T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

KESİRSEL MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KUDRYASHOV YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

Selami ORHAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2020

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

KESİRSEL MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KUDRYASHOV YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

Selami ORHAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **iii**

ABSTRACT ..... **iv**

TEŞEKKÜR ..... **v**

ŞEKİLLER LİSTESİ…… **vi**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Temel Tanımlar……..…. 3

1.1.1. Kesirsel Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler…….. 3

1.1.2. Dalga (Soliton) Kavramı……..……...…….. 4

2. YÖNTEMLER……..…… **7**

2.1. Klasik Kudryashov Yöntemi…..…….……... 7

2.1. Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi……..…..……... 9

3. BULGULAR……. **11**

3.1. Atangana Kesirsel Türevi İçeren Lineer Olmayan Benjamin-Bona-Mahony Denklemi ve Uygulaması……... 11

3.2. Atangana Kesirsel Türevi İçeren Simetrik Regüle Edilmiş Uzun Dalga Denklemi ve Uygulaması …… 19

SONUÇ **25**

KAYNAKLAR..... **27**

ÖZGEÇMİŞ..... **30**

KESİRSEL MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN KUDRYASHOV YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

Selami Orhan

Yozgat Bozok Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2020; Sayfa: 38

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ÖZET

Bu çalışmada, Atangana türevi içeren kesirsel mertebeden diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilebilmesini sağlayan genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi incelenmiştir. Bu yöntem klasik Kudryashov yönteminin genelleştirilmiş halidir. Genelleştirilen bu yöntem, kesirsel bir türev olan Atangana türevini içeren lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasını sağlar. Bu yöntem sırasıyla Atangana türevi içeren simetrik regüle edilmiş uzun dalga denklemi ve modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemine uygulanmıştır. Bu denklemlerin literatürde olmayan farklı tam çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca, elde edilen bu yeni tam çözümlerin fiziksel davranışlarını göstermek için üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi, Atangana türevi içeren kesirsel mertebeden diferansiyel denklemler, Atangana türevi içeren simetrik regüle edilmiş uzun dalga denklemi, Atangana türevi içeren modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denklemi

INVESTIGATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL ORDER BY KUDRYASHOV METHOD

Selami ORHAN

Yozgat Bozok University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

2020; Page: 38

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf PANDIR

ABSTRACT

In this study, the generalized Kudryashov method is examined which enables to obtain the exact solutions of fractional order differential equations containing the Atangana derivative. This method is a generalization of the classical Kudryashov method. This generalized method allows finding exact solutions of nonlinear differential equations involving Atangana derivative, which is a fractional derivative. This method is applied to the symmetrically regulated long wave equation containing the Atangana derivative and the modified Benjamin-Bona-Mahony equation, respectively. Different exact solutions of these equations that are not available in the literature have been obtained. In addition, three-dimensional graphs are drawn to show the physical behavior of these new exact solutions.

Keywords: Generalized Kudryashov method, Fractional order differential equations with Atangana derivative, Symmetric Regularized Long Wave (SRLW) equation with Atangana derivative, Modified Benjamin-Bona-Mahony equation with Atangana derivative

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamım her aşamasında bilgi, deneyim, tecrübe ve desteklerini esirgemeyen, sabır ve özveriyle bana sürekli yardımcı olan, varlığını her zaman yanımda hissettiğim danışmanım Sayın Doç. Dr. Yusuf PANDIR'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca samimiyetini, güler yüzünü ve desteğini benden esirgemeyen kıymetli büyüğüm Prof. Dr. Dilek PANDIR hocama teşekkürlerimi sunarım.

Kıymetli zamanlarını ayırarak, bilgi ve önerileriyle tez çalışmama katkılarını sunan tez savunma jürimdeki değerli hocalarıma çok teşekkür ederim.

Bu süreçte maddi ve manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim ve benim motive kaynağım olan başta canım annem olmak üzere babama ve kardeşlerime teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1: Örnek bir dalga modeli ……..……..... 5

Şekil 3.1: (3.12) çözüm fonksiyonunun $\chi = 3.2,\ k = 1,$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi ……..... 14

Şekil 3.2: (3.17) çözüm fonksiyonunun $\chi = 3.2,\ b_0 = 1.5,\ b_1 = 0.85,\ k = 1$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi ……... 16

Şekil 3.3: (3.20) çözüm fonksiyonunun $\chi = 3.2,\ k = 1,$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi …… 17

Şekil 3.4: (3.23) çözüm fonksiyonunun $\chi = 3.2,\ k = 1$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi ……..…… 18

Şekil 3.5: (3.27) çözüm fonksiyonunun $\chi = 3.2,\ k = 1$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi …….. 19

Şekil 3.6: (3.38) çözüm fonksiyonunun $k = 2.8$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi …….. 23

Şekil 3.7: (3.39) çözüm fonksiyonunun $k = 2.8$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi …….. 23

Şekil 3.8: (3.42) çözüm fonksiyonunun $k = 2.8$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.…….. 24

Şekil 3.9: (3.43) çözüm fonksiyonunun $k = 2.8$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi …….. 24

GİRİŞ

Kesirli mertebe kavramı ilk olarak 1695 yılında Leibniz, L'Hospital tarafından literatüre kazandırılmıştır. Birçok matematikçi kesirli mertebe kavramı üzerinde çalışmış ve kesirli mertebeden problemlerin elde edilmesi elde edilen bu problemlerin analitik çözümleri ve sayısal çözümleri birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler fen bilimleri, doğa bilimleri, mühendislik, elektromanyetik, sürekli ortamlar mekaniği, kontrol teorisi, sistem tanımlama, sinyal işleme, finans ve fraksiyonel (kesirli) dinamikler gibi birçok alanda ortaya çıkan problemleri çözmek için kullanılmıştır. Genel anlamıyla ısı aktarımı, elektrot/elektrolit davranışları ve eşik sinir yayılımı gibi mühendislik alanlarında karşılaşılan problemleri oluşturan olayları tanımlamakta ve bu fiziksel olayların farklı bir bakış açısıyla yorumlanmasına olanak sağlamaktadır.

Kesirsel diferansiyel, türev ve integralin tam olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş bir halidir. Kesirsel diferansiyel denklem çözümlerini elde etmek için kesirsel türev ve kesirsel integral hesaplamalarının bilinmesi gerekir [1].

Genel olarak, bir kesirsel türevli diferansiyel denklemin kesin (tam) çözümünün elde edilebilmesi için herhangi bir çözüm metodu hali hazırda mevcut değildir. Bu tip denklemler için sonlu elemanlar yöntemi [3], sonlu farklar yöntemi [2], değişim iterasyon yöntemi [6], diferansiyel dönüşüm yöntemi [4], Adomian ayrıştırma yöntemi [5], Homotopy perturbasyon yöntemi [7] ve lineerleştirme yöntemi gibi yaklaşık çözümler önerilmiştir.

Genel itibariyle iki tür kesirsel türev vardır. Bunlardan ilki yerel olmayan kesirsel türev yani Caputo türev, diğeri ise çeşitli mühendislik alanlarında başarılı bir şekilde kullanılan Riemann-Lioville türevdir Yakın zamanda yeni bir türev kavramı ortaya atılmıştır. Atangana tarafından tanıtılan bu türev singüler noktalar civarında da inceleme yapılmasına imkan sunmuştur Bu tez çalışmasının temel amacı Atangana tarafından önerilen türevi içeren denklemleri incelemektir. [8]

Son dönemlerde Zhang ve Zhang [9] doğrusal olmayan kesirsel diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için kesirsel alt denklem olarak isimlendirilen yeni bir metot önerdi. Bu metot homojen denge prensibi [10] ve Jumarie tarafından modifiye edilmiş Riemann-Lioville türevi üzerine temellenmiştir [11, 12]. Zhang ve arkadaşları bu kesirsel alt denklem metodunu kullanarak (4+1)-boyutlu uzay zaman kesirsel Fokas denkleminin hareketli dalga çözümlerini ve doğrusal olmayan zaman kesirsel biyolojik modelini başarılı bir şekilde elde ettiler [9]. Zhang ve arkadaşlarının geliştirmiş olduğu yöntemi kullanarak Guo ve arkadaşları [13] ve Lu [14] bazı doğrusal olmayan kesirsel türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerine ulaştılar. Nikolay A. Kudryashov lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için kendi adını verdiği yeni bir metodu literatüre kazandırmıştır [15]. Zhenya Y. Jakobi kesirsel diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini eliptik fonksiyonlar yardımıyla elde etmiştir [16].

Pandir ve arkadaşları [17] bazı kesirsel genelleştirilmiş kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerini genişletilmiş deneme denklem yöntemini kullanarak elde ettiler. Pandir ve Gürefe [18] genişletilmiş deneme denklem yönteminin yeni bir formunu tanıtarak, genelleştirilmiş Zakharov Kuznetsov denkleminin yeni tam çözümlerini önerdiler.

Pandir ve arkadaşları son dönemlerde Kudryashov yöntemini kullanarak lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için çeşitli çalışmalar yaptı ve bu çalışmalar neticesinde kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin birçok yeni ve farklı çözümlerini elde ettiler [19-23].

Bu tez çalışmamızda Kudryashov yönteminin farklı biçimlerini kesirsel mertebeden (Atangana türevli) kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerini bulmak için inceleyeceğiz. Önereceğimiz yeni yöntemler diğer yöntemlerden farklı ve onların bir araya getirilmesiyle oluşturulacaktır. Oluşturacağımız bu yeni yöntemler yardımıyla yeni çözümler elde etmeye çalışacağız. Önerilen yeni çözümler ile lineer olmayan kesirsel mertebeden (Atangana türevli) kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümler ailesine katkı sağlanacağını düşünüyoruz.

1.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde kısmi türevli diferansiyel denklemler ve soliton kavramı ile ilgili temel tanımlar ve özellikler verilmiştir.

1.1.1. Kesirsel Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Tabiatta oluşan olayları anlamamamızı sağlayan kurallar olayların meydana gelmesiyle oluşan olayları veren ilişkilerdir. Diferansiyel kavramı sürekli değişkenlik gösteren miktar ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi ifade eder. Sürekli değişen bir miktar ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi ifade eden kavrama 'diferansiyel' denir. Diferansiyel denklem ise tabiatta oluşan birçok fiziksel olayların sonucunda matematiksel algoritmalara göre modellenerek meydana gelir. Mühendislik bilimleri, fen bilimleri, doğa bilimleri, ve ekonomi bilimleri bilimlerinde karşılaşılan sorunların modellenmesiyle oluşturulan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması gerekir. Fiziksel olayların daha iyi anlaşılması oluşturulan diferansiyel denklemlerin çözümünde çok daha iyi anlaşılması sağlanır Bu sebepten dolayı diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması tüm bilimsel araştırmalarda büyük önem taşımaktadır.

Tanım 1.1: [24] makalesine göre Khalil ve ark. comformable(uygun) türev olarak isimlendirilen türevin yeni bir tanımını verir. $h:[0,\infty)$ α - ıncı mertebeden bir fonksiyon olsun, $h(t)$'nin comformable(uygun) türevi her $t>0$, $\alpha\in(0,1)$ açık aralığı için

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\alpha}\{h(t)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h\left(t+\varepsilon t^{1-\alpha}\right)-h(t)}{\varepsilon} \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer h bazı $(0,a)$ açık aralığında α - diferansiyellenebilir $a>0$ ve $\lim_{\varepsilon\to 0^{+}} h^{(\alpha)}(t)$ var ise bu durumda $h^{\alpha}(0)=\lim_{\varepsilon\to 0} h^{\alpha}(t)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2: Atangana ve ark. [8] tarafından önerilmiş beta türev(Atangana türevi)

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\alpha}\{h(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{1-\alpha}\right)-h(t)}{\varepsilon} \tag{1.2} $$

olarak tanımlanır. Bu tanım birçok ilginç özelliğe sahiptir.

(I) Varsayılır ki $y \neq 0$ ve h, $\beta \in (0,1]$ için β-diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki bağlantılar sağlanır [8]. Her y ve z reel sayıları için

$$ {}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}\{yh(x)+zp(x)\} = y\,{}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}h(x)+z\,{}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}p(x) \tag{1.3} $$

(II) Herhangi bir c sabiti için

$$ {}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}\{c\} = 0 \tag{1.4} $$

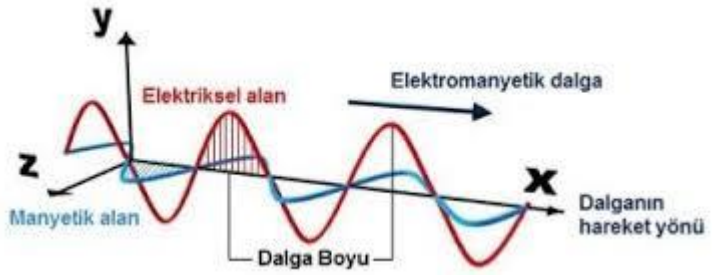
(III)
$$ {}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}\{h(x).p(x)\} = p(x)\,{}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}\{h(x)\}+h(x)\,{}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}\{p(x)\} \tag{1.5} $$

(IV)
$$ {}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}\left(\frac{h(x)}{p(x)}\right) = \frac{p(x)\,{}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}\{h(x)\}-h(x)\,{}_{0}^{A}D_{x}^{\alpha}\{p(x)\}}{p^{2}(x)} \tag{1.6} $$

1.1.2. Dalga(Soliton) Kavramı

Uygulamalı bilimlerde birçok olayın açıklanmasında ve ifade edilmesinde dalga kavramı ile karşılaşılır. Belli bir ortamda yayılan enerjinin taşınmasına olanak sağlayan titreşimler dalga olarak ifade edilir. Deniz dibindeki oluşan dalgalar, su yüzeyindeki dalgalar, ışık demeti şeklindeki parçacıklar, belli ortamda ilerleyen ses dalgaları, deprem esnasında meydana gelen sarsıntılar birer dalga örnekleridir. Dalganın salınımın frekansını h, salınımının şiddetinin genliğini ve iki tepesi veya çukuru arasındaki uzaklığı ise λ dalga boyu ile ifade edilir. Dalganın sınıflandırılması iki şekilde yapabiliriz. Bunlar dalganın oluşmasına olanak sağlayan titreşimlere göre periyodik veya periyodik olmama şeklinde ifade edilir. Periyodik dalgalara örnek olarak bir kemandaki nota sesi, periyodik olmayan dalgalara örnek

olarak bir patlama sonucu meydana gelen ses verilebilir. Dalgaların iki çeşidi bulunmaktadır. Bunlar duran ve hareketli dalga olmak üzere ifade edilir. Duran dalga çeşidine örnek olarak sabit bir pozisyonda olup ortamın hareketine ters hareket yapan dalga, hareket eden dalgaya örnek olarak belli iki nokta arasında enerjinin taşınması verilebilir.



Şekil 1.1. Dalga modeli Örneği

İskoç mühendis John Scott Russell 1834 yılında tek dalga hareketini ilk kez gözlemlemiştir. Bu gözlemlenen dalga hareketinin periyodik bir dalga olmadığı ve şeklini değiştirmeden tümsek bir hareket ederek yayılan bir dalga olduğunu ifade edilmiştir. Bu durumun tespitinden sonra, bu tarz doğa olaylarının modellenmesi için gerekli bir teorik yapı oluşturulmuş ve Diederik Johannes Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries tarafından 1895 yılında soliton teorisinin başlangıcı olarak kabul edilen Korteweg de Vries (KdV) denklemi ilk kez oluşturulmuştur. KdV denklemi fazla derinliği olmayan sularda meydana gelen dalgaların yayılmasını ifade eden bir model olarak tasarlanmıştır. Bu denklemin genel formu

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1.7}$$

şeklinde ifade edilmiştir.

ε, x konumunda t zamanında dalganın yerden uzaklığını ifade etmek üzere (1.7) denkleminin genel çözümü

$$u(x,t) = \ell \operatorname{sech}^2\left(\varepsilon\left(x - vt\right)\right),\ v = 2\ell = 4\varepsilon^2 \tag{1.8}$$

olarak bulunmuştur. Burada meydana gelen dalgaların lineer olmayan bir formda olduğu belirtilmiştir.

Sahip oldukları şekil, hız ve enerjilerini koruyarak yayılan lineer olmayan dalgalar solitonlar olarak adlandırılır [25]. Solitonlar herhangi bir etkileşme anından sonra ve karşılıklı olarak çarpışmalarda özelliklerini korurlar. Fiziksel olayların modellenmesiyle solitonlar meydana gelir. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin ve lineer olmayan sistemlerin açıklanmasında solitonlar önemli rol oynarlar. Uygulamalı matematik ve matematiksel fiziğin önemli bir dalı soliton teorisidir. Solitonlar biyolojik sistemlerde, akışkanlar mekaniğinde ve parçacık fiziğinde karşımıza çıkar. Teknolojik gelişmeye paralel olarak birçok alanda karşılaşılan solitonlar kendisine yeni uygulama sahaları bulmuştur. Son yıllarda özellikle sağlık bilimlerinde sinir sistemindeki nöronların gönderdiği sinyaller incelendiğinde solitonların meydana geldiği görülmüştür.

2. YÖNTEMLER

Bu bölümde Kudryashov yöntemlerinin detaylı bir incelenmesi yapılmıştır. İlk önce Nikolay A. Kudryashov' un önerdiğini klasik Kudryashov yöntemi verilmiş daha sonra ise bu önerilen yönteminin genelleştirilmesiyle elde edilen genelleştirilmiş Kudryashov yönteminden bahsedilmiştir. Kudryashov yöntemleri ile ilgili birçok bilim insanı çalışmalar yapmış ve ele alınan bu yöntem geliştirilerek farklı lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulunmuştur.

2.1. Klasik Kudryashov Yöntemi

2010 yılında Kudryashov yöntemi ilk kez Nikolay A. Kudryashov tarafından önerildi [16]. Bu yöntem ile kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri bulunur. Tezin bu kısmında ilk önce Kudryashov yönteminin ana hatları detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Atangana türevi içeren kesirli mertebeden bir kısmi türevli diferansiyel denklem bağımsız değişkenler $x_1, x_2, x_3, ..., t$ olmak üzere

$$G\left(\varphi, {}_0^A D_t^\alpha \varphi, {}_0^A D_{x_1}^\alpha \varphi, {}_0^A D_{x_2}^\alpha \varphi, {}_0^A D_{x_3}^\alpha \varphi, ..., {}_0^A D_t^{2\alpha} \varphi, {}_0^A D_{x_2}^{2\alpha} \varphi, {}_0^A D_{x_3}^{2\alpha} \varphi, ...\right) = 0 \qquad (2.1)$$

şeklindedir. En başta hareketli dalga çözümler hesaba katılarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenmesi için $v_i \ (i = 1, 2, 3, ..., m), \lambda$ sabitler, G' de $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, t)$ nin bir polinomu olmak üzere

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, t) = \varphi(\mu),$$

$$\mu = \frac{v_1}{\alpha}\left(x_1 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + \frac{v_2}{\alpha}\left(x_2 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + ... + \frac{v_m}{\alpha}\left(x_m + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + \frac{\lambda}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha \qquad (2.2)$$

hareketli dalga dönüşümü kullanılır. Kullanılan bu dalga dönüşümü (2.1) kısmi türevli denkleme uygulandığında ve bu denklemdeki karşılıkları kısmi türevlerin yerine yazıldığında

$$H\left(\varphi,\varphi',\varphi'',\varphi''',...\right)=0 \tag{2.3}$$

türde bir adi diferansiyel denklem bulunur. (2.3) denklemindeki $\varphi(\mu)$ çözüm fonksiyonunu;

$$\varphi(\mu)=\sum_{k=0}^{H} a_k R^k(\omega) \tag{2.4}$$

şeklinde kabul edilir. Daha sonra belirlenecek olan keyfi sabitler $a_k\left(k=0,\cdots,H\right)$ ve $R'_\mu = R^2 - R$ diferansiyel denkleminin çözümünden elde edilen $R(\mu)=\dfrac{1}{1\pm e^{\mu}}$ fonksiyonudur.

(2.4)'deki denklemin çözüm fonksiyonundan yararlanılarak (2.3) diferansiyel denkleminde bulunan ilgili türevler

$$\varphi'(\mu)=\sum_{k=0}^{H} a_k k R^k\left(R-1\right)$$

$$\varphi''(\mu)=\sum_{k=0}^{H} a_k k R^k\left(R-1\right)\left[\left(k+1\right)R-k\right] \tag{2.5}$$

$$\varphi'''(\mu)=\sum_{k=0}^{H} a_k k R^k\left(R-1\right)\left[\left(k^2+3k+2\right)R^2-\left(2k^2+3k+1\right)R+k^2\right]$$

$$\vdots$$

şeklinde hesaplanır. (2.3) denklemindeki gibi bir R fonksiyonunun polinom şeklindeki ifadesi (2.5) ifadesinden elde edilen türevler tarafından bulunur. (2.3) ifadesinde yer alan denklemin en yüksek mertebeden türev içeren terimi ile lineer olmayan yüksek dereceden terim arasında balans işlemi uygulanarak (2.4) ifadesindeki H sayısı belirlenir. Böylece H sayısı çözüm fonksiyonu için elde edilmiş olur. (2.3) denklemine (2.4) denkleminden elde edilen türevler hesaplanıp yerine yazıldığında R fonksiyonuna bağlı sıfır polinomu elde edilir. Sıfır

polinomunda bulunan katsayılar sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Hesaplanması gereken $a_k\left(k=0,\cdots,H\right)$, $\nu_i\ \left(i=1,2,3,...,m\right)$ ve λ katsayıları bulunur. Elde edilen cebirsel denklem sisteminin Mathematica 10 paket programı yardımıyla bulunur. (2.4) çözüm fonksiyonuna elde edilen bu katsayılar yazılır. Böylece (2.2) ifadesinde yer alan ters dönüşüm şeklindeki çözüm fonksiyonlarına uygulandığında (2.1) denkleminin yeni hareketli dalga tam çözümleri bulunur.

2.2. Genelleştirilmiş Kudryashov Yöntemi

Bu bölümde geliştirilen Kudryashov yöntemlerinden faydalanılarak genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi ile yeni kesin (tam) çözümlerin elde edilmesi hedeflenmiştir[26-28]. Hedeflenen yeni tam çözümlerin farklı solition çözümlerin bulunması düşünülmüştür. (2.2) ifadesindeki hareketli dalga dönüşümü (2.1) bölümünde tanıtılan (2.1) ifadesindeki lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemine uygulandığında (2.3) şeklindeki bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Daha sonra belirlenecek olan sabitler $a_k\left(k=0,\cdots,H\right)$, $\nu_i\left(i=0,\cdots,m\right)$ (2.4) ifadesindeki çözüm fonksiyonu yerine ve $R'_\omega=R^2-R$ diferansiyel denkleminin çözümünden elde ettiğimiz $R\left(\mu\right)=\dfrac{1}{1\pm e^{\mu}}$ fonksiyonu olmak üzere yeni çözüm fonksiyonunu

$$\varphi\left(\mu\right)=\frac{\sum_{k=0}^{H}a_kR^k\left(\mu\right)}{\sum_{n=0}^{S}b_nR^n\left(\mu\right)}=\frac{M\left[R\left(\mu\right)\right]}{N\left[R\left(\mu\right)\right]} \tag{2.6}$$

kabul edelim. (2.3) diferansiyel denkleminde bulunan ilgili türevler (2.6) çözüm fonksiyonundan faydalanılarak

$$\varphi'\left(\mu\right)=\frac{M'R'N-MN'R'}{N^2}=\left(R^2-R\right)\frac{M'N-MN'}{N^2}$$

$$\varphi''(\mu)=\frac{R^2-R}{N^2}\left[(2R-1)(M'N-MN')+\frac{R^2-R}{N}\left(N(M''N-MN'')-2N'M'N+2MN'^2\right)\right]$$

$$\varphi'''(\mu)=\left(R^2-R\right)^3\left[\frac{(M'''N-MN'''-3M''N'-3N''M')N+6N(MN''+N'M')}{N^3}\right]$$
$$+3\left(R^2-R\right)^2(2R-1)\left[\frac{N(M''N-MN'')-2N'M'N+2MN'^2}{N^3}\right]$$
$$+\left(R^2-R\right)\left(6R^2-6R+1\right)\left[\frac{M'N-MN'}{N^2}\right]$$
$$\vdots \tag{2.7}$$

şeklinde hesaplanır. Bunun yanı sıra (2.7) ifadesinden elde edilen türevler incelendiğinde (2.6) çözüm fonksiyonunda belirtilen rasyonel bir R fonksiyonunun bir polinom ifadesi

$$\varphi(\mu)=\frac{a_0+a_1R+a_2R^2+\cdots+a_HR^H}{b_0+b_1R+b_2R^2+\cdots+b_SR^S} \tag{2.8}$$

bulunur. (2.3) ifadesinde bulunan en yüksek mertebeden türev içeren terim ile lineer olmayan yüksek dereceden terim arasında balans işlemi uygulanarak çözüm fonksiyonu için gerekli olan (2.6) ifadesinde yer alan H ve S sayıları belirlenir (2.6) fonksiyonuna göre denklemde bulunan türevler hesaplanarak belirlen erek sayılar (2.3) denkleminde yerine yazıldığında R fonksiyonuna bağlı sıfır polinomu bulunur. Sıfır polinomunda bulunan katsayılar sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Hesaplanması gereken $a_k\,(k=0,\cdots,H)$, $b_n\,(n=0,\cdots,S)$ ve $v_i\ (i=1,2,3,...,m)$ katsayıları elde edilen cebirsel denklem sisteminin Mathematica 10 paket programı yardımıyla bulunur. (2.6) çözüm fonksiyonuna elde edilen bu katsayılar yazılır Böylece (2.2) ifadesinde yer alan ters dönüşüm şeklindeki çözüm fonksiyonlarına uygulandığında (2.1) denkleminin yeni hareketli dalga tam çözümleri bulunur.

3. BULGULAR

Bu bölümde Atangana türevi içeren kesirli mertebeden Benjamin-Bona-Mahony denklemi ile simetrik regüle edilmiş uzun dalga denklemi ana hatlarıyla irdelenmiş ve daha sonra genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi bu denklemlere uygulanmıştır.

3.1.Atangana Türevi İçeren Modifiye Edilmiş Benjamin-Bona-Mahony Denklemi ve Uygulaması

Kesirli mertebede türev çeşidi olan Atangana türevi içeren modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin en genel hali

$$ {}_0^A D_t^\alpha \{\varphi\} + {}_0^A D_x^\alpha \{\varphi\} - k\varphi^2 \, {}_0^A D_x^\alpha \{\varphi\} + {}_0^A D_x^{3\alpha} \{\varphi\} = 0 \tag{3.1} $$

şeklindedir [29]. (3.1) denklemindeki k keyfi bir sabittir. Bu denklem doğrusal olmayan dağıtıcılı ortamlarda uzun yüzey dalgalarını tanımlamak için kullanılır. Bu denklem ayrıca soğuk plazma ortamında hidromanyetik dalgaları, anharmonik kristallerde akustik dalgaları ve sıkıştırılamaz akışlardaki akustik-yer çekim dalgalarını karakterize eder. (3.1) denkleminin genelleştirilmiş Kudryashov yöntemini kullanarak tam çözümlerini elde edebilmek öncelikle hareketli dalga dönüşümü olarak

$$ \mu = \frac{\chi}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha - \frac{\lambda}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right)^\alpha \tag{3.2} $$

alalım.

$\varphi = \varphi(\mu)$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \varphi'$ olmak üzere, (3.1) denklemi

$$ -\lambda\varphi'(\mu) + \chi\varphi'(\mu) - k\chi\varphi^2\varphi'(\mu) + \chi^3\varphi'''(\mu) = 0 \tag{3.3} $$

şeklinde elde edilir. (3.3) denklemi μ ye göre bir kez integre edilip integrasyon sabiti sıfır kabul edildiğinde

$$(\chi-\lambda)\varphi-\frac{k\chi}{3}\varphi^3+\chi^3\varphi''=0 \tag{3.4}$$

şeklinde lineer olmayan 2. mertebeden bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (3.4) denkleminin çözümünü (2.6) çözüm fonksiyonu olarak kabul edelim.. Burada balans prosedürü uygulanarak H ve S sayıları belirlenir. (3.4) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev içeren φ'' terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan φ^3 terimleri arasında Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemine uygun olarak aşağıdaki şekilde yapılır. (2.8) çözüm fonksiyonundan

$$\varphi=R(\mu)^{H-S}+\ldots \tag{3.5}$$

şeklinde yazıldığından ve balans prosedürünün diğer gerekli terimleri (3.5) bağıntısı kullanarak kısaca

$$\varphi^3=R(\mu)^{3H-3S}+\ldots \tag{3.6}$$

$$\varphi''(\mu)\cong R(\mu)^{H-S+2}+\ldots \tag{3.7}$$

yazılır. (3.6) ve (3.7) deki terimler $\varphi''\approx\varphi^3$ balans işlemine tabi tutulduğunda balans terim ifadesi $H=S+1$ olarak bulunur. Balans teriminde $S=1$ alındığında, $H=2$ olur. Bu balans terimleri (2.8) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında (3.1) denklemin tam çözüm fonksiyonunun genel hali

$$\varphi(\mu)=\frac{a_0+a_1R+a_2R^2}{b_0+b_1R} \tag{3.8}$$

olarak belirlenir. (3.8) çözüm fonksiyonuna göre (3.4) adi denkleminde bulunan φ'' ve φ^3 terimleri

$$\varphi'(\mu)=\frac{M'R'N-MN'R'}{N^2}=\left(R^2-R\right)\frac{M'N-MN'}{N^2}$$

$$\varphi''(\mu)=\frac{R^2-R}{N^2}\left[(2R-1)(M'N-MN')+\frac{R^2-R}{N}\left(N(M''N-MN'')-2N'M'N+2MN'^2\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\varphi'''(\mu)=\left(R^2-R\right)^3&\left[\frac{(M'''N-MN'''-3M''N'-3N''M')N+6N(MN''+N'M')}{N^3}\right]\\&+3\left(R^2-R\right)^2(2R-1)\left[\frac{N(M''N-MN'')-2N'M'N+2MN'^2}{N^3}\right]\\&+\left(R^2-R\right)\left(6R^2-6R+1\right)\left[\frac{M'N-MN'}{N^2}\right]\\&\vdots\end{aligned}$$

(3.9)

şeklinde hesaplanır. Hesaplanan değerler daha sonra (3.4) denkleminde yerine yazıldığında $R(\mu)$ fonksiyonuna bağlı bir polinom ifadesi elde edilir. Bulunan polinom sıfır polinomu olarak kabul edilirse ve polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel sistem Mathematica 10 paket programı yardımıyla ilgili algoritmalara göre çözüldüğünde a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 ve χ, λ katsayıları bulunur. Bulunan katsayılar (3.1) denkleminin aşağıda yer alan durumlardaki çözümleri için (3.8) çözüm fonksiyonunda yerine yazılarak elde edilmiştir.

Durum 1.

$$a_0=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\chi\, b_0}{\sqrt{k}},\quad a_1=0,\quad a_2=-\frac{2\sqrt{6}\chi b_0}{\sqrt{k}},\quad b_1=2b_0,\quad \lambda=-\frac{1}{2}\,\chi\left(2+\chi^2\right) \qquad (3.10)$$

bulunan katsayıları ve $R'_\mu=R^2-R$ denkleminden elde edilen $R(\mu)=\frac{1}{1\pm e^{\mu}}$ fonksiyonu (3.8) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında

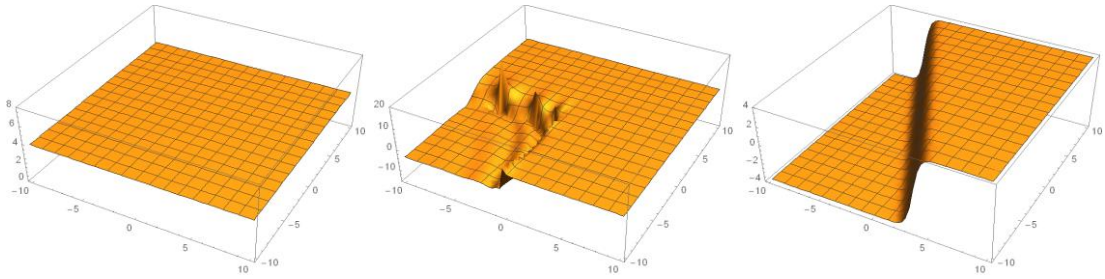
$$\varphi_1(x,t)=\frac{\sqrt{\frac{3}{2k}}\chi b_0-2\sqrt{\frac{6}{k}}\chi b_0\left(\frac{1}{1\pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}\left(t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)^{2}}}\right)}{b_0+2b_0\left(\frac{1}{1\pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}\left(t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)}}\right)} \tag{3.11}$$

bulunur. (3.11) çözümü için basit dönüşümler uygulandığında (3.1) denklemin çözümü $A=\chi\sqrt{\frac{3}{2k}}$ olmak üzere

$$\varphi_{1,1}(x,t)=A\tanh\left[\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{4\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{3.12}$$

$$\varphi_{1,2}(x,t)=A\coth\left[\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{4\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{3.13}$$

elde edilir.



Şekil 3.1. (3.12) çözüm fonksiyonunun $\chi=3.2,\ k=1$, ile $\alpha=0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

Durum 2.

$$a_0=-\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\ \chi\ b_0}{\sqrt{k}},\quad a_1=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\ \chi\left(2b_0+b_1\right)}{\sqrt{k}},\quad a_2=0,\ \lambda=-\frac{1}{2}\ \chi\left(2+\chi^2\right) \tag{3.14}$$

bulunan katsayıları ve $R'_{\mu}=R^2-R$ denkleminden elde edilen $R(\mu)=\dfrac{1}{1\pm e^{\mu}}$ fonksiyonu (3.8) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında

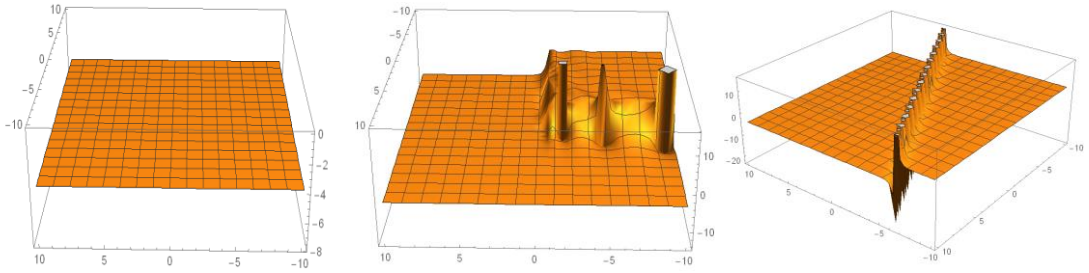
$$\varphi_2(x,t)=\frac{-\sqrt{\frac{3}{2k}}\chi b_0+\sqrt{\frac{3}{2k}}\chi\left[(2b_0+b_1)\left(\frac{1}{1\pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)\right]}{b_0+b_1\left(\frac{1}{1\pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)} \tag{3.15}$$

bulunur. (3.15) çözümü için basit dönüşümler uygulandığında (3.1) denklemin çözümü

$$\varphi_{2,1}(x,t)=-A\frac{(2b_0+b_1)\tanh\left[\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{4\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]-b_1}{2b_0+b_1-b_1\tanh\left[\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{4\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]} \tag{3.16}$$

$$\varphi_{2,2}(x,t)=-A\frac{(2b_0+b_1)\coth\left[\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{4\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]-b_1}{2b_0+b_1-b_1\coth\left[\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{4\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]} \tag{3.17}$$

elde edilir.



Şekil 3.2. (3.17) çözüm fonksiyonunun $\chi = 3.2,\ b_0 = 1.5,\ b_1 = 0.85,\ k = 1$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

Durum 3.

$$a_0 = -\frac{\sqrt{6}\,\chi\, b_0}{\sqrt{k}},\ a_1 = \frac{2\sqrt{6}\,\chi\, b_0}{\sqrt{k}},\ a_2 = -\frac{2\sqrt{6}\,\chi\, b_0}{\sqrt{k}},\ b_1 = -2b_0,\ \lambda = -\chi\left(1+2\chi^2\right) \quad (3.18)$$

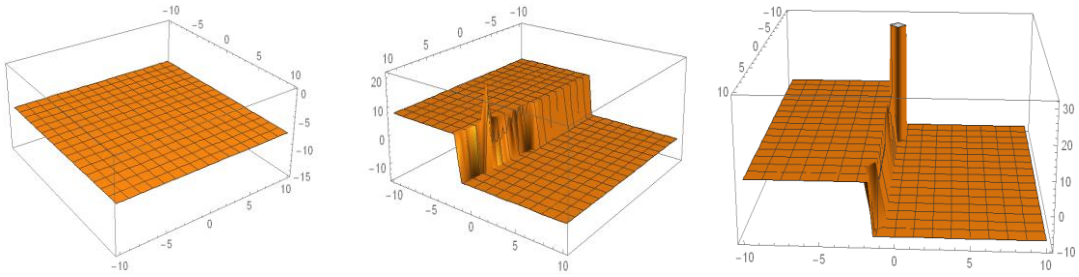
bulunan katsayıları ve $R'_\mu = R^2 - R$ denkleminden elde edilen $R(\mu) = \dfrac{1}{1 \pm e^{\mu}}$ fonksiyonu (3.8) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında

$$\varphi_3(x,t) = \frac{-\sqrt{\frac{6}{k}}\chi b_0 + 2\sqrt{\frac{6}{k}}\chi b_0\left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right) - 2\sqrt{\frac{6}{k}}\chi b_0\left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)^2}{b_0 - 2b_0\left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)} \quad (3.19)$$

bulunur. (3.19) çözümü için basit dönüşümler uygulandığında (3.1) denklemin çözümü

$$\varphi_3(x,t) = -A\left[\tanh\left(\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\left(2\chi^3+\chi\right)}{2\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)+\coth\left(\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\left(2\chi^3+\chi\right)}{2\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)\right] \quad (3.20)$$

elde edilir.



Şekil 3.3. (3.20) çözüm fonksiyonunun $\chi = 3.2,\ k = 1$, ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

Durum 4.

$$a_0 = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}\,\chi b_0}{\sqrt{k}}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = -2b_0, \quad \lambda = -\frac{1}{2}\chi\left(2+\chi^2\right) \tag{3.21}$$

bulunan katsayıları ve $R'_\mu = R^2 - R$ denkleminden elde edilen $R(\mu) = \dfrac{1}{1 \pm e^{\mu}}$ fonksiyonu (3.8) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında

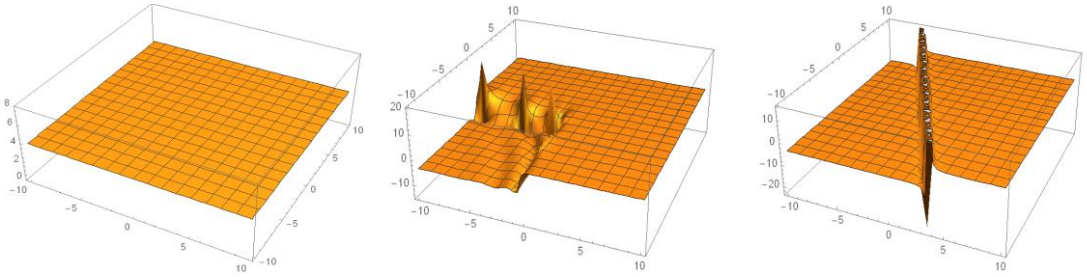
$$\varphi_4(x,t) = \frac{\sqrt{\frac{3}{2k}}\,\chi b_0}{b_0 - 2b_0\left(\frac{1}{1 \pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)} \tag{3.22}$$

bulunur. (3.22) çözümü için basit dönüşümler uygulandığında (3.1) denklemin çözümü

$$\varphi_{4,1}(x,t) = \frac{A}{\tanh\left[\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{4\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]} \tag{3.23}$$

$$\varphi_{4,2}(x,t) = \frac{A}{\coth\left[\frac{\chi}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{4\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]} \tag{3.24}$$

elde edilir.



Şekil 3.4. (3.23) çözüm fonksiyonunun $\chi = 3.2,\ k = 1$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

Durum 5.

$$a_0 = 0,\quad a_1 = \frac{2\sqrt{6}\,\chi\, b_0}{\sqrt{k}},\quad a_2 = -\frac{2\sqrt{6}\,\chi\, b_0}{\sqrt{k}},\ b_1 = -2b_0,\ \ \lambda = \chi\left(-1+\chi^2\right) \tag{3.25}$$

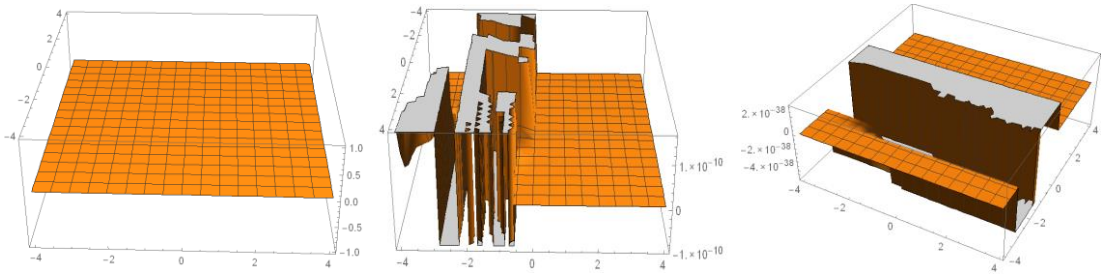
bulunan katsayıları ve $R'_\mu = R^2 - R$ denkleminden elde edilen $R(\mu) = \dfrac{1}{1 \pm e^{\mu}}$ fonksiyonu (3.8) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında

$$\varphi_5(x,t) = \frac{2\sqrt{\frac{6}{k}}\chi\, b_0\left(\dfrac{1}{1\pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}\left(t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)}}\right) - 2\sqrt{\frac{6}{k}}\chi\, b_0\left(\dfrac{1}{1\pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}\left(t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)^{2}}}\right)}{b_0 + 2b_0\left(\dfrac{1}{1\pm e^{\frac{\chi}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\chi}{2\alpha}\left(t+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)}}\right)} \tag{3.26}$$

bulunur. (3.26) çözümü için basit dönüşümler uygulandığında (3.1) denklemin çözümü

$$\varphi_5(x,t) = \frac{\pm A}{\cosh\left[\dfrac{\chi}{2\alpha}\left(x+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\dfrac{\left(2\chi^3+\chi\right)}{2\alpha}\left(t+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\sinh\left[\dfrac{\chi}{2\alpha}\left(x+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\dfrac{\left(2\chi^3+\chi\right)}{2\alpha}\left(t+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]} \tag{3.27}$$

elde edilir.



Şekil 3.5. (3.27) çözüm fonksiyonunun $\chi = 3.2,\ k = 1$ ile $\alpha = 0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

3.2.Atangana Türevi İçeren Simetrik Regüle Edilmiş Uzun Dalga Denklemi ve Uygulaması

Kesirli mertebede türev çeşidi olan Atangana türevi içeren modifiye edilmiş simetrik regüle edilmiş uzun dalga denkleminin(SRLW) en genel hali

$$D_t^{2\alpha}\gamma + D_x^{2\alpha}\gamma + \gamma D_t^{\alpha}\left(D_x^{\alpha}\gamma\right) + D_t^{\alpha}\gamma D_x^{\alpha}\gamma + D_t^{2\alpha}\left(D_x^{2\alpha}\gamma\right) = 0, \quad t > 0,\ 0 < \alpha \le 1 \tag{3.28}$$

şeklindedir [30]. (3.28) denklemi doğrusal olmayan iyon-akustik dalgayı ve uzay yükü dalgalarını tanımlamak için kullanılır. Ayrıca bu denklem matematiksel fiziğin ve uygulamalı matematiğin doğrusal olmayan birçok probleminde ortaya çıkar. Bu denklem ayrıca plazma fiziğinde ses dalgalarını karakterize eder. (3.28) denkleminin genelleştirilmiş Kudryashov yöntemini kullanarak tam çözümlerini elde edebilmek öncelikle hareketli dalga dönüşümü olarak

$$\eta = \frac{k}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} - \frac{w}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} \tag{3.29}$$

alalım.

$\gamma = \gamma(\eta),\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial\eta} = \gamma'$ olmak üzere, (3.28) denklemi

$$2\left(w^2 + k^2\right)\gamma + kw\gamma^2 + 2k^2w^2\gamma'' = 0 \tag{3.30}$$

şeklinde lineer olmayan 2. mertebeden bir adi diferansiyel denklem elde edilir.

(3.30) denkleminin çözümünü (2.6) çözüm fonksiyonu olarak kabul edelim.. Burada balans prosedürü uygulanarak H ve S sayıları belirlenir. (3.30) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev içeren γ'' terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan γ^2 terimleri arasında Genelleştirilmiş Kudryashov yöntemine uygun olarak aşağıdaki şekilde yapılır. (2.8) çözüm fonksiyonundan

$$\gamma = R(\eta)^{H-S} + \ldots \tag{3.31}$$

şeklinde yazıldığından ve balans prosedürünün diğer gerekli terimleri (3.31) bağıntısı kullanarak kısaca

$$\gamma^2 = R(\eta)^{2H-2S} + \ldots \tag{3.32}$$

$$\gamma''(\eta) \cong R(\eta)^{H-S+2} + \ldots \tag{3.33}$$

yazılır. (3.32) ve(3.33) deki terimler $\gamma'' \approx \gamma^2$ balans işlemine tabi tutulduğunda balans terim ifadesi $H = S + 2$ olarak bulunur. Balans teriminde $S = 1$ alındığında, $H = 3$ olur. Bu balans terimleri (2.8) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında (3.28) denklemin tam çözüm fonksiyonunun genel hali

$$\gamma(\eta) = \frac{a_0 + a_1 R + a_2 R^2 + a_3 R^3}{b_0 + b_1 R} \tag{3.34}$$

olarak bulunur. (3.34) çözüm fonksiyonuna göre (3.30) adi denkleminde bulunan γ'' ve γ^2 terimleri

$$\gamma'(\eta) = \frac{M'R'N - MN'R'}{N^2} = \left(R^2 - R\right)\frac{M'N - MN'}{N^2}$$

$$\gamma''(\eta) = \frac{R^2 - R}{B^2}\left[(2R-1)\left(M'N - MN'\right) + \frac{R^2 - R}{N}\left(N\left(M''N - MN''\right) - 2N'M'N + 2MN'^2\right)\right]$$

$$\gamma'''(\eta)=\left(R^2-R\right)^3\left[\frac{\left(M'''N-MN'''-3M''N'-3N''M'\right)N+6N\left(MN''+N'M'\right)}{N^3}\right]$$
$$+3\left(R^2-R\right)^2\left(2R-1\right)\left[\frac{N\left(M''N-MN''\right)-2N'M'N+2MN'^2}{N^3}\right]$$
$$+\left(R^2-R\right)\left(6R^2-6R+1\right)\left[\frac{M'N-MN'}{N^2}\right]$$
$$\vdots \tag{3.35}$$

şeklinde hesaplanır. Hesaplanan değerler daha sonra (3.30) denkleminde yerine yazıldığında $R(\eta)$ fonksiyonuna bağlı bir polinom ifadesi elde edilir. Bulunan polinom sıfır polinomu olarak kabul edilirse ve polinomun katsayıları sıfıra eşitlendiğinde bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen cebirsel sistem Mathematica 10 paket programı yardımıyla ilgili algoritmalara göre çözüldüğünde a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 ve k, w katsayıları bulunur. Bulunan katsayılar (3.28) denkleminin aşağıda yer alan durumlardaki çözümleri için (3.34) çözüm fonksiyonunda yerine yazılarak elde edilmiştir.

Durum 1

$$a_0=0,\ \ a_1=-\frac{12k^2b_0}{\sqrt{-k^2-1}},\ \ a_2=\frac{12k^2\left(b_0-b_1\right)}{\sqrt{-k^2-1}},\ \ a_3=\frac{12k^2b_1}{\sqrt{-k^2-1}},\ \ \omega=-\frac{k}{\sqrt{-k^2-1}} \tag{3.36}$$

bulunan katsayıları ve $R'_\mu=R^2-R$ denkleminden elde edilen $R(\mu)=\frac{1}{1\pm e^\mu}$ fonksiyonu (3.34) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında

$$\varphi_6(x,t)=\frac{\frac{12k^2}{\sqrt{-k^2-1}}\left[\begin{array}{l}-b_0\left(\dfrac{1}{1\mp e^{\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)\\ +\left(b_0-b_1\right)\left(\dfrac{1}{1\mp e^{\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)^2+b_1\left(\dfrac{1}{1\mp e^{\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)^3\end{array}\right]}{b_0+b_1\left(\dfrac{1}{1\mp e^{\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)}$$

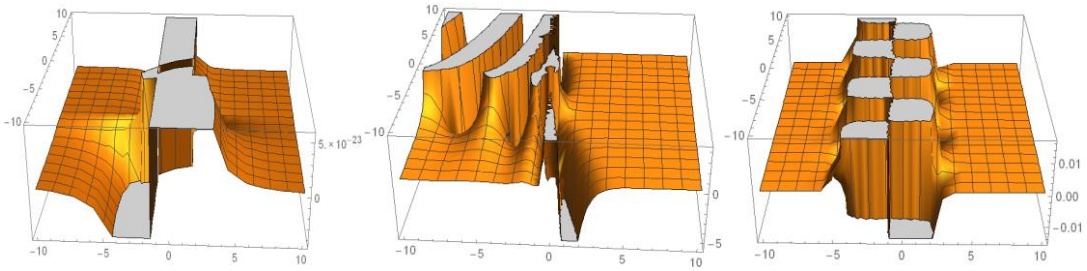
(3.37)

bulunur. (3.37) çözümü için basit dönüşümler uygulandığında (3.28) denklemin çözümü $B=\dfrac{12k^2}{\sqrt{-k^2-1}}$ olmak üzere

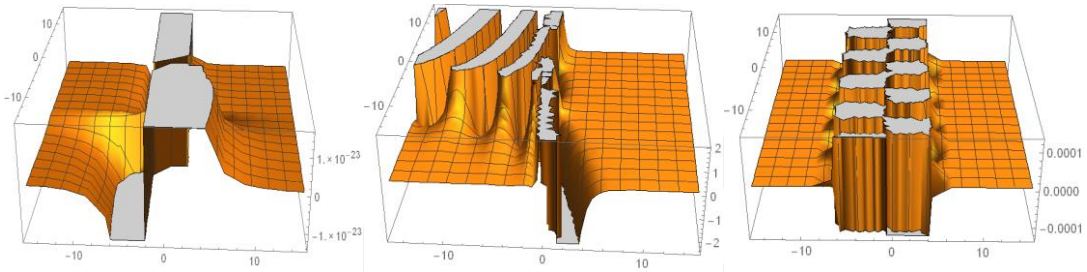
$$\varphi_{6,1}(x,t)=\frac{B}{\cosh^2\left[\dfrac{k}{2\alpha}\left(x+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\dfrac{k}{2\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]} \tag{3.38}$$

$$\varphi_{6,2}(x,t)=\frac{B}{\sinh^2\left[\dfrac{k}{2\alpha}\left(x+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\dfrac{k}{2\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]} \tag{3.39}$$

elde edilir.



Şekil 3.6. (3.38) çözüm fonksiyonunun $k=2.8$ ile $\alpha=0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.



Şekil 3.7. (3.39) çözüm fonksiyonunun $k=2.8$ ile $\alpha=0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

Durum 2

$$a_0=\frac{2k^2b_0}{\sqrt{k^2-1}},\quad a_1=\frac{2k^2\left(-6b_0+b_1\right)}{\sqrt{k^2-1}},\quad a_2=\frac{12k^2\left(b_0-b_1\right)}{\sqrt{k^2-1}},\quad a_3=\frac{12k^2b_1}{\sqrt{k^2-1}},\quad \omega=-\frac{k}{\sqrt{-k^2-1}} \tag{3.40}$$

bulunan katsayıları ve $R'_\mu=R^2-R$ denkleminden elde edilen $R(\mu)=\dfrac{1}{1\pm e^{\mu}}$ fonksiyonu (3.34) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında

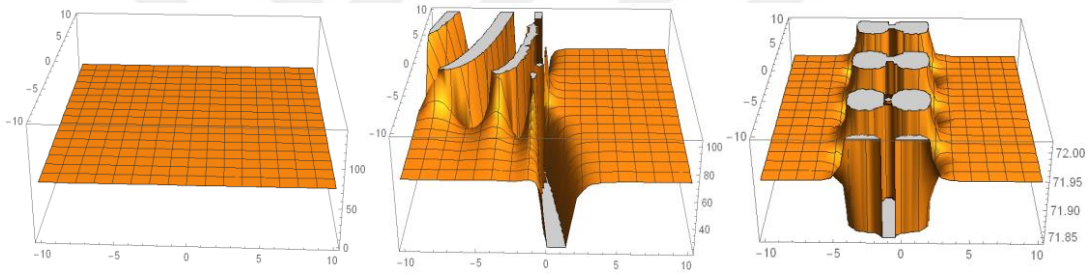
$$\varphi_7(x,t)=\frac{\dfrac{12k^2}{\sqrt{k^2-1}}\left[\dfrac{b_0}{6}-\left(b_0+\dfrac{b_1}{6}\right)\left(-\dfrac{1}{1\mp e^{\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)+\left(b_0-b_1\right)\left(\dfrac{1}{1\mp e^{\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)^2+b_1\left(\dfrac{1}{1\pm e^{\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)^3\right]}{b_0+b_1\left(\dfrac{1}{1\pm e^{\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}}}\right)} \tag{3.41}$$

bulunur. (3.41) çözümü için basit dönüşümler uygulandığında (3.28) denklemin çözümü $C=\dfrac{12k^2}{\sqrt{k^2-1}}$ olmak üzere

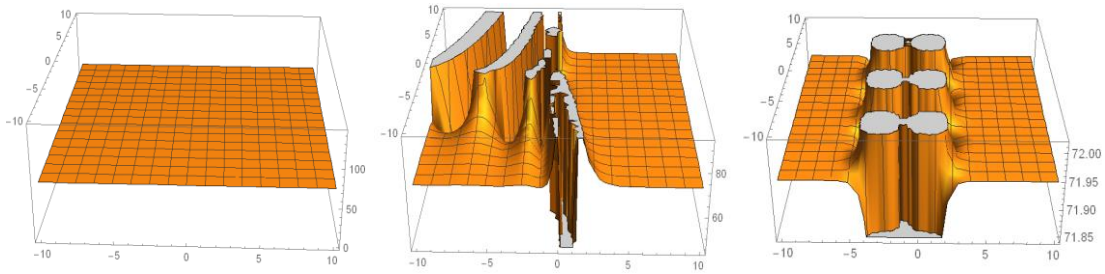
$$\varphi_{7,1}(x,t)=C\left[3\tanh^2\left(\frac{k}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{2\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)-1\right] \quad (3.42)$$

$$\varphi_{7,2}(x,t)=C\left[3\coth^2\left(\frac{k}{2\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k}{2\alpha\sqrt{-k^2-1}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)-1\right] \quad (3.43)$$

elde edilir.



Şekil 3.8. (3.42) çözüm fonksiyonunun $k=2.8$ ile $\alpha=0.05,\ 0.55,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.



Şekil 3.9. (3.43) çözüm fonksiyonunun $k=2.8$ ile $\alpha=0.05,\ 0.55,\ 0.95$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında Atangana türevi içeren kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasına imkân sağlayan etkin bir yöntem sunulmuştur. Birçok fiziksel olayların modellenmesiyle oluşturulan problemlerin anlaşılması sunulan bu yöntemin uygulaması neticesinde elde edilen yeni ve farklı tam çözümler sayesinde olabileceği düşünülmüştür. Uygulanan bu yöntem literatürde var olan Kudryashov yöntemlerinin incelenmesi sonucunda geliştirilmiş ve genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi olarak adlandırılmıştır. Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonu bu yöntem için (2.6) diferansiyel denkleminden çözülerek elde edilen çözüm fonksiyonları temel alınarak (2.7) çözüm fonksiyonu olarak önerilmiştir. Değişik çözümlerin birlikte bulunduğu çözüm fonksiyonlarının bulunması bu sayede elde edilmiştir. Önerilmiş olan çözüm fonksiyonunu (2.3) denkleminde yerine yazmadan önce dengeleme teriminin belirlenmesi gerekmektedir. Bu sayede H sayısı yapılan balans(dengeleme) işlemine göre belirlenir. Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yeni tam çözüm fonksiyonları için belirlenen H değeri (2.7) denkleminde yerine yazılıp ilgili dönüşümler yapıldığında bulunması düşünülmüştür. Geliştirilen bu yöntem Benjamin-Bona-Mahony ve SRLW denklemlerine ayrı ayrı uygulanıp bulduğumuz literatürde yer almayan yeni farklı tam çözümler çeşitli hallerde ifade edilmiştir.

Literatürde bulunmayan yeni tam çözüm fonksiyonları geliştirilen bu yeni yöntem sayesinde elde edilmiştir. Solution dalgaların farklı ve birlikte oldukları karmaşık durumlara gelen bu elde edilen yeni tam çözüm fonksiyonlarıdır. Yeni tam çözüm fonksiyonların daha iyi anlaşılabilir olması için üç boyutlu grafikleri birbirinden farklı ve özel olarak seçilen katsayılara göre çizilmiştir. Çizilen grafiklerin sonucunda fiziksel davranışları hakkında bilgiye sahip olunmuştur. Diğer araştırmacılar dilediği takdirde bu yeni tam çözümlerin fiziksel davranışları incelenebilir. Çizilen bu grafiklerin farklı tam çözüm fonksiyonları farklı solitonlara karşılık geldiği de görülmektedir. Çizilen grafiklerde farklı birçok soliton çeşidin bir arada olduğu solitonlar literatürde var olan çeşitli solitonların

(dark, bright) dışında olan solitonlar gösterilmeye çalışılmıştır. Buna dayanarak fiziksel olayların daha iyi algılanılabileceğini söyleyebiliriz. Daha genel çözüm fonksiyonları oluşturabilmek için (2.7) çözüm fonksiyonunun farklı durumları oluşturulabilir. Buradan da yeni farklı tam çözümlerin elde edilmesine imkân verilebilir.

KAYNAKLAR

1. Podlubny I., Fractional differential equations, Academic Press, San Diego, 1999.

2. Cui, M., Compact finite difference method for the fractional diffusion equation, J. Comput. Phys., 228(20), 7792-7804, 2009.

3. Huang, Q., Huang G., Zhan H., A finite element solution for the fractional Advection–Dispersion equation, Adv. Water Res., 31, 1578-1589 2008.

4. Odibat, Z., Momani, S., Generalized differential transform method for linear partial differential equations of fractional order**,** Appl. Math. Lett., 21(2), 194-199, 2008.

5. El-Sayed, A.M.A., Behiry, S.H., Raslan, W.E., Adomian's decomposition method for solving an intermediate fractional Advection-Dispersion equation, Comput. Math. Appl., 59(5), 1759-1765, 2010.

6. Wu, G.C., Lee, E. W. M., Fractional variational iteration method and its application, Phys. Lett. A, 374(25), 2506-2509, 2010.

7. Ganji, D.D., Sadighi, A., He's homotopy-perturbation method to nonlinear coupled systems of reaction diffusion equations, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 7(4), 413-420, 2006.

8. Atangana, A., Baleanu, D., Alsaedi A., New Properties of conformable derivative, Open Math., 13(1), 1-10, 2015.

9. Zhang, S., Zhang, H. Q., Fractional sub-equation method and its applications to nonlinear fractional PDEs, Phys. Lett. A, 375, 1069-1073, 2011.

10. Wang, M. L., Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations, Phys. Lett. A, 199, 169-172, 1995.

11. Jumarie G., Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions further results, Comput. Math. Appl., 51, 1367-1376, 2006.

12. Jumarie, G., Fractional partial differential equations and modified Riemann-Liouville derivative new methods for solution, J. Appl. Math. Comput., 24, 31-48, 2007.

13. Guo, S., Mei, L., Li, Y., Sun, Y., The improved fractional sub-equation method and its applications to the space-time fractional differential equations in fluid mechanics, Phys. Lett. A, 376, 407-411, 2012.

14. Lu, B., Bäcklund transformation of fractional Riccati equation and its applications to nonlinear fractional partial differential equations, Phys. Lett. A, 376, 2045-2048, 2012.

15. Bin, Z., Qinghua, F., The Jacobi elliptic equation method for solving fractional partial differential equation, Abst. Appl. Analy., 2014, April 23, 2014.

16. Kudryashov, N.A., One method for finding exact solutions of nonlinear differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, 2248-2253, 2012.

17. Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E., The extended trial equation method for some time-fractional differential equations**,** Disc. Dyn. Nature Soc., 2013: Article ID 491359, 13 pages, 2013.

18. Pandir, Y., Gurefe, Y., New exact solutions of the generalized fractional Zakharov-Kuznetsov equations, Life Sci. J., 10(2), 2701–2705, 2013.

19. Demiray, T. S., Pandir, Y., Bulut, H., Generalized Kudryashov method for time-fractional differential equations, Abst. Appl. Analy., 2014, Article ID 901540, 1-13, 2014.

20. Bulut, H., Pandir, Y., Demiray, T. S., Exact solutions of time-fractional KdV equations by using generalized Kudryashov method, Int. J. Model. Opt., 4(4), 315-320, 2014.

21. Pandir, Y., Gürefe, Y., Misirli, E., A new approach to Kudryashov's method for solving some nonlinear physical models, Int. J. Phys. Sci., 7(21), 2860-2866, 2012.

22. Demiray, T. S., Pandir, Y., Bulut, H., The investigation of exact solutions of nonlinear time-fractional Klein-Gordon equation by using generalized Kudryashov method, AIP Conf. Proceed., 1637, 283-289, 2014.

23. Pandir, Y., Sonmezoglu, A., Duzgun, H. H., Turhan, N., Exact solutions of nonlinear Schrödinger's equation by using generalized Kudryashov method, AIP Conf. Proceed., 1648, 370004, 1-5, 2015.

24. Khalil R., Horani, M. A., Yousef, A., Sababheh, M., A new definition of fractional derivatives, J. Comput. Appl. Math., 264, 65-70, 2014.

25. Wadati, M., Sogo, K., Gauge transformations in soliton theory, J. Phys. Soc. Japan, 52(2), 394-398, 1983.

26. Pandir, Y., Demiray, S. T., Bulut, H., A new approach for some NLDEs with variable coefficients, Optik, 127, 11183-11190, 2016.

27. Demiray, S. T., Pandir Y., Bulut, H., New solitary wave solutions of Maccari system, Ocean Eng., 103, 153-159, 2015.

28. Demiray, S. T., Pandir Y., Bulut, H., New soliton solutions for Sasa-Satsuma equation, Waves in Random Complex Media, 25(3), 417-418, 2015.

29. Martinez, H. Y., Aguilar, J.F.G., Atangana, A., First integral method for nonlinear differential equations with conformable derivative, Math. Model. Nat. Phenom. 13, 1-14, 2018.

30. Jebreen, H. B., Some nonlinear fractional PDEs involving β-derivative by using rational $\exp\left(-\Omega\left(\eta\right)\right)$- expansion method, Complexity, 2020, Article ID 9179826, 1-22, 2020.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Yozgat'ta doğan Selami ORHAN ilk ve Orta öğrenimini Cihanpaşa İlk ve Ortaokulu'nda lise öğrenimini Kahramankazan Çok Programlı Lisesi'nde tamamlamıştır. 2011 yılında kazandığı Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2014 yılında Bozok Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde devam ederek 2016 yılında tamamlamıştır. Aynı yıl Bozok Üniversitesinde Pedagojik Formasyon eğitimi alıp 2016 yılında mezun olmuştur. Bir çok özel okul ve milli eğitime bağlı devlet okullarında öğretmenlik yapmıştır. Şuan özel bir kurumda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

2017 yılında yüksek lisans eğitimine Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda başlamıştır.

İletişim Bilgileri:

Telefon: 506 697 88 84

E-posta: sorhan066@gmail.com