \frac{p_{m+1}(x)}{(-i)^m} \cdot \frac{p_{n+1}(x)}{(-i)^n} - \frac{p_m(x)}{(-i)^{m-1}} \cdot \frac{p_n(x)}{(-i)^{n-1}}$$

$$p_{m+n+1}(x) = p_{m+1}(x)p_{n+1}(x) + p_m(x)p_n(x)$$

yani,

$$p_{m+n}(x) = p_m(x)p_{n+1}(x) + p_{m-1}(x)p_n(x) \tag{1.22}$$

bulunur.

4.2.5. Chebyshev Polinomları için Cassini-benzeri Formüller

$$T_{n+1}(x)T_{n-1}(x) - {T_n}^2(x) = x^2 - 1 \tag{1.23}$$

$$U_{n+1}(x)U_{n-1}(x) - {U_n}^2(x) = -1 \tag{1.24}$$

dir.

Örneğin,

$$\begin{aligned} T_5(x)T_3(x) - T_4^2(x) &= (16x^5 - 20x^3 + 5x)(4x^3 - 3x) - (8x^4 - 8x^2 + 1)^2 \\ &= (64x^8 - 128x^6 + 80x^4 - 15x^2) - (64x^8 - 128x^6 + 80x^4 - \\ &\qquad 16x + 1) \\ &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_5(x)U_3(x) - {U_4}^2(x) &= (16x^4 - 12x^2 + 1)(4x^2 - 1) - (8x^3 - 4x)^2 \\ &= (64x^6 - 64x^4 + 16x^2 - 1) - (64x^6 - 64x^4 + 16x^2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

4.2.6. Chebyshev Polinomları için Üreteç Fonksiyonları

Son olarak, Chebyshev Polinomları için üreteç fonksiyonlarını verilsin:

$$\frac{1 - xy}{1 - 2xy + y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)y^n$$

$$\frac{1}{1 - 2xy + y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)y^n$$

dır (Koshy, 2019).

4.3. Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomları

$V_0(x) = 1$ ve $V_1(x) = 2x - 1$, $n \geq 2$ için

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x) \tag{1.25}$$

yineleme (tekrar) bağıntısı ve

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\theta$ olmak üzere

$$V_n(x) = \frac{cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{cos\frac{1}{2}\theta}$$

bağıntısı ile tanımlanan polinomlara üçüncü çeşit Chebyshev polinomu denir ve $V_n(x)$ ile gösterilir (Mason ve Handscomb, 2003; Koshy, 2019).

Üçüncü çeşit Chebyshev polinomunun ilk 11 terimi aşağıda verilmiştir:

$V_0(x) = 1$

$V_1(x) = 2x - 1$

$V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1$

$V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$

$V_4(x) = 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1$

$V_5(x) = 32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1$

$V_6(x) = 64x^6 - 32x^5 - 80x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 6x - 1$

$V_7(x) = 128x^7 - 64x^6 - 192x^5 + 80x^4 + 80x^3 - 24x^2 - 8x + 1$

$V_8(x) = 256x^8 - 128x^7 - 448x^6 + 192x^5 + 240x^4 - 80x^3 - 40x^2 + 8x + 1$

$V_9(x) = 512x^9 - 256x^8 - 1024x^7 + 448x^6 + 672x^5 - 240x^4 - 160x^3 + 40x^2 + 10x - 1$

$V_{10}(x) = 1024x^{10} - 512x^9 - 2304x^8 + 1024x^7 + 1792x^6 - 672x^5 - 560x^4 + 160x^3 + 60x^2 - 10x - 1.$ (1.26)

4.4. Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomları

$W_0(x) = 1$ ve $W_1(x) = 2x + 1$, $n \geq 2$ için

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x) \quad (1.27)$$

yineleme (tekrar) bağıntısı ve

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\theta$ için

$$W_n(x) = \frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}$$

bağıntısı ile tanımlanan polinomlara dördüncü çeşit Chebyshev polinomu denir ve $W_n(x)$ ile gösterilir (Mason ve Handscomb, 2003; Koshy, 2019).

Dördüncü çeşit Chebyshev polinomunun ilk 11 terimi aşağıda verilmiştir:

$W_0(x) = 1$

$W_1(x) = 2x + 1$

$W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1$

$W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

$W_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1$

$W_5(x) = 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1$

$W_6(x) = 64x^6 + 32x^5 - 80x^4 - 32x^3 + 24x^2 + 6x - 1$

$W_7(x) = 128x^7 + 64x^6 - 192x^5 - 80x^4 + 80x^3 + 24x^2 - 8x - 1$

$W_8(x) = 256x^8 + 128x^7 - 448x^6 - 192x^5 + 240x^4 + 80x^3 - 40x^2 - 8x + 1$

$W_9(x) = 512x^9 + 256x^8 - 1024x^7 - 448x^6 + 672x^5 + 240x^4 - 160x^3 - 40x^2 + 10x + 1$

$W_{10}(x) = 1024x^{10} + 512x^9 - 2304x^8 - 1024x^7 + 1792x^6 + 672x^5 - 560x^4 - 160x^3 + 10x - 1.$ (1.28)

4.5. Ötelenmiş (Shifted) Chebyshev Polinomları

4.5.1. Ötelenmiş Chebyshev Polinomları

Chebyshev polinomları, sinüs ve cosinüs fonksiyonları ile ifade edilmekte olup $[-1,1]$ aralığında tanımlıdır. Bu nedenle $[-1,1]$ aralığındaki problemlere çözüm üretmektedir. Bundan dolayı, bu kısımda ötelenmiş Chebyshev polinomları olarak tanımlana farklı aralıktaki Chebyshev polinomlarından bahsedilecektir.

$[0,1]$ aralığının kullanımı genellikle $[-1,1]$ aralığından daha uygun olduğu için, bazen $[0,1]$'deki x bağımsız değişkenini $[-1,1]$ içinde s değişkeni ile eşleriz. $s = 2x - 1$ veya $x = \frac{1}{2}(1 + s)$ bağıntısı ile birinci çeşit ötelenmiş Chebyshev polinomu $T_n^*(x)$

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x - 1) \tag{1.29}$$

ile tanımlanır. $T_n^*(x)$ nin ilk birkaç terim aşağıda verilmiştir:

$$T_0^*(x) = 1$$

$$T_1^*(x) = 2x - 1$$

$$T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1$$

$$T_3^*(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1 \tag{1.30}$$

$$\vdots$$

$T_0^*(x) = 1$ ve $T_1^*(x) = 2x - 1$ başlangıç koşulları ve $n \geq 2$ olmak üzere birinci çeşit ötelenmiş Chebyshev polinomu

$$T_n^*(x) = 2(2x - 1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x) \tag{1.31}$$

yineleme bağıntısı ile verilir. $x = \cos\theta$ olduğunda, (1.3) den

$T_{2n}(x) = \cos 2n\theta = \cos n(2\theta) = T_n(\cos 2\theta) = T_n(2x^2 - 1) = T_n^*(x^2)$ dir. Böylece

$$T_{2n}(x) = T_n^*(x^2) \tag{1.32}$$

bulunur.

T_n^*, T_n ve U_n gibi doğrudan bir trigonometrik ilişki ile tanımlamak elbette mümkündür.

$x = \cos^2\theta$ olduğunda

$$T_n^*(x) = \cos 2n\theta \tag{1.33}$$

olur. Bu ilişki alternatif olarak, θ yerine $\frac{\phi}{2}$ ile değiştirilerek yeniden yazılabilir.

$$T_n^*(x) = \cos n\phi = \cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\phi). \tag{1.34}$$

Ötelenmiş polinomlarda $U_n(x)$ de $T_n(x)$ gibi benzer yollarla tanımlanabilir:

$$U_n^*(x) = U_n(s) = U_n(2x-1) \tag{1.35}$$

$n \geq 2$ için $U_0^*(x) = 1$ ve $U_1^*(x) = 4x - 2$ başlangıç koşulları kullanarak

$$U_n^*(x) = 2(2x-1)U_{n-1}^*(x) - U_{n-2}^*(x) \tag{1.36}$$

eşitliğine ikinci çeşit ötelenmiş Chebyshev polinomunun yineleme bağıntısı denir. (1.35) daki yineleme bağıntısı yardımıyla ilk birkaç terim aşağıda verilmiştir:

$$U_0^*(x) = 1$$

$$U_1^*(x) = 4x - 2$$

$$U_2^*(x) = 16x^2 - 16x + 3$$

$$U_3^*(x) = 64x^3 - 96x^2 + 46x - 4 \tag{1.37}$$

$$\vdots$$

bulunur.

Ötelenmiş polinomlarda $V_n(x)$ de $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ gibi benzer yollarla tanımlanabilir.

$$V_n^*(x) = V_n(s) = V_n(2x-1) \tag{1.38}$$

$n \geq 2$ için $V_0^*(x) = 1$ ve $V_1^*(x) = 4x - 3$ başlangıç koşulları kullanılarak

$$V_n^*(x) = 2(2x-1)V_{n-1}^*(x) - V_{n-2}^*(x) \tag{1.39}$$

eşitliğine üçüncü çeşit ötelenmiş Chebyshev polinomunun yineleme bağıntısı denir. (1.38) daki yineleme bağıntısı yardımıyla ilk birkaç terim aşağıda verilmiştir:

$$V_0^*(x) = 1$$

$$V_1^*(x) = 4x - 3$$

$$V_2^*(x) = 16x^2 - 20x + 5$$

$$V_3^*(x) = 64x^3 - 112x^2 + 56x - 7 \tag{1.40}$$

$$\vdots$$

bulunur.

Ötelenmiş polinomlarda $W_n(x)$ de $T_n(x)$, $U_n(x)$ ve $V_n(x)$ gibi benzer yollarla tanımlanabilir.

$$W_n^*(x) = W_n(s) = W_n(2x-1) \tag{1.41}$$

$n \geq 2$ için $W_0^*(x) = 1$ ve $W_1^*(x) = 4x - 1$ başlangıç koşulları kullanılarak

$$W_n^*(x) = 2(2x-1)W_{n-1}^*(x) - W_{n-2}^*(x) \tag{1.42}$$

eşitliğine dördüncü çeşit ötelenmiş Chebyshev polinomunun yineleme bağıntısı denir. (1.41) deki yineleme bağıntısı yardımıyla ilk birkaç terim aşağıda verilmiştir:

$$W_0^*(x) = 1$$

$$W_1^*(x) = 4x - 1$$

$$W_2^*(x) = 16x^2 - 12x + 1$$

$$W_3^*(x) = 64x^3 - 80x^2 + 24x - 1 \tag{1.43}$$

$$\vdots$$

bulunur (Duran, 2016).

4.5.2. $[a, b]$ Genel Aralığı İçin Chebyshev Polinomları

Bir önceki bölümde $[0,1]$ aralığı için ötelenmiş Chebyshev polinomları tanımlanmıştı. Bu kısımda, daha genel olarak $[-1,1]$ aralığına karşılık gelen x in verilen her sonlu $[a, b]$ aralığı s değişkeni ile gösterilen $s = \frac{2x-(a+b)}{b-a}$ lineer dönüşümü altında Chebyshev polinomları tanımlanabildiği gösterilmiştir. $T_n(x)$ için tanımlanan bu lineer dönüşüm benzer şekilde $U_n(x)$, $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ için de tanımlanabilirdir. $[a, b] = [0,1]$ özel durumunda $s = 2x - 1$ olmaktadır.

Örnek 4.5.2.1.

Üçüncü dereceden birinci çeşit Chebyshev polinomu $[1,4]$ aralığı için

$$T_3(s) = T_3\left(\frac{2x-5}{3}\right) = 4\left(\frac{2x-5}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2x-5}{3}\right) = \frac{1}{27}(32x^3 - 240x^2 + 546x - 365)$$

olarak bulunur (Çalık, 2010).

5. CHEBYSHEV POLİNOMLARININ TÜREV VE İNTEGRALLERİ

Teorem 5.1.

$x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için birinci çeşit Chebyshev polinomu $T_n(x)$ in türevi

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x) \tag{1.44}$$

şeklindedir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$T_n(x) = \cos(n\theta)$ ve $dx = -\sin\theta\, d\theta$ formüllerinden

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = n(-\sin n\theta)\, d\theta$$

$$= n\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\right) dx$$

$$= nU_{n-1}(x)\, dx$$

olur. Dolayısıyla birinci çeşit Chebyshev polinomu $T_n(x)$'in türevi

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x)$$

olarak elde edilir.

Teorem 5.2.

$x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için ikinci çeşit Chebyshev polinomunun türevi

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1} \tag{1.45}$$

şeklindedir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ ve $dx = -\sin\theta\, d\theta$ den

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)\cos(n+1)\theta\sin\theta - \cos\theta\sin(n+1)\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \left(\frac{(n+1)\cos(n+1)\theta \sin\theta - \cos\theta \sin(n+1)\theta}{\sin^2\theta} \right) \frac{-1}{\sin\theta} dx$$

$$= \frac{(n+1)\cos(n+1)\theta - \cos\theta \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}}{-\sin^2\theta} dx$$

$$= \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1} dx$$

dir. Buradan

$$\frac{d}{dx} U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1}$$

elde edilir.

Teorem 5.3.

$x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için birinci çeşit Chebyshev polinomunun integrali

$$\int T_n(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right) \tag{1.46}$$

şeklindedir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$x = \cos\theta$ için $dx = -\sin\theta\, d\theta$ olur. Bu bağıntı kullanılıp $T_n(x) = \cos(n\theta)$ eşitliğinde her iki tarafının integrali alınarak

$$\int T_n(x)\, dx = -\int \cos n\theta \sin\theta\, d\theta$$

eşitliği, trigonometrik dönüşüm formülleri kullanılarak da

$$\int T_n(x)\, dx = -\int \frac{1}{2}(\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right)$$

ifadesi elde edilir. Buradan da aşağıdaki integral sonucu elde edilir:

$$\int T_n(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right), & n \neq 1 \\ \frac{1}{4}T_2(x), & n = 1 \end{cases}$$

Teorem 5.4.

$x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için ikinci çeşit Chebyshev polinomunun integrali

$$\int U_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} \tag{1.47}$$

şeklindedir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$x = \cos\theta$ için $dx = -\sin\theta\,d\theta$ olur. $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ formülünde her iki tarafın integrali alınıp $dx = -\sin\theta\,d\theta$ kullanılırsa

$$\int U_n(x)\,dx = -\int \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$= \left(\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\right)$$

$$= \frac{T_{n+1}(x)}{n+1}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int U_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1}$$

olur.

Teorem 5.5.

$x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için üçüncü çeşit Chebyshev polinomunun integrali

$$\int V_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n} \tag{1.48}$$

şeklindedir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$V_n(x) = \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$, $dx = -\sin\theta\, d\theta$ ve trigonometrik dönüşüm formüllerinden

$$\int V_n(x) = -\int \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$= -\int \frac{\left(\cos n\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin n\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$= \int (\sin(n+1)\theta - \sin n\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\cos n\theta}{n}$$

olur. Buradan da

$$\int V_n(x)\, dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n}$$

elde edilir.

Teorem 5.6.

$x \in [-1,1]$ ve $x = \cos\theta$ için dördüncü çeşit Chebyshev polinomunun integrali

$$\int W_n(x)\, dx = -\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n} \qquad (1.49)$$

şeklindedir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$W_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$, $dx = -\sin\theta\, d\theta$ ve trigonometrik dönüşüm formüllerinden

$$\int W_n(x) = -\int \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\sin\theta\, d\theta$$

$$= -\int \frac{\left(\sin n\theta\cos\frac{\theta}{2} + \cos n\theta\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}d\theta$$

$$= \int (\sin n\theta + \sin n\theta \cos\theta + \cos n\theta \sin\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{\cos n\theta}{n} - \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}$$

olur. Buradan

$$\int W_n(x)\, dx = -\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n}$$

elde edilir.

Dört çeşit Chebyshev polinomunun türev ve integrallerini verdikten sonra bundan sonraki kısımda farklı tipteki integraller ve bu integrallerin toplamlarını verelim:

Lemma 5.1.

$$\int_0^x T_{2n}(y)\, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1} - \frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1}\right]$$

ve

$$\int_0^x T_{2n+1}(y)\, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{T_{2n+2}(x)}{2n+2} + \frac{(-1)^n(2n+1)}{2n(n+1)} - \frac{T_{2n}(x)}{2n}\right]$$

dir (Wang ve Zhang, 2012).

Teorem 5.7.

$$\sum_{n=1}^{h} \int_0^x T_{2n}(y)\, dy = \frac{T_{2h+1}(x)}{2(2h+1)} - \frac{x}{2} \qquad (1.50)$$

dir (Wang ve Zhang, 2012).

İspat: Lemma 5.1. den

$$\sum_{n=1}^{h} \int_0^x T_{2n}(y)\, dy = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{h}\left[\frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1} - \frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1}\right]$$

olup sağdaki toplam ifadesi açıldığında,

$n = 1$ için $\frac{T_3(x)}{3} - \frac{T_1(x)}{1}$

$$n = 2 \text{ için } \quad \frac{T_5(x)}{5} - \frac{T_3(x)}{3}$$

$$\vdots$$

$$n = h \text{ için } \quad \frac{T_{2h+1}(x)}{2h+1} - \frac{T_{2h-1}(x)}{2h-1}$$

ve toplam alındığında

$$\sum_{n=1}^{h} \left[\frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1} - \frac{T_{2n-1}(x)}{2n-1} \right] = \frac{T_{2h+1}(x)}{2h+1} - \frac{T_1(x)}{1}$$

bulunur. Burada $T_1(x) = x$ eşitlikte yerine yazılırsaaranan toplam

$$\frac{1}{2}\left(\frac{T_{2h+1}(x)}{2h+1} - x \right) = \frac{T_{2h+1}(x)}{2(2h+1)} - \frac{x}{2}$$

olarak bulunur.

Lemma 5.2.

$$T_n^2(y) = \frac{1 + T_{2n}(y)}{2}$$

dir (Wang ve Zhang, 2012).

İspat:

$$T_n^2(y) = \frac{1}{4}\left[\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)\right)^{2n} + 2\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)^{n}\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)^{n} + \left(y - \sqrt{y^2-1}\right)^{2n} \Big]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)^{2n} + \left(y - \sqrt{y^2-1}\right)^{2n} + 2 \right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)^{2n} + \left(y - \sqrt{y^2-1}\right)^{2n} \right] + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\left[\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)^{2n} + \left(y - \sqrt{y^2-1}\right)^{2n} \right] \right) + 1 \right)$$

$$= \frac{1 + T_{2n}(y)}{2}$$

olup istenilen eşitlik elde edilir.

Teorem 5.8.

$$\sum_{n=1}^{h}\int_{0}^{x} T_n^2(y)\,dy = \frac{1}{4}\left[\frac{T_{2h+1}(x)}{2h+1} + (2h-1)x\right] \tag{1.51}$$

dir (Wang ve Zhang, 2012).

İspat:

Lemma 5.2. den ve Teorem 5.7. den

$$\sum_{n=1}^{h}\int_{0}^{x} T_n^2(y)\,dy = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{h}\int_{0}^{x}(1 + T_{2n}(y)\,dy)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{h}\int_{0}^{x} 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{h}\int_{0}^{x} T_{2n}(y)\,dy$$

$$= \frac{hx}{2} + \frac{T_{2h+1}(x)}{4(2h+1)} - \frac{x}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{T_{2h+1}(x)}{2h+1} + (2h-1)x\right)$$

bulunur.

Teorem 5.9.

$$\sum_{n=1}^{h}\int_{0}^{x} T_{2n+1}(y)\,dy = \frac{1}{4}\left[\frac{T_{2h+2}(x)}{h+1} - 2x^2 + \frac{(-1)^h}{h+1}\right] \tag{1.52}$$

dir (Wang ve Zhang, 2012).

İspat: Lemma 5.1 den toplam değeri

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{h}\left[\frac{T_{2n+2}(x)}{2n+2} + \frac{(-1)^n(2n+1)}{2n(n+1)} - \frac{T_{2n}(x)}{2n}\right]$$

lup ayrı ayrı yazıldığında

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{h}\frac{T_{2n+2}(x)}{2n+2} - \frac{T_{2n}(x)}{2n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{h}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2n(n+1)}$$

olur. Toplam ifadesi açıldığında

$$n = 1 \text{ için} \quad \frac{T_4(x)}{4} - \frac{T_2(x)}{2}$$

$$n = 2 \text{ için} \quad \frac{T_6(x)}{6} - \frac{T_4(x)}{4}$$

$$\vdots$$

$$n = h \text{ için} \quad \frac{T_{2h+2}(x)}{2(h+1)} - \frac{T_{2h}(x)}{2}$$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$ olduğundan sonuç olarak

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{h} \frac{T_{2n+2}(x)}{2n+2} - \frac{T_{2n}(x)}{2n} = \frac{1}{4}\left(\frac{T_{2h+1}(x)}{h+1} - 2x^2 + 1\right)$$

bulunur. Diğer toplam ifadesi için

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{h} \frac{(-1)^n(2n+1)}{2n(n+1)} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{h} \frac{(-1)^n}{n} - \sum_{n=1}^{h} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)$$

dir. Gerçekten

$$n = 1 \text{ için} \quad -1 \quad -\frac{1}{2}$$

$$n = 2 \text{ için} \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$n = h \text{ için} \quad \frac{(-1)^h}{h} \quad \frac{(-1)^{h+1}}{h+1}$$

Böylece ikinci toplam

$$\frac{1}{4}\left(-1 - \frac{(-1)^{h+1}}{h+1}\right)$$

bulunur. Buradan istenilen toplam değeri

$$\frac{1}{4}\left(\frac{T_{2h+2}(x)}{h+1} - 2x^2 + 1 - 1 - \frac{(-1)^{h+1}}{h+1}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{T_{2h+2}(x)}{h+1} - 2x^2 + \frac{(-1)^h}{h+1}\right)$$

bulunur.

Wang ve Zhang (2012) birinci çeşit Chebyshev polinomlarının integral toplamlarını çalışmışlar ve bu konuda açık problemler olduğunu çalışmalarında belirtmişlerdir. Biz de pek çok özelliğini verdiğimiz Chebyshev polinomları için bu problem üzerinde çalıştık. Bunun için aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 5.1.

$$\int_0^x U_{2n}(y)\,dy = \frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1}$$

ve

$$\int_0^x U_{2n+1}(y)\,dy = \frac{T_{2n+2}(x)}{2n+2} + (-1)^n$$

dir.

İspat: $y = \cos\theta$ için $dy = -\sin\theta\,d\theta$ olur. $U_{2n}(y) = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$ eşitliğinde her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int_0^x U_{2n}(y)\,dy = -\int_0^x \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\int_0^x \sin(2n+1)\theta\;d\theta$$

$$= \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1}$$

$$= \frac{T_{2n+1}(y)}{2n+1}$$

olup integral sınır değerleri yerine yazıldığında Lemma 4.1.1 den integral değeri

$$\frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1} - \frac{T_{2n+1}(0)}{2n+1} = \frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int_0^x U_{2n}(y)\,dy = \frac{T_{2n+1}(x)}{2n+1}$$

olur. Benzer yol izlenerek,

$$\int_0^x U_{2n+1}(y)\,dy = -\int_0^x \frac{\sin(2n+2)\theta}{\sin\theta}\,\sin\theta\,d\theta$$

$$= -\int_0^x \sin(2n+2)\theta\;\,d\theta$$

$$= \frac{\cos(2n+2)\theta}{2n+2}$$

$$= \frac{T_{2n+2}(y)}{2n+2}$$

olup integral sınır değerleri yerine yazıldığında Lemma 4.1.1 den integral değeri

$$\frac{T_{2n+2}(x)}{2n+2} - \frac{T_{2n+2}(0)}{2n+2} = \frac{T_{2n+2}(x)}{2n+2} - (-1)^{n+1}$$

$$= \frac{T_{2n+2}(x)}{2n+2} + (-1)^n$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\int_0^x U_{2n+1}(y)\,dy = \frac{T_{2n+2}(x)}{2n+2} + (-1)^n$$

olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Chebyshev polinomları ailesi özel sayı dizileri olan Fibonacci ve Lucas sayı dizileri gibi matematiğin birçok alanında özellikle polinomların yaklaşımları alanında önemli bir yer tutmktadır. Bu tez çalışmasında, Chebyshev polinomlarının dört farklı çeşidinin temel özellikleri, teoremler, örnekler ve tablolar ile verilmiştir. Yine Chebyshev polinomlarının özel sayı dizileri ve bu sayı dizileri ile ilişkili polinomlar ile olan bağlantılarına detaylı olarak yer verilmiştir. Ayrıca ötelenmiş Chebyshev polinomlarından bahsedilmiştir. Son olarak bu çalışmada Chebyshev polinomlarının türev ve integralleri incelenmiştir. Bu tez çalışmasının amacı, Chebyshev polinomlarının her bir çeşidini detaylı olarak incelemek, Chebyshev polinomlar ile ilgili yeni özellikler geliştirmeye çalışmaktır.

Literatürde Chebyshev polinomlarının türev ve integralleri ile ilgili halen açık problemler yer almaktadır. Chebyshev polinomlarının bilinen özellikleri incelenerek gerek farklı sayı dizileri gerekse farklı polinomlar ile ilgili ilişkileri konusunda çalışmalar devam etmektedir. Bu kapsamda yapılacak çalışmalar literatüre önemli katkı sağlayacaktır.

7. KAYNAKLAR

Cesarano, C. (2015). Integral representations and new generating functions of Chebyshev polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44(3), 541-552.

Chebyshev-polynomials. Erişim: 04 Eylül 2022, https://brillant.org/wiki/chebyshev-polynomials-definition-and-properties/

Çalık, N. (2010). *Chebyshev Polinomları ve Bazı Uygulamaları, (Yüksek Lisans Tezi*), 3-18, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Djordjevic, G. B. (2009). Polynomials Related to Generalized Chebyshev Polynomials. *Filomat*, 23(3), 279-290.

Duran, R. (2016). *Adi Diferansiyel Denklemlerin Chebyshev Polinomları Yardımıyla Çözümü, (Yüksek Lisans Tezi),* 20, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Horadam, A. F. (2002). Vieta Polynomials. *Fibonacci Quaterly*, 40 (3), 223-232.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 1*. 79, New York, U.S.A.: Wiley Publishing.

Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2*. (3. baskı), 215-227, New York, U.S.A.: Wiley Publishing.

Mason J. C. ve Handscomb D. C. (2003). *Chebyshev Polynomials*, (1. baskı), 1-58, New York: Chapman & Hall/Crc

Özvatan, M. (2018). *Generalized Golden-Fibonacci Calculus and Applications (Yüksek Lisans Tezi*, 72-73, 9 Eylül Üniversitesi, İzmir.

Rivlin T.J. (1990). *Chebyshev Polynomials. From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, (2. baskı), 1-249, New York: Wiley-Interscience.

Vitula, R. ve Slota, D. (2006). On modified Chebyshev polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 324, 321-343.

Wang, T. ve Zhang, W. (2012). Some identities involving Fibonacci, Lucas polynomials and their applications. *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 103, 95–103.

Wang, X. and Hu, J. (2018). An identity involving the integral of the first-kind Chebyshev polynomials, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 7186940.

Whang, S. (2015). Some new identities of Chebyshev polynomials and their applications. *Advances in Difference Equations*, 2015, 1-8.

Yang, L. (2014). On Chebyshev polynomials, Fibonacci polynomials, and their derivatives. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 1-20.

Zhang, W. (2002). Chebyshev polynomials and about Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 40(5), 424-428.

Zhang, W. (2004). Some identities involving the Fibonacci numbers and Lucas numbers. *The Fibonacci Quarterly*, 42, 149– 154.

ÖZGEÇMİŞ

İlköğretimini Mersin'de Kıbrıs İlköğretim Okulunda, lise öğrenimini ise 2006-2010 yılları arasında Adıyaman Anadolu IMKB Lisesinde tamamladı. 2011-2015 yılları arasında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi. Yozgat Bozok Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.

Bu tez çalışmasından yapılan yayınlar:

Taşdemir, F. ve Turgut, H. (2023). Chebyshev polinomlarının özellikleri üzerine. *3rd International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences*, Konya.