

KATLI FOURİER SERİLERİNİN NÖRLUND TOPLANABİLMESİ

MEHMET UÇAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

2020

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KATLI FOURİER SERİLERİNİN NÖRLUND TOPLANABİLMESİ

MEHMET UÇAR

Tez Danışmanı

Doç. Dr. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

YOZGAT - 2020

Her hakkı saklıdır

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İMZA

Mehmet UÇAR

24/12/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KATLI FOURİER SERİLERİNİN NÖRLUND TOPLANABİLMESİ

MEHMET UÇAR

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

Altı bölümden oluşan bu çalışmanın amacı çift Nörlund matrislerinin oldukça geniş sınıfları ile çift Fourier serilerinin herhangi bir noktada toplanabilmesi için yeterli koşulları incelemektir. Bu çalışmada incelenen sonuçlar Y.S.Chow, K.N.Mishra ve P.L.Sharma'nın ilgili çalışmalarının önemli ölçüde genişlemelerini ve genellemelerini oluşturur. Birinci bölümde toplanabilme ve çift katlı Fourier serilerinin bilime katkıları tanıtıldı. İkinci bölümde bu çalışmada kullanılan temel tanımlar ve sonuçlara yer verildi. Üçüncü bölümde çalışmanın sonucunda elde edilen ana sonuçlar ve teoremlere yer verildi. Dördüncü bölümde çalışmada çok önemli bir rol oynayan Nörlund çekirdeğinin oluşturulması incelendi. Beşinci bölümde negatif olmayan ve artmayan çift bir dizi için Fourier serilerinin Nörlund toplanabilir olmasını sağlayan bir teoremin ispatı incelendi. Altıncı bölümde negatif olmayan ve azalmayan çift bir dizi için Fourier serilerinin Nörlund toplanabilir olması ile ilgili bir teoremin ispatı incelendi.

2020, 41 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Çift Fourier Serisi, Nörlund Çekirdeği, Nörlund Toplanabilme

ABSTRACT

MASTER THESIS

SUMMABİLİTY OF DOUBLE FOURİER SERİES BY NÖRLUND METHODS

MEHMET UÇAR

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATİCS

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

The aim of this study, which consists of six chapters, is to examine the sufficient conditions for quite large classes of double Nörlund matrix and double Fourier series to be summed at any point. The results examined in this study constitute significant enlargements and generalizations of the relevant studies of Y.S. Chow, K.N. Mishra and P.L. Sharma. In the first chapter, summability and contributions of double Fourier series to science are introduced. In the second chapter, the basic definitions and results used in this study are given. In the third chapter the main results and theorems obtained as a results of the study are introduced. In the fourth chapter, the formation of the Nörlund kernel, which plays a very vital role in the study, is examined. In the fifth chapter, the proof of a theorem that enables the Nörlund summability of the Fourier series for a nonnegative and nondecreasing series is studied. And finally in the sixth chapter, the proof of a theorem concerning the Nörlund summability of Fourier series for nonnegative and nonincreasing series is examined.

2020, 41 PAGE

KEYWORDS: Double Fourier Series, Nörlund Kernel, Nörlund Summability

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi sırasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen sayın danışman hocam Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na, çalışmalarım sırasında desteğini her zaman hissettiren sevgili eşim Pelin YAZGAN UÇAR'a teşekkür ederim. Bu çalışmayı, bu süreçte dünyaya gelen biricik kızım Duru'ya armağan ediyorum.

Mehmet UÇAR

24/12/2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
ÖNSÖZ iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGELER VE KISALTMALAR v
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL TANIMLAR 3
3. TEMEL TEOREMLER VE SONUÇLAR 6
4. ÇEKİRDEK FONKSİYONUNUN OLUŞTURULMASI 12
5. AZALMAYAN DİZİLERE KARŞILIK GETİRİLEN FOURİER SERİLERİNİN NÖRLUND TOPLANABİLMESİ 23
6. ARTMAYAN DİZİLERE KARŞILIK GETİRİLEN FOURİER SERİLERİNİN NÖRLUND TOPLANABİLMESİ 29
7. SONUÇ 39
8. KAYNAKLAR 40
9. ÖZGEÇMİŞ 41

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\boldsymbol{c_{jk}}$	$f(x,y)$' nin çift Fourier serisinin katsayıları
$\boldsymbol{D_n(v)}$	$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kv)$
$\boldsymbol{\mathcal{F}[f]}$	$f(x,y)$' nin çift Fourier serisi
$\boldsymbol{K_{mn}(u,v)}$	$\frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_{m-j,n-k}\,D_j(u)D_k(v)$
$\boldsymbol{L_{2\pi x2\pi}}$	her değişkende 2π periyotlu ve T^2 torusu üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı
$\boldsymbol{(Llog^{+}L)_{2\pi x2\pi}}$	her değişkende 2π periyotlu ,integrallenebilir logaritmik fonksiyonlarının pozitif parçalarının sınıfı
$\boldsymbol{P_{mn}}$	$\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_{jk}$
$\{\boldsymbol{p_{jk}}\}$	Negatif olmayan çift sayı dizisi
$\boldsymbol{q_{mn}}$	$\frac{1}{P_{mn}}\sum_{k=0}^{n}p_{mk}$
$\boldsymbol{r_{mn}}$	$\frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=0}^{m}p_{jn}$
$\boldsymbol{s_n=O(1)}$	$\{s_n\}$ dizisi sınırlı
$\boldsymbol{s_n=o(1)}$	$\lim_{n\to\infty}s_n=0$
$\boldsymbol{S_{jk}(x,y)}$	$f(x,y)$' nin çift Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi
$\boldsymbol{t_{mn}}$	$\frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_{m-j,n-k}\,s_{jk}$
$\boldsymbol{T^2}$	$\{(x,y)\in R^2:-\pi<x,y\leq\pi\}$
$\boldsymbol{\varphi_{xy}(u,v)}$	$f(x+u,y+v)+f(x-u,y+v)$ $+f(x+u,y-v)+f(x-u,y-v)-4f(x,y)$
$\boldsymbol{\phi_{xy}(s,t)}$	$\int_0^s\int_0^t\lvert\varphi_{xy}(u,v)\rvert dudv \qquad (s,t>0)$
$\boldsymbol{\Delta_{10}p_{jk}}$	$p_{jk}-p_{j+1,k}$
$\boldsymbol{\Delta_{01}p_{jk}}$	$p_{jk}-p_{j,k+1}$
$\boldsymbol{\Delta_{11}p_{jk}}$	$p_{jk}-p_{j+1,k}-p_{j,k+1}+p_{j+1,k+1}$
$\boldsymbol{\phi_{jn}}$	$\phi\left(\frac{\pi}{j},\frac{\pi}{n}\right)$

1.GİRİŞ

Toplanabilme teorisi, analiz adı verilen çok geniş bir matematiksel konu grubuna uyar. Ayrıca sayılar teorisiyle de bağlantıları vardır. G. Hardy ve J. E. Littlewood belki de en tanınmış toplanabilme araştırmacılarıdır. Toplanabilmenin klasik açıklamasına Hardy'nin "Divergence series" adlı eserinden ulaşabiliriz.

Varsayalım ki yakınsak veya ıraksak olan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots$ serisine veya eşdeğer olarak bu serinin kısmi toplamlar dizisine yani, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olmak üzere $S_1, S_2, \ldots$ dizisine sahip olalım. $a_1 + a_2 + \cdots$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $S_1, S_2, \ldots$ eğer s limitine yaklaşırsa, $a_1 + a_2 + \cdots$ serisinin s değerine yakınsamasını belirtmek standarttır.

Bu basit tanım, Zeno'nun bazı paradokslarıyla karakterize edilen sonsuz süreçlerle ilgili bir karışıklığı çözer ancak bu tanım ilerlemek için tek yol değildir.

Örneğin, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \cdots$ serisiyle ilgilendiğimizi varsayalım. Bu seri, iki duvar arasında ileri geri sıçrayan bir topun konumunun açıklamasından kaynaklanabilir veya bu seri $0 < x < 1$ olmak üzere $x \to 1^-$ iken $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ serisinin limitinin ne olacağını hayal etmekten ortaya çıkabilir.

Standart metottan farklı olarak $1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \cdots$ toplamına yaklaşımda kısmi toplamlar yani $(S_n) = 1,0,1,0, \ldots$ dizisinin ilk n elemanının aritmetik ortalamasını düşünürsek $(\rho_n) = \left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k\right) = \begin{cases} \frac{n+2}{2(n+1)} & , \ n \ çiftse \\ \frac{1}{2} & , \ n \ tekse \end{cases}$ olur ve bu ortalama $n \to \infty$ iken $\frac{1}{2}$'ye gider.

Peki bütün bunlar ne işe yarar? Neden toplanabilmeyi inceliyoruz? Çeşitli toplanabilirlik yöntemleri kendi içinde ilginçtir. Onların sınıflandırma, karşılaştırılabilirlikleri ve göreceli güçleri, bir yöntemle toplanabilen ancak başka bir yöntemle toplanamayan serilerin tanımlanmasında veya sınıflandırılmasında etkilidir.

Yavaş yakınsak serilerin verimli toplamının incelenmesinde kullanılır. Bazı yöntemler yavaşça yakınsak bir toplamı belirlemek için çok hızlıdır (belki düzensiz salınımlı seriler). Bazı yöntemler özel problem alanlarında ortaya çıkan serilerle daha iyi çalışır.

Test için reaktif olarak çeşitli yöntemler kullanarak seriyi anlamada yardımcı olur. Bir toplamı belirlemek için güçlü bir yöntem kullanmak yerine, serinin davranışını karakterize etmek için bir dizi zayıf yöntem (pH test şeritleri gibi) kullanılabilir.

Sembolik manipülasyonlar için sağlam bir zemin sağlamak için kullanılabilir. Bazen bir hesaplama, bazı ara ürünlerin riski göz ardı edilerek yapılır. Aşamalarında sonsuzluklar veya diğer yakınsak ifadeler bulunabilir. Sonuç olarak sonsuzluklar iptal edebilir veya türetmenin temel amacı için çerçeve olabilir. Örneğin, bir ifadeyi $1-x$'e bölme, $1+x+x^2+\cdots$ olarak genişletme, terimleri yeniden düzenleyerek toplama ve bazı limitler alma gibi.

Katlı Fourier serilerinin uygulama alanı oldukça geniştir. Temel bilimler ve mühendislik bilimlerindeki problemlerin çözümüne ait çok sayıda uygulamaları vardır. Örneğin; Spektral dönüşüm yöntemi, ele alınan çözümleri, katlı Fourier serisini ortogonal taban fonksiyonlar şeklinde kullanarak kürede sığ su denkleminin çözümüne genişletir. Ayrıca küpte Laplace denkleminin çözümü ve üç boyutlu dalga denkleminin çözümlerine önemli işlevsel katkısı vardır.

Bu çalışmada, Katlı Fourier serilerinin analizdeki önemli uygulaması olarak Nörlund toplanabilmesi incelenmiştir.

2.TEMEL TANIMLAR

Tanım2.1: $\{p_{jk}: j,k = 0,1,2,\dots\}$ negatif olmayan çift sayı dizisi ve $p_{00} > 0$ olsun. Karmaşık sayıların $\{s_{jk}: j,k = 0,1,2,\dots\}$ çift dizisi verilirse bu dizinin Nörlund ortalaması olan t_{mn} aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$t_{mn} = \frac{1}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}\, s_{jk}$$

Burada

$$P_{mn} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{jk} \quad (m,n = 0,1,2,\dots)$$

olarak tanımlıdır.

Eğer $m,n \to \infty$ iken t_{mn} sonlu bir limite yakınsıyorsa $\{s_{jk}\}$ dizisine Nörlund toplanabilirdir denir. Bilindiği üzere Cesâro anlamında toplanabilme $\gamma,\delta > -1$ mertebeli Nörlund toplanabilmenin özel bir halidir (Móricz ve Rhoades,1987).

Tanım2.2: $f(x,y)$ kompleks değerli bir fonksiyon, her değişkende 2π periyodik ve iki boyutlu

$$T^2 = \{(x,y) \in R^2 : -\pi < x,y \leq \pi\}$$

torus üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda $f \in L_{2\pi x 2\pi}$ ile gösterilir ve $f(x,y)$'nin çift Fourier serisi

$$\mathcal{F}[f] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{jk} e^{i(jx+ky)} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$c_{jk} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u,v) e^{-i(ju+kv)} du dv \tag{2.2}$$

dır.

Tanım2.3: Eşitlik 2.1. ile tanımlanan serinin simetrik dikdörtgensel kısmi toplam dizisini göz önüne alalım

$$S_{mn}(x,y) = \sum_{j=-m}^{m} \sum_{k=-n}^{n} c_{jk} e^{i(jx+ky)}$$

$f(x,y)$' nin çift Fourier serisinin Nörlund ortalaması çift $S_{mn}(x,y)$ kısmi toplam dizisi için

$$t_{mn} = \frac{1}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}\, S_{jk}(x,y)$$

şeklinde tanımlanır. Eşitlik 2.2.'den

$$t_{mn} = \frac{1}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u, y+v) \sum_{a=-j}^{j} e^{-iau} \sum_{b=-k}^{k} e^{-ibv}\, dudv$$

$$= \frac{1}{\pi^2 P_{mn}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u, y+v) D_j(u) D_k(v) dudv$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u, y+v) K_{mn}(u,v) dudv \qquad (2.3)$$

elde edilir. Burada

$$K_{mn}(u,v) = \frac{1}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}\, D_j(u) D_k(v) \qquad (2.4)$$

Nörlund Çekirdeği olarak adlandırılır. Ayrıca $D_j(u)$ ve $D_k(v)$, u ve v cinsinden Dirichlet çekirdekleridir.

$$t_{mn}(x,y) - f(x,y) = \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \varphi_{xy}(u,v) K_{mn}(u,v) dudv \qquad (2.5)$$

gösterimi ise eşitlik 2.4.'ün bir sonucu olup burada

$$\varphi_{xy}(u,v) = f(x+u, y+v) + f(x-u, y+v) + f(x+u, y-v) + f(x-u, y-v) - 4f(x,y)$$

dır. Gerçekten,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_{mn}(u,v)dudv = \frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_j(u)D_k(v)dudv$$

$$= \frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}\,\pi^2 = \pi^2$$

olduğundan

$$t_{mn}(x,y) - f(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u,y+v) - f(x,y)]K_{mn}(u,v)dudv$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\{\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi}\int_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0}\int_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\}[f(x+u,y+v) - f(x,y)]\,K_{mn}(u,v)dudv$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+u,y+v) + f(x-u,y+v) + f(x+u,y-v) + f(x-u,y-v)$$

$$- 4f(x,y)]\,K_{mn}(u,v)dudv$$

Çalışmanın ilerleyen kısmında aşağıdaki integral fonksiyonunun çok önemli rolü olduğunu burada belirtmek gerekir:

$$\phi(s,t) = \phi_{xy}(s,t) = \int_{0}^{s}\int_{0}^{t}\left|\varphi_{xy}(u,v)\right|dudv \qquad (s,t>0)$$

3.TEMEL TEOREMLER VE SONUÇLAR

Tanım3.1: $\Delta_{10}p_{jk} = p_{jk} - p_{j+1,k}$ $\Delta_{01}p_{jk} = p_{jk} - p_{j,k+1}$

$$\Delta_{11}p_{jk} = p_{jk} - p_{j+1,k} - p_{j,k+1} + p_{j+1,k+1}$$

olmak üzere her $j,k = 0,1,2,\ldots$ için $\Delta_{10}p_{jk} \leq 0$ ve $\Delta_{01}p_{jk} \leq 0$ ise $\{p_{jk}\}$ dizisi azalmayan olarak adlandırılırken, $\Delta_{10}p_{jk} \geq 0$ ve $\Delta_{01}p_{jk} \geq 0$ ise $\{p_{jk}\}$ dizisi artmayan olarak adlandırılır.

Çalışmanın temel amaçlarından birisi aşağıdaki teoremin ispatını incelemektir:

Teorem3.2: $\{p_{jk}\}$ dizisi $\Delta_{11}p_{jk}$ sabit işaretli ve

$$\frac{(m+1)(n+1)p_{mn}}{P_{mn}} = O(1) \tag{3.1}$$

olacak şekilde azalmayan bir dizi olsun. Eğer $f \in L_{2\pi x 2\pi}$ ve $(x,y) \in T^2$ için

$$\phi_{xy}(s,t) = o(st) \qquad (s,t \to 0) \tag{3.2}$$

$$\phi_{xy}(s,\pi) = O(s) \qquad (s \to 0) \tag{3.3}$$

$$\phi_{xy}(\pi,t) = O(t) \qquad (t \to 0) \tag{3.4}$$

koşulları sağlanıyorsa

$$\lim_{m,n\to\infty} t_{mn}(x,y) = f(x,y) \tag{3.5}$$

dır (Móricz ve Rhoades,1992).

Özellikle $f \in (Llog^{+}L)_{2\pi x 2\pi}$ ise eşitlik 3.5. hemen hemen her $(x,y) \in T^2$ için geçerlidir.

$(C,1,1)$ toplanabilme özel durumunda Teorem3.2'de $\{p_{jk}\}$ üzerine konulan şartlar otomatik olarak sağlanır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç3.3: $f \in L_{2\pi x 2\pi}$, $(x,y) \in T^2$ ve eşitlik 3.2. – eşitlik 3.4. koşulları sağlansın. Bu durumda eşitlik 2.1. ile tanımlanan seri $f(x,y)$ için $(C,1,1)$ toplanabilirdir (Móricz ve Rhoades,1992).

Sonuç 3.3'ün zayıf bir hali Chow (1953) tarafından kanıtlanmıştır.

Bir sonraki teoremde $\{p_{jk}\}$ dizisi artmayan, $\Delta_{11}p_{jk}$ sabit işaretli ve aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde çift bir dizidir.

$$\frac{P_{jn}}{P_{mn}} = o(1) \qquad (j\ sabit), \qquad \frac{P_{mk}}{P_{mn}} = o(1) \qquad (k\ sabit) \tag{3.6}$$

$$\frac{P_{jn}}{P_{1n}} = O(1) \qquad (j\ sabit), \qquad \frac{P_{mk}}{P_{m1}} = O(1) \qquad (k\ sabit) \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{P_{mn}} \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{P_{jk} - P_{j-1,k}}{kP_{jk}} = O(1) \\ \dfrac{1}{P_{mn}} \displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{P_{jk} - P_{j,k-1}}{jP_{jk}} = O(1) \end{cases} \tag{3.8}$$

$$\frac{\log m \log n}{P_{mn}} = O(1) \tag{3.9}$$

Eşitlik 3.7. koşulu sadece kolaylık sağlamak için listelenmiştir. Çünkü herhangi bir artmayan pozitif dizi için eşitlik 3.7. kendiliğinden sağlanır.

Gerçekten j, 0 veya 1 ise $\frac{P_{jn}}{P1n} = O(1)$ olduğu açıktır. $j > 1$ ve sabit olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_{jn=} \sum_{i=0}^{j}\sum_{k=0}^{n} p_{ik} &= \sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{n} p_{ik} + \sum_{i=2}^{j}\sum_{k=0}^{n} p_{ik} \le P_{1n} + \sum_{i=2}^{j}\sum_{k=0}^{n} p_{1k} \\ &= P_{1n} + (j-1)\sum_{k=0}^{n} p_{1k} < P_{1n} + (j-1)\sum_{k=0}^{n} p_{1k} + (j-1)\sum_{k=0}^{n} p_{0k} \\ &= jP_{1n} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{P_{jn}}{P_{1n}} < j$$

olup n'den bağımsız ve j sabit olduğundan sınırlıdır.

Benzer şekilde

$$\frac{P_{mk}}{P_{m1}} < \frac{P_{m1} + (k-1)(\sum_{j=0}^{m} p_{j1} + \sum_{j=0}^{m} p_{j0})}{P_{m1}} = \frac{P_{m1} + (k-1)P_{m1}}{P_{m1}} < k$$

olup m'den bağımsız ve k sabit olduğundan sınırlıdır.

Eşitlik 3.6., eşitlik 3.8. ve eşitlik 3.9 artmayan tüm diziler için sağlanmaz. Örneğin

$$p_{jk} = [(j+1)(j+2)(k+1)(k+2)]^{-1}$$

ise söz konusu koşullar sağlanmaz. Gerçekten

$$P_{mn} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}[(j+1)(j+2)(k+1)(k+2)]^{-1} = \left(1-\frac{1}{m+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

olduğundan j sabit iken

$$\lim_{m\to\infty}\frac{P_{jn}}{P_{mn}} = \lim_{m\to\infty}\frac{1-\frac{1}{j+2}}{1-\frac{1}{m+2}} = 1-\frac{1}{j+2} \neq 0$$

olup eşitlik 3.6. sağlanmaz.

Öte yandan $(m,n) \to (\infty,\infty)$ iken

$$\frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_{jk}-P_{j-1,k}}{kP_{jk}} = \frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(j+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{(j+1)(j+2)}\ln(n+1)$$
$$= \frac{\ln(n+1)}{\left(1-\frac{1}{n+2}\right)}\left(\frac{m}{2m+2}\right) \to \infty$$

olur. Yani eşitlik 3.8. sağlanmaz ve son olarak yine $(m,n) \to (\infty,\infty)$ iken

$$\frac{\log m \log n}{P_{mn}} = \frac{\log m \log n}{\left(1-\frac{1}{m+2}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)} \to \infty$$

olacağından eşitlik 3.9. şartı sağlanmaz.

Eğer $\{p_{jk}\}$ iki artmayan sıradan dizinin Kronecker çarpımı ise yani

$$p_{jk} = p_j^{(1)}.p_k^{(2)} \qquad (j,k = 0,1,2,\dots) \tag{3.10}$$

ise bu durumda $\Delta_{11}p_{jk} \geq 0$ ve

$$\frac{\log m}{\sum_{j=0}^{m}p_j^{(1)}} = O(1) \qquad ; \qquad \frac{\log n}{\sum_{k=0}^{n}p_k^{(2)}} = O(1) \tag{3.11}$$

koşulları eşitlik 3.6., eşitlik 3.8. ve eşitlik 3.9 koşullarını gerektirir. Gerçekten j sabit ve $m \to \infty$ iken

$$\frac{P_{jn}}{P_{mn}} = \frac{\sum_{i=0}^{j}\sum_{k=0}^{n} p_{ik}}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{ik}} = \frac{\sum_{i=0}^{j} p_i^{(1)}}{\log m}\,\frac{\log m}{\sum_{i=0}^{m} p_i^{(1)}} = \frac{O(1)}{\log m} = o(1)$$

ve $(m,n) \to (\infty,\infty)$ iken

$$\frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_{jk}-P_{j-1,k}}{kP_{jk}} = \frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sum_{i=0}^{j} p_i^{(1)} - \sum_{i=0}^{j-1} p_i^{(1)}}{k\sum_{i=0}^{j} p_i^{(1)}} \le \frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_j^{(1)}}{k\sum_{i=0}^{j} p_j^{(1)}}$$

$$= \frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{j+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < \frac{\ln(m+1)}{\log m}\,\frac{(1+\ln n)}{\log n}\,\frac{\log m}{\sum_{j=0}^{m} p_j^{(1)}}\,\frac{\log n}{\sum_{k=0}^{n} p_k^{(2)}}$$

$$= O(1)$$

Son olarak

$$\frac{\log m \log n}{P_{mn}} = \frac{\log m}{\sum_{j=0}^{m} p_j^{(1)}}.\frac{\log n}{\sum_{k=0}^{n} p_k^{(2)}} = O(1)$$

elde edilir.

Çalışmada ispatı incelenecek olan diğer önemli teorem aşağıdadır:

Teorem3.4: $\{p_{jk} \ge 0 : j,k = 0,1,2,\dots\}$ dizisi artmayan, $\Delta_{11}p_{jk}$ sabit işaretli ve eşitlik 3.6. – eşitlik 3.9. koşullarını sağlayan bir dizi olsun. Eğer $f \in L_{2\pi x 2\pi}$ ve $(x,y) \in T^2$ için

$$\phi_{xy}(s,t) = o\left(\frac{st}{P_{\sigma\tau}}\right) \qquad (s,t \to 0) \tag{3.12}$$

$$\phi_{xy}(s,\pi) = O\left(\frac{s}{P_{\sigma 1}}\right) \qquad (s \to 0) \tag{3.13}$$

$$\phi_{xy}(\pi,t) = O\left(\frac{t}{P_{1\tau}}\right) \qquad (t \to 0) \tag{3.14}$$

koşulları sağlanıyorsa eşitlik 2.5. sağlanır. Burada

$$\sigma = \left[\!\left[\frac{\pi}{s}\right]\!\right] \qquad ; \qquad \tau = \left[\!\left[\frac{\pi}{t}\right]\!\right] \tag{3.15}$$

olup $[\![.]\!]$ tam kısmı göstermektedir (Móricz ve Rhoades,1992).

Hakemler tarafından ispatında hatalar olduğu belirtilmesine rağmen eşitlik 3.10. özel şartı altında Teorem3.4 esas olarak Mishra (1985) tarafından ifade edildi. Mishra $P_{\sigma\tau}$

yerine pozitif, azalmayan $\psi^{(r)}(t)$ $(r = 1,2)$ fonksiyonlarının integral olarak ifade edilen belirli büyüme koşullarına tabi olduğunu tanıttı. Bu çalışmada ispatta genellikle kısmi toplamlara güvenilirken Mishra kısmi integrasyon uygulamıştır.

Eğer eşitlik 3.10.'da

$$p_j^{(1)} = \frac{1}{j+1}, \qquad p_k^{(2)} = \frac{1}{k+1} \qquad (j,k = 0,1,2,\dots)$$

seçilirse elde edilen Nörlund toplanabilme metoduna çift harmonik toplanabilme metodu denir. Bu durumda eşitlik 3.11. şartı sağlanır ve eşitlik 3.12 – eşitlik 3.14. şartları

$$\phi_{xy}(s,t) = o\left(\frac{st}{\log(1/s)\log(1/t)}\right) \qquad (s,t \to 0) \tag{3.16}$$

$$\phi_{xy}(s,\pi) = O\left(\frac{s}{\log(1/s)}\right) \qquad (s \to 0) \tag{3.17}$$

$$\phi_{xy}(\pi,t) = O\left(\frac{t}{\log(1/t)}\right) \qquad (t \to 0) \tag{3.18}$$

şartlarına dönüşür. Gerçekten $m,n \to \infty$ için

$$p_{jk} = p_j^{(1)}.p_k^{(2)} = \frac{1}{(j+1)(k+1)}$$

iken

$$\frac{\log m}{\sum_{j=0}^{m} p_j^{(1)}} = \frac{\log m}{\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j+1}} < \frac{\log m}{\ln(m+2)} = O(1)$$

$$\frac{\log n}{\sum_{k=0}^{n} p_k^{(2)}} = \frac{\log n}{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}} < \frac{\log n}{\ln(n+2)} = O(1)$$

olup eşitlik 3. 11. şartı sağlanır. Ayrıca

$$P_{\sigma\tau} = \sum_{j=0}^{\sigma}\sum_{k=0}^{\tau} \frac{1}{(j+1)(k+1)} = \sum_{j=0}^{[\![\frac{\pi}{s}]\!]} \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^{[\![\frac{\pi}{t}]\!]} \frac{1}{k+1} = O\left(\log\frac{1}{s}\log\frac{1}{t}\right)$$

olduğundan $s,t \to 0$ iken

$$\phi_{xy}(s,t) = o\left(\frac{st}{P_{\sigma\tau}}\right) = o\left(\frac{st}{\log\frac{1}{s}\log\frac{1}{t}}\right)$$

$$\phi_{xy}(s,\pi) = O\left(\frac{s}{P_{\sigma 1}}\right) = O\left(\frac{s}{\log\frac{1}{s}}\right)$$

$$\phi_{xy}(\pi,t) = O\left(\frac{t}{P_{1\tau}}\right) = O\left(\frac{t}{\log\frac{1}{t}}\right)$$

elde edilir.

Sonuç3.5: Eğer $f \in L_{2\pi x 2\pi}$ ve $(x,y) \in T^2$ için eşitlik 3.16. – eşitlik 3.18. koşulları sağlanıyorsa bu durumda

$$\lim_{(m,n)\to\infty} \frac{1}{\log m \log n} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{S_{m-j,n-k}(x,y)}{(j+1)(k+1)} = f(x,y)$$

dır (Sharma,1958).

Sonuç 3.5, Sharma (1958) tarafından ispatlanmıştır.

4.ÇEKİRDEK FONKSİYONUNUN OLUŞTURULMASI

v cinsinden Dirichlet çekirdeği

$$D_n(v) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kv) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)v}{2sin\frac{v}{2}} & , \quad v \neq 2m\pi, m\epsilon\mathbb{Z} \\ n+\dfrac{1}{2} & , \quad v = 2m\pi, m\epsilon\mathbb{Z} \end{cases} \tag{4.1}$$

olduğundan $n = 0,1,2,\ldots$ ve her v için

$$|D_n(v)| = \left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kv)\right| \leq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} |\cos(kv)| \leq n + \frac{1}{2} < n+1 \tag{4.2}$$

olur.

Öte yandan $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$ için $\frac{\sin u}{u} \geq \frac{2}{\pi}$ eşitsizliğini kullanarak $0 < u \leq \pi$ ve

$a, b = 0,1,2,\ldots$ $(a \leq b)$ için

$$\left|\sum_{n=a}^{b} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right| = \left|\frac{\cos au - \cos(b+1)u}{2\sin\frac{u}{2}}\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{u}{2}} \leq \frac{\pi}{u} \tag{4.3}$$

elde edilir. Eşitlik 4.1 ve 4.3.'ü kullanarak $0 < u \leq \pi$ ve $a, b = 0,1,2,\ldots$ $(a \leq b)$ için

$$\left|\sum_{n=a}^{b} D_n(u)\right| = \left|\sum_{n=a}^{b}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku)\right]\right| = \left|\sum_{n=a}^{b} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2sin\frac{u}{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{\cos au - \cos(b+1)u}{4\sin^2\frac{u}{2}}\right| \leq \frac{1}{2\sin^2\frac{u}{2}} \leq \frac{\pi^2}{2u^2} \tag{4.4}$$

elde edilir.

Lemma4.1: $\{p_{jk} > 0 : j,k = 0,1,\ldots\}$ dizisi $\Delta_{11}p_{jk}$ sabit işaretli olmak üzere azalmayan çift bir dizi olsun. Bu durumda

$$|K_{mn}(u,v)| \leq \begin{cases} (m+1)(n+1) & , \quad \forall u,v \\ O(1)\dfrac{(n+1)}{P_{mn}u^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{mk} & , \quad 0 < u \leq \pi\,, \forall v \\ O(1)\dfrac{(m+1)}{P_{mn}v^2}\displaystyle\sum_{j=1}^{m} p_{jn} & , \quad 0 < v \leq \pi\,, \forall u \\ O(1)\dfrac{p_{mn}}{P_{mn}u^2v^2} & , \quad 0 < u,v \leq \pi \end{cases}$$

dır (Móricz ve Rhoades,1987).

İspat: Her u, v için eşitlik 4.2.'den

$$\begin{aligned} |K_{mn}(u,v)| &= \left| \frac{1}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}\, D_j(u) D_k(v) \right| \\ &\leq \frac{1}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}\, \left|D_j(u)\right| |D_k(v)| \\ &\leq \frac{1}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}\, (j+1)(k+1) \\ &\leq \frac{(m+1)(n+1)}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k} = (m+1)(n+1) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\{p_{jk}\}$ dizisinin monotonluğunun kullanılmadığını belirtmek gerekir.

Her v ve $0 < u \leq \pi$ için

$$|K_{mn}(u,v)| \leq \frac{1}{P_{mn}} \sum_{k=0}^{n} (k+1) \left| \sum_{j=0}^{m} p_{m-j,n-k}\, D_j(u) \right|$$

yazılabilir. Burada her k için Abel dönüşümü uygulanıp iç toplam aşağıdaki gibi düzenlenerek eşitlik 4.4 göz önüne alınırsa

$$\left| \sum_{j=0}^{m} p_{m-j,n-k}\, D_j(u) \right| = \left| \sum_{j=0}^{m} p_{m-j,n-k} \left(\sum_{a=0}^{j} D_a(u) - \sum_{a=0}^{j-1} D_a(u) \right) \right|$$

$$= \left| \sum_{j=0}^{m} p_{m-j,n-k} \sum_{a=0}^{j} D_a(u) - \sum_{j=0}^{m} p_{m-j,n-k} \sum_{a=0}^{j-1} D_a(u) \right|$$

$$= \left| p_{0,n-k} \sum_{a=0}^{m} D_a(u) - \sum_{j=1}^{m} (p_{m-j,n-k} - p_{m-j+1,n-k}) \sum_{a=0}^{j-1} D_a(u) \right|$$

$$\leq p_{0,n-k} \left| \sum_{a=0}^{m} D_a(u) \right| + \sum_{j=1}^{m} |\Delta_{10} p_{m-j,n-k}| \left| \sum_{a=0}^{j-1} D_a(u) \right|$$

$$\leq \left(p_{0,n-k} + \sum_{j=1}^{m} |\Delta_{10} p_{m-j,n-k}| \right) \frac{\pi^2}{2u^2}$$

elde edilir. $\{p_{jk}\}$ dizisi azalmayan olduğundan $\Delta_{10} p_{m-j,n-k} \leq 0$ olduğunu dikkate alarak

$$|K_{mn}(u,v)| \leq \frac{1}{P_{mn}} \sum_{k=0}^{n} (k+1) \left[\left(p_{0,n-k} - \sum_{j=1}^{m} \Delta_{10} p_{m-j,n-k} \right) \frac{\pi^2}{2u^2} \right]$$

$$\leq \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{P_{mn} u^2} \sum_{k=0}^{n} (k+1) \left[\left(p_{0,n-k} - \sum_{j=1}^{m} (p_{m-j,n-k} - p_{m-j+1,n-k}) \right) \right]$$

$$\leq \frac{\pi^2}{2} \frac{(n+1)}{P_{mn} u^2} \sum_{k=0}^{n} [p_{0,n-k} + p_{m,n-k} - p_{0,n-k}] \leq \frac{\pi^2}{2} \frac{(n+1)}{P_{mn} u^2} \sum_{k=0}^{n} p_{mk}$$

elde edilir.

Her u ve $0 < v \leq \pi$ için tamamen simetrik olarak

$$|K_{mn}(u,v)| \leq \frac{1}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m} (j+1) \left| \sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k} D_k(v) \right|$$

$$\leq \frac{1}{P_{mn}} \sum_{j=0}^{m} (j+1) \left[\left(p_{m-j,0} - \sum_{k=1}^{n} \Delta_{01} p_{m-j,n-k} \right) \frac{\pi^2}{2v^2} \right]$$

$$\leq \frac{\pi^2}{2} \frac{(m+1)}{P_{mn} v^2} \sum_{j=0}^{m} [p_{m-j,0} + p_{m-j,n} - p_{m-j,0}] \leq \frac{\pi^2}{2} \frac{(m+1)}{P_{mn} v^2} \sum_{j=0}^{m} p_{jn}$$

Son olarak her $0 < u, v \leq \pi$ için

$$P_{mn}|K_{mn}(u,v)| = \left|\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k} D_j(u) D_k(v)\right|$$

ifadesine double Abel dönüşümü uygulayarak düzenleyip

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k} D_j(u) D_k(v) &= \sum_{j=0}^{m} D_j(u)\left\{\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}\left(\sum_{b=0}^{k} D_b(v) - \sum_{b=0}^{k-1} D_b(v)\right)\right\} \\ &= \sum_{j=0}^{m} D_j(u)\left\{p_{m-j,0}\sum_{b=0}^{n} D_b(v) - \sum_{k=1}^{n}\Delta_{01} p_{m-j,n-k}\sum_{b=0}^{k-1} D_b(v)\right\} \\ &= T_1 - T_2 \qquad (4.5)\end{aligned}$$

dersek

$$\begin{aligned}T_1 = \sum_{j=0}^{m} D_j(u)\, p_{m-j,0}\sum_{b=0}^{n} D_b(v) &= \sum_{b=0}^{n} D_b(v)\left\{\sum_{j=0}^{m} p_{m-j,0}\left(\sum_{a=0}^{j} D_a(u) - \sum_{a=0}^{j-1} D_a(u)\right)\right\} \\ &= \sum_{b=0}^{n} D_b(v)\left\{p_{00}\sum_{a=0}^{m} D_a(u) - \sum_{j=1}^{m}\Delta_{10} p_{m-j,0}\sum_{a=0}^{j-1} D_a(u)\right\} \\ &= p_{00}\sum_{b=0}^{n} D_b(v)\sum_{a=0}^{m} D_a(u) - \sum_{b=0}^{n} D_b(v)\sum_{j=1}^{m}\Delta_{10} p_{m-j,0}\sum_{a=0}^{j-1} D_a(u)\end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned}T_2 &= \left\{\sum_{j=0}^{m} D_j(u)\sum_{k=1}^{n}\Delta_{01} p_{m-j,n-k}\right\}\sum_{b=0}^{k-1} D_b(v) \\ &= \left\{\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n}\Delta_{01} p_{m-j,n-k}\left(\sum_{a=0}^{j} D_a(u) - \sum_{a=0}^{j-1} D_a(u)\right)\right\}\sum_{b=0}^{k-1} D_b(v) \\ &= \left\{\sum_{k=1}^{n}\Delta_{01} p_{0,n-k}\sum_{a=0}^{m} D_a(u)\right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\left(\Delta_{01} p_{m-j,n-k} - \Delta_{01} p_{m-j+1,n-k}\right)\sum_{a=0}^{j-1} D_a(u)\right\}\sum_{b=0}^{k-1} D_b(v)\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Delta_{01} p_{0,n-k} \sum_{a=0}^{m} D_a(u) \sum_{b=0}^{k-1} D_b(v) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{11} p_{m-j,n-k} \sum_{a=0}^{j-1} D_a(u) \sum_{b=0}^{k-1} D_b(v)$$

elde edilir. T_1 ve T_2'yi eşitlik 4.5.'te yerine yazıp $\{p_{jk}\}$'nın azalmayan olduğunu ve eşitlik 4.4.'ü göz önünde bulundurarak

$$P_{mn}|K_{mn}(u,v)|$$

$$\leq \left| p_{00} \sum_{b=0}^{n} D_b(v) \sum_{a=0}^{m} D_a(u) \right| + \left| \sum_{j=1}^{m} \Delta_{10} p_{m-j,0} \sum_{a=0}^{j-1} D_a(u) \sum_{b=0}^{n} D_b(v) \right|$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{n} \Delta_{01} p_{0,n-k} \sum_{a=0}^{m} D_a(u) \sum_{b=0}^{k-1} D_b(v) \right|$$

$$+ \left| \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{11} p_{m-j,n-k} \sum_{a=0}^{j-1} D_a(u) \sum_{b=0}^{k-1} D_b(v) \right|$$

$$\leq \frac{\pi^4}{4u^2v^2} \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left| \Delta_{11} p_{m-j,n-k} \right| - \sum_{j=1}^{m} \Delta_{10} p_{m-j,0} - \sum_{k=1}^{n} \Delta_{01} p_{0,n-k} + p_{00} \right]$$

$$= \frac{\pi^4}{4u^2v^2} \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left| \Delta_{11} p_{m-j,n-k} \right| + p_{m0} + p_{0n} - p_{00} \right]$$

elde edilir. $\Delta_{11} p_{m-j,n-k} \geq 0$ ise

$$P_{mn}|K_{mn}(u,v)| \leq \frac{\pi^4}{4u^2v^2} \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{11} p_{m-j,n-k} + p_{m0} + p_{0n} - p_{00} \right]$$

$$= \frac{\pi^4}{4u^2v^2} \left[\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left(\Delta_{10} p_{m-j,n-k} - \Delta_{10} p_{m-j,n-k+1} \right) + p_{m0} + p_{0n} - p_{00} \right]$$

$$= \frac{\pi^4}{4u^2v^2} \left[\sum_{j=1}^{m} \left(\Delta_{10} p_{m-j,0} - \Delta_{10} p_{m-j,n} \right) + p_{m0} + p_{0n} - p_{00} \right] = \frac{\pi^4}{4} \frac{p_{mn}}{u^2v^2}$$

bulunur. Eğer $\Delta_{11} p_{m-j,n-k} \leq 0$ ise

$$P_{mn}|K_{mn}(u,v)| \leq \frac{\pi^4}{4u^2v^2}\left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} -\Delta_{11}p_{m-j,n-k} + p_{m0} + p_{0n} - p_{00}\right]$$

$$= \frac{\pi^4}{4u^2v^2}(2p_{m0} + 2p_{0n} - p_{mn} - 2p_{00}) \leq \frac{\pi^4}{4u^2v^2}(3p_{mn} - 2p_{00})$$

$$\leq \frac{3\pi^4}{4}\frac{p_{mn}}{u^2v^2}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma4.2: $\{p_{jk} > 0 : j,k = 0,1,\ldots\}$ dizisi $\Delta_{11}p_{jk}$ sabit işaretli olmak üzere artmayan bir dizi olsun. $[\![.]\!]$ tam kısmı olmak üzere $\sigma = \left[\!\left[\frac{1}{u}\right]\!\right]$ ve $\tau = \left[\!\left[\frac{1}{v}\right]\!\right]$ olsun. Bu durumda

$$|K_{mn}(u,v)| \leq \begin{cases} (m+1)(n+1) & , \quad \forall u,v \\ O(1)\dfrac{(n+1)P_{\sigma n}}{uP_{mn}} & , \quad 0 < u \leq \pi\,, \forall v \\ O(1)\dfrac{(m+1)P_{m\tau}}{vP_{mn}} & , \quad 0 < v \leq \pi\,, \forall u \\ O(1)\dfrac{P_{\sigma\tau}}{uvP_{mn}} & , \quad 0 < u,v \leq \pi \end{cases}$$

dır (Móricz ve Rhoades,1987).

İspat: Lemma 4.1'in ispatında olduğu gibi $\{p_{jk}\}$ için herhangi bir monotonluk şartı aranmaksızın her u,v için

$$|K_{mn}(u,v)| \leq (m+1)(n+1)$$

olur. $0 < u \leq \frac{\pi}{2}$ için $\frac{\sin u}{u} \geq \frac{2}{\pi}$ olduğundan $0 < u \leq \pi$ için

$$\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{2\sin\frac{u}{2}} \leq \frac{\pi}{2u} \tag{4.6}$$

olur. Eşitlik 4.1., eşitlik 4.2. ve eşitlik 4.6.'yı kullanarak her v ve $0 < u \leq \pi$ için

$$P_{mn}|K_{mn}(u,v)| = \left|\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} p_{m-j,n-k}D_j(u)D_k(v)\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}(k+1)\left|\sum_{j=0}^{m} p_{m-j,n-k}\frac{\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)u}{2sin\frac{u}{2}}\right|$$

$$\leq \frac{\pi}{2u}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\left|\sum_{j=0}^{m}p_{j,n-k}\sin\left(m-j+\frac{1}{2}\right)u\right|$$

$$\leq \frac{\pi}{2u}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\left\{\sum_{j=0}^{\sigma}p_{j,n-k}\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{j=\sigma+1}^{m}p_{j,n-k}\sin\left(m-j+\frac{1}{2}\right)u\right|\right\} \qquad (4.7)$$

yazılabilir. Burada Abel dönüşümü uygulayıp; eşitlik 4.3.'ü, $\{p_{jk}\}$ dizisi artmayan olduğundan $\Delta_{10}p_{j,n-k}\geq 0$ ve $\sigma=\left[\!\left[\frac{1}{u}\right]\!\right]\Rightarrow \sigma\leq\frac{1}{u}<\sigma+1$ olduğunu dikkate alarak

$$\left|\sum_{j=\sigma+1}^{m}p_{j,n-k}\sin\left(m-j+\frac{1}{2}\right)u\right|$$

$$=\left|\sum_{j=\sigma+1}^{m}p_{j,n-k}\left(\sum_{l=\sigma+1}^{j}\sin\left(m-l+\frac{1}{2}\right)u-\sum_{l=\sigma+1}^{j-1}\sin\left(m-l+\frac{1}{2}\right)u\right)\right|$$

$$\leq p_{m,n-k}\left|\sum_{l=\sigma+1}^{m}\sin\left(m-l+\frac{1}{2}\right)u\right|$$

$$+\sum_{j=\sigma+1}^{m-1}\left|\Delta_{10}p_{j,n-k}\right|\left|\sum_{l=\sigma+1}^{j}\sin\left(m-l+\frac{1}{2}\right)u\right|$$

$$\leq \frac{\pi}{u}\left\{p_{m,n-k}+\sum_{l=\sigma+1}^{m-1}\left(p_{j,n-k}-p_{j+1,n-k}\right)\right\}<\pi(\sigma+1)p_{\sigma+1,n-k}$$

$$=\pi\sum_{j=0}^{\sigma}p_{\sigma+1,n-k}\leq\pi\sum_{j=0}^{\sigma}p_{j,n-k}$$

elde edilir. Bu sonucu eşitlik 4.7.'de yerine yazarak

$$P_{mn}|K_{mn}(u,v)|\leq\frac{\pi}{2u}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\left\{\sum_{j=0}^{\sigma}p_{j,n-k}+\pi\sum_{j=0}^{\sigma}p_{j,n-k}\right\}$$

$$=\frac{\pi(\pi+1)}{2u}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\sum_{j=0}^{\sigma}p_{j,n-k}\leq\frac{\pi(\pi+1)(n+1)}{2u}\sum_{j=0}^{\sigma}\sum_{k=0}^{n}p_{j,n-k}$$

$$= \frac{\pi(\pi+1)}{2}\frac{(n+1)P_{\sigma n}}{u}$$

elde edilir.

Tamamen simetrik olarak her u ve $0 < v \leq \pi$ için

$$P_{mn}|K_{mn}(u,v)| \leq \frac{\pi}{2v}\sum_{j=0}^{m}(j+1)\left\{\sum_{k=0}^{\tau}p_{m-j,k} + \left|\sum_{k=\tau+1}^{n}p_{m-j,k}\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)v\right|\right\}$$

$$\leq \frac{\pi}{2v}\sum_{j=0}^{m}(j+1)\left\{\sum_{k=0}^{\tau}p_{m-j,k} + \pi\sum_{k=0}^{\tau}p_{m-j,k}\right\}$$

$$\leq \frac{\pi(\pi+1)(m+1)}{2v}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{\tau}p_{m-j,k} = \frac{\pi(\pi+1)}{2}\frac{(m+1)P_{m\tau}}{v}$$

Son olarak her $0 < u, v \leq \pi$ için eşitlik 4.1. ve eşitlik 4.6.'dan aşağıdaki sonucu buluruz:

$$P_{mn}|K_{mn}(u,v)| = \left|\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_{jk}D_{m-j}(u)D_{n-k}(v)\right|$$

$$\leq \frac{\pi^2}{4uv}\left|\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_{jk}\sin\left(m-j+\frac{1}{2}\right)u\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)v\right|$$

$$\leq \frac{\pi^2}{4uv}\left\{P_{\sigma\tau} + \sum_{k=0}^{\tau}\left|\sum_{j=\sigma+1}^{m}p_{jk}\sin\left(m-j+\frac{1}{2}\right)u\right|\right.$$

$$+\sum_{j=0}^{\sigma}\left|\sum_{k=\tau+1}^{n}p_{jk}\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)v\right|$$

$$\left.+\left|\sum_{j=\sigma+1}^{m}\sum_{k=\tau+1}^{n}p_{jk}\sin\left(m-j+\frac{1}{2}\right)u\sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)v\right|\right\}$$

$$= \frac{\pi^2}{4uv}(P_{\sigma\tau} + A_1 + A_2 + A_3) \tag{4.8}$$

olsun. A_1 için Abel dönüşümü uygulayıp eşitlik 4.3.'ü, $\sigma = \left[\!\left[\frac{1}{u}\right]\!\right]$ ve $\{p_{jk}\}$ dizisinin artmayan olduğunu göz önüne alarak

$$A_1 = \sum_{k=0}^{\tau} \left| \sum_{j=\sigma+1}^{m} p_{jk} \left(\sum_{l=\sigma+1}^{j} \sin\left(m-l+\frac{1}{2}\right)u - \sum_{l=\sigma+1}^{j-1} \sin\left(m-l+\frac{1}{2}\right)u \right) \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\tau} \left\{ p_{mk} \left| \sum_{l=\sigma+1}^{m} \sin\left(m-l+\frac{1}{2}\right)u \right| \right.$$

$$\left. + \sum_{j=\sigma+1}^{m-1} \left|\Delta_{10} p_{jk}\right| \left| \sum_{l=\sigma+1}^{j} \sin\left(m-l+\frac{1}{2}\right)u \right| \right\}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\tau} \left\{ \frac{\pi}{u} \left(p_{mk} + \sum_{j=\sigma+1}^{m-1} p_{jk} - p_{j+1,k} \right) \right\} \leq \sum_{k=0}^{\tau} \pi(\sigma+1) p_{\sigma+1,k}$$

$$= \pi \sum_{j=0}^{\sigma} \sum_{k=0}^{\tau} p_{\sigma+1,k} \leq \pi P_{\sigma\tau} \qquad (4.9)$$

elde edilir. A_1'in ispatına benzer şekilde simetrik olarak

$$A_2 = \sum_{j=0}^{\sigma} \left| \sum_{k=\tau+1}^{n} p_{jk} \sin\left(n-k+\frac{1}{2}\right)v \right|$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\sigma} \left\{ p_{jn} \left| \sum_{l=\tau+1}^{n} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right| \right.$$

$$\left. + \sum_{k=\tau+1}^{n-1} \left|\Delta_{01} p_{jk}\right| \left| \sum_{l=\tau+1}^{k} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right| \right\} \leq \pi \sum_{j=0}^{\sigma} \sum_{k=0}^{\tau} p_{j,\tau+1}$$

$$\leq \pi P_{\sigma\tau} \qquad (4.10)$$

olur. A_3 için önce çift Abel dönüşümü düzenleyerek

$$A_3 = \left| \sum_{j=\sigma+1}^{m} \sin\left(m-j+\frac{1}{2}\right)u \sum_{k=\tau+1}^{n} p_{jk} \left\{ \sum_{l=\tau+1}^{k} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{l=\tau+1}^{k-1} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right\} \right|$$

$$\leq \left| \sum_{j=\sigma+1}^{m} p_{jn} \sin\left(m-j+\frac{1}{2}\right)u \sum_{l=\tau+1}^{n} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right|$$

$$+ \left| \sum_{j=\sigma+1}^{m} \sin\left(m-j+\frac{1}{2}\right)u \sum_{k=\tau+1}^{n-1} \Delta_{01} p_{jk} \sum_{l=\tau+1}^{k} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right|$$

$$= A_{31} + A_{32} \tag{4.11}$$

şeklinde yazarsak

$$A_{31} = \left| \left\{ \sum_{j=\sigma+1}^{m} p_{jn} \left(\sum_{h=\sigma+1}^{j} \sin\left(m-h+\frac{1}{2}\right)u \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \sum_{h=\sigma+1}^{j-1} \sin\left(m-h+\frac{1}{2}\right)u \right) \right\} \sum_{l=\tau+1}^{n} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right|$$

$$\leq \left| p_{mn} \sum_{h=\sigma+1}^{m} \sin\left(m-h+\frac{1}{2}\right)u \sum_{l=\tau+1}^{n} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right|$$

$$+ \left| \sum_{j=\sigma+1}^{m-1} \Delta_{10} p_{jn} \sum_{h=\sigma+1}^{j} \sin\left(m-h+\frac{1}{2}\right)u \sum_{l=\tau+1}^{n} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right|$$

ve

$$A_{32} = \left| \left\{ \sum_{j=\sigma+1}^{m} \sum_{k=\tau+1}^{n-1} \Delta_{01} p_{jk} \left(\sum_{a=\sigma+1}^{j} \sin\left(m-a+\frac{1}{2}\right)u \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \sum_{a=\sigma+1}^{j-1} \sin\left(m-a+\frac{1}{2}\right)u \right) \right\} \sum_{l=\tau+1}^{k} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right|$$

$$\leq \left| \sum_{k=\tau+1}^{n-1} \Delta_{01} p_{mk} \sum_{a=\sigma+1}^{m} \sin\left(m-a+\frac{1}{2}\right)u \sum_{l=\tau+1}^{k} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right|$$

$$+ \left| \sum_{j=\sigma+1}^{m-1} \sum_{k=\tau+1}^{n-1} \Delta_{11} p_{jk} \sum_{a=\sigma+1}^{j} \sin\left(m-a+\frac{1}{2}\right)u \sum_{l=\tau+1}^{k} \sin\left(n-l+\frac{1}{2}\right)v \right|$$

olur. Bu sonuçlar eşitlik 4.11.'de yerine yazılarak eşitlik 4.3.'ü ve $\{p_{jk}\}$ dizisinin artmayan olmasını kullanarak

$$A_3 \leq \frac{\pi^2}{uv}\left(p_{mn} + \sum_{j=\sigma+1}^{m-1}(p_{jn} - p_{j+1,n}) + \sum_{k=\tau+1}^{n-1}(p_{mk} - p_{m,k+1}) + \sum_{j=\sigma+1}^{m-1}\sum_{k=\tau+1}^{n-1}|\Delta_{11}p_{jk}|\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{uv}\left(p_{\sigma+1,n} + p_{m,\tau+1} - p_{mn} + \sum_{j=\sigma+1}^{m-1}\sum_{k=\tau+1}^{n-1}|\Delta_{11}p_{jk}|\right)$$

elde edilir. Eğer $\Delta_{11}p_{jk} \geq 0$ ise $\sigma \leq \frac{1}{u} < \sigma + 1$ ve $\tau \leq \frac{1}{v} < \tau + 1$ olduğunu da kullanarak

$$A_3 \leq \frac{\pi^2}{uv}\left(p_{\sigma+1,n} + p_{m,\tau+1} - p_{mn} + \sum_{k=\tau+1}^{n-1}(\Delta_{01}p_{\sigma+1,k} - \Delta_{01}p_{mk})\right) \leq \frac{\pi^2}{uv}p_{\sigma+1,\tau+1}$$

$$\leq \pi^2(\sigma+1)(\tau+1)p_{\sigma+1,\tau+1} \leq \pi^2\sum_{j=0}^{\sigma}\sum_{k=0}^{\tau}p_{jk} = \pi^2 P_{\sigma\tau}$$

bulunur. Eğer $\Delta_{11}p_{jk} \leq 0$ ise $\{p_{jk}\}$ dizisinin artmayan olduğunu da dikkate alarak

$$A_3 \leq \frac{\pi^2}{uv}\left(2p_{\sigma+1,n} + 2p_{m,\tau+1} - 2p_{mn} - p_{\sigma+1,\tau+1}\right) \leq \frac{\pi^2}{uv}\left(3p_{\sigma+1,\tau+1} - 2p_{mn}\right)$$

$$< \frac{3\pi^2}{uv}p_{\sigma+1,\tau+1} = 3\pi^2 P_{\sigma\tau} \qquad (4.12)$$

elde edilir. Eşitlik 4.12., eşitlik 4.10., eşitlik 4.9. ve eşitlik 4.8.'i birleştirerek

$$P_{mn}|K_{mn}(u,v)| \leq \frac{\pi^2}{4uv}(P_{\sigma\tau} + \pi P_{\sigma\tau} + \pi P_{\sigma\tau} + 3\pi^2 P_{\sigma\tau}) = \frac{\pi^2(1 + 2\pi + 3\pi^2)}{4}\,\frac{P_{\sigma\tau}}{uv}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5.AZALMAYAN DİZİLERE KARŞILIK GETİRİLEN FOURİER SERİLERİNİN NÖRLUND TOPLANABİLMESİ

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan teoremlerden azalmayan dizilere karşılık getirilen Fourier serilerinin Nörlund toplanabilmesiyle ilgili Teorem3.2'nin ispatı incelenecektir.

Eşitlik 2.4.'te tanımlanan Nörlund çekirdeği $K_{mn}(u,v)$ için kullanılan Lemma 4.1. ispata geçmeden yeniden düzenlenerek aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$|K_{mn}(u,v)| \leq \begin{cases} (m+1)(n+1) & , \quad \forall u,v \\ O(1)\dfrac{(n+1)q_{mn}}{u^2} & , \quad 0<u\leq\pi\,,\forall v \\ O(1)\dfrac{(m+1)r_{mn}}{v^2} & , \quad 0<v\leq\pi\,,\forall u \\ O(1)\dfrac{p_{mn}}{P_{mn}u^2v^2} & , \quad 0<u,v\leq\pi \end{cases}$$

Açıktır ki burada

$$q_{mn}=\frac{1}{P_{mn}}\sum_{k=0}^{n}p_{mk} \quad , \quad r_{mn}=\frac{1}{P_{mn}}\sum_{j=0}^{m}p_{jn} \qquad (m,n=0,1,2,\dots)$$

olup $\{p_{jk}\}$ azalmayan olduğundan

$$(m+1)q_{mn}\geq 1 \ , \ (n+1)r_{mn}\geq 1 \tag{5.1}$$

olur. Gerçekten

$$(m+1)q_{mn}=\frac{(m+1)\sum_{k=0}^{n}p_{mk}}{P_{mn}}=\frac{\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_{mk}}{P_{mn}}\geq\frac{\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}p_{jk}}{P_{mn}}=1$$

dir. Ayrıca Eşitlik 3.1.'den

$$(m+1)q_{mn}=O(1) \ , \ (n+1)r_{mn}=O(1) \tag{5.2}$$

elde edilir. Gerçekten

$$(n+1)r_{mn}=\frac{(n+1)}{P_{mn}}\sum_{j=0}^{m}p_{jn}\leq\frac{(n+1)}{P_{mn}}\sum_{j=0}^{m}p_{mn}=\frac{(m+1)(n+1)p_{mn}}{P_{mn}}=O(1)$$

olur. Genelliği kaybetmeden tüm $m,n=0,1,2,\dots$ için $q_{mn},r_{mn}<1$ olduğu varsayılmaktadır.

Eşitlik 2.5. gösterimi ile başlanarak integral aşağıdaki gibi parçalanır:

$$\pi^2|t_{mn}(x,y)-f(x,y)| = \left|\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\varphi_{xy}(u,v)K_{mn}(u,v)dudv\right|$$

$$\leq \{\int_0^{q_{mn}}\int_0^{r_{mn}} + \int_{q_{mn}}^{\pi}\int_0^{r_{mn}} + \int_0^{q_{mn}}\int_{r_{mn}}^{\pi} + \int_{q_{mn}}^{\pi}\int_{r_{mn}}^{\pi}\}\,|\varphi_{xy}(u,v)||K_{mn}(u,v)|dudv$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \tag{5.3}$$

olsun. Bundan sonra φ_{xy} yerine φ yazılacaktır.

Lemma 4.1, eşitlik 3.2. ve eşitlik 5.2.'den

$$I_1 = \int_0^{q_{mn}}\int_0^{r_{mn}} |\varphi(u,v)||K_{mn}(u,v)|dvdu \leq (m+1)(n+1)\phi(q_{mn},r_{mn})$$

$$= (m+1)(n+1)o(q_{mn}r_{mn}) = O(1).o(1) = o(1) \tag{5.4}$$

elde edilir. Lemma 4.1 tekrar kullanılır ve kısmi integrasyon uygulanarak

$$I_2 = \int_{q_{mn}}^{\pi}\int_0^{r_{mn}} |\varphi(u,v)||K_{mn}(u,v)|dudv = O(1)(n+1)q_{mn}\int_{q_{mn}}^{\pi}\int_0^{r_{mn}} \frac{|\varphi(u,v)|}{u^2}dvdu$$

$$= O(1)(n+1)q_{mn}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{r_{mn}} |\varphi(s,v)|dvds\right.$$

$$\left. + 2\int_{q_{mn}}^{\pi}\frac{1}{u^3}\left(\int_0^{u}\int_0^{r_{mn}} |\varphi(s,v)|dvds\right)du\right\}$$

$$= O(1)(n+1)q_{mn}\left(\frac{1}{\pi^2}\phi(\pi,r_{mn}) + 2\int_{q_{mn}}^{\pi}\frac{\phi(u,r_{mn})}{u^3}du\right)$$

elde edilir. Burada ve çalışmanın devamında negatif katsayılı terimler ihmal edilecektir. $\alpha = {}^1\!/_2$ olsun. Eşitlik 3.2., eşitlik 3.4., eşitlik 5.1. ve eşitlik 5.2.'den

$$I_2 = O(1)(n+1)q_{mn}\left(O(r_{mn}) + 2\int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}}\frac{\phi(u,r_{mn})}{u^3}du + 2\int_{(q_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\frac{\phi(u,r_{mn})}{u^3}du\right)$$

$$= O(1)(n+1)q_{mn}\left(O(r_{mn}) + 2\int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}} \frac{o(ur_{mn})}{u^3}du + 2\int_{(q_{mn})^{\alpha}}^{\pi} \frac{O(r_{mn})}{u^3}du\right)$$

$$= O(1)(n+1)q_{mn}\left(O(r_{mn}) + 2\frac{o(r_{mn})}{q_{mn}} + \frac{O(r_{mn})}{(q_{mn})^{2\alpha}}\right)$$

$$= O(1)(n+1)q_{mn}\left(O(r_{mn}) + o(\frac{r_{mn}}{q_{mn}})\right)$$

$$= O(1)(n+1)q_{mn}r_{mn} + o(1)(n+1)r_{mn} = \frac{O(1)}{m+1} + o(1)$$

$$= o(1) \tag{5.5}$$

olur. I_2'ye tamamen benzer şekilde $\alpha = {}^1\!/_2$ olmak üzere

$$I_3 = O(1)(m+1)r_{mn}\int_0^{q_{mn}}\int_{r_{mn}}^{\pi} \frac{|\varphi(u,v)|}{v^2}dvdu$$

$$= O(1)(m+1)r_{mn}\left(\frac{1}{\pi^2}\phi(q_{mn},\pi) + 2\int_{r_{mn}}^{\pi}\frac{\phi(q_{mn},v)}{v^3}dv\right)$$

$$= O(1)(m+1)r_{mn}\left(O(q_{mn}) + o\left(\frac{q_{mn}}{r_{mn}}\right)\right) = \frac{O(1)}{n+1} + o(1)$$

$$= o(1) \tag{5.6}$$

olur. $0 < \alpha < {}^1\!/_2$ şartını sağlayacak şekilde α'yı sabitleyip Lemma 4.1. uygulanarak

$$I_4 = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\int_{q_{mn}}^{\pi}\int_{r_{mn}}^{\pi}\frac{|\varphi(u,v)|}{u^2v^2}dvdu$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\{\int_{q_{mn}}^{\pi}\int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}} + \int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}}\int_{r_{mn}}^{\pi} + \int_{(q_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\int_{(r_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\}\frac{|\varphi(u,v)|}{u^2v^2}dvd$$

$$= I_5 + I_6 + I_7 \tag{5.7}$$

yazılabilir. I_5 için önce u'ya göre kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_5 = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\frac{dv}{v^2}\int_0^{\pi}|\varphi(s,v)|ds + \int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\frac{dv}{v^2}\left(\int_{q_{mn}}^{\pi}\frac{2}{u^3}\int_0^{u}|\varphi(s,v)|dsdu\right)\right\}$$

$$= I_{51} + I_{52} \tag{5.8}$$

elde edilir. Bu kez v'ye göre kısmi integrasyon uygulayarak ve eşitlik 3.1., eşitlik 3.3. ve eşitlik 5.1.'den

$$I_{51} = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{1}{(r_{mn})^{2\alpha}}\int_0^{(r_{mn})^{\alpha}}\int_0^{\pi}|\varphi(s,t)|dsdt + \int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\frac{dv}{v^3}\left(\int_0^{v}\int_0^{\pi}|\varphi(s,t)|dsdt\right)dv\right\}$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{\phi((r_{mn})^{\alpha},\pi)}{(r_{mn})^{2\alpha}} + \int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\frac{\phi(v,\pi)}{v^3}dv\right\}$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{O((r_{mn})^{\alpha})}{(r_{mn})^{2\alpha}} + \frac{O(1)}{r_{mn}}\right\} = \frac{O(1)}{m+1}$$

$$= o(1) \tag{5.9}$$

olur. I_{52} için integrasyon sırasını değiştirip v'ye göre kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_{52} = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\int_{q_{mn}}^{\pi}\frac{du}{u^3}\left(\int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\frac{dv}{v^2}\int_0^{u}|\varphi(s,v)|ds\right)\right\}$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\int_{q_{mn}}^{\pi}\frac{\phi(u,(r_{mn})^{\alpha})}{u^3(r_{mn})^{2\alpha}}du + \int_{q_{mn}}^{\pi}\int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\frac{2\phi(u,v)}{u^3v^3}dvdu\right\}$$

$$= I_{521} + I_{522} \tag{5.10}$$

olur. Eşitlik 3.1., eşitlik 3.2., eşitlik 3.4., eşitlik 5.1. ve eşitlik 5. 2.'den

$$I_{521} = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}}\frac{\phi(u,(r_{mn})^{\alpha})}{u^3(r_{mn})^{2\alpha}}du + \int_{(q_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\frac{\phi(u,(r_{mn})^{\alpha})}{u^3(r_{mn})^{2\alpha}}du\right\}$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}}\frac{o(1)}{u^2(r_{mn})^{\alpha}}du + \int_{(q_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\frac{O(1)}{u^3(r_{mn})^{\alpha}}du\right\}$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{o(1)}{q_{mn}(r_{mn})^{\alpha}} + \frac{O(1)}{(q_{mn})^{2\alpha}(r_{mn})^{\alpha}}\right\}$$

$$= o(1)(n+1)^{\alpha-1} + O(1)(m+1)^{2\alpha-1}(n+1)^{\alpha-1} = o(1) \tag{5.11}$$

ve

$$I_{522} = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}}\int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\frac{o(uv)}{u^3v^3}dvdu + \int_{(q_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\frac{O(v)}{u^3v^3}dvdu\right\}$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{o(1)}{q_{mn}\, r_{mn}} + \frac{O(1)}{r_{mn}(q_{mn})^{2\alpha}}\right\} = \frac{o(1)}{q_{mn}\, r_{mn}(m+1)(n+1)} + O(1)(m+1)^{2\alpha-1}$$

$$= o(1) \tag{5.12}$$

elde edilir. Eşitlik 5.11. ve eşitlik 5.12. birleştirilerek $I_{52} = o(1)$, bu sonuç ve eşitlik 5.9. birleştirilerek

$$I_5 = o(1) \tag{5.13}$$

elde edilir. Tamamen simetrik olarak

$$I_6 = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{1}{\pi^2}\int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}} \frac{du}{u^2}\int_0^{\pi}|\varphi(u,s)|ds + \int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}} \frac{du}{u^2}\left(\int_{r_{mn}}^{\pi}\frac{2dv}{v^3}\int_0^{v}|\varphi(u,s)|ds\right)\right\}$$

$$= I_{61} + I_{62} \tag{5.14}$$

$$I_{61} = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{\phi((q_{mn})^{\alpha},\pi)}{(q_{mn})^{2\alpha}} + \int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}}\frac{\phi(u,\pi)}{u^3}du\right\}$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{O((q_{mn})^{\alpha})}{(q_{mn})^{2\alpha}} + \frac{O(1)}{q_{mn}}\right\} = \frac{O(1)}{n+1}$$

$$= o(1) \tag{5.15}$$

ve integrasyon sırasını değiştirip u'ye göre kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I_{62} = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\int_{r_{mn}}^{\pi}\frac{\phi((q_{mn})^{\alpha},v)}{v^3(q_{mn})^{2\alpha}}dv + \int_{r_{mn}}^{\pi}\int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}}\frac{2\phi(u,v)}{u^3v^3}dudv\right\}$$

$$= I_{621} + I_{622} \tag{5.16}$$

olur. Buradan

$$I_{621} = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\frac{\phi((q_{mn})^{\alpha},v)}{v^3(q_{mn})^{2\alpha}}dv + \int_{(r_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\frac{\phi((q_{mn})^{\alpha},v)}{v^3(q_{mn})^{2\alpha}}dv\right\}$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{o(1)}{r_{mn}(q_{mn})^{\alpha}} + \frac{O(1)}{(r_{mn})^{2\alpha}(q_{mn})^{\alpha}}\right\}$$

$$= o(1)(m+1)^{\alpha-1} + O(1)(n+1)^{2\alpha-1}(m+1)^{\alpha-1}$$

$$= o(1) \tag{5.17}$$

ve

$$I_{622} = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\int_{r_{mn}}^{(r_{mn})^{\alpha}}\int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}}\frac{o(uv)}{u^3v^3}dudv + \int_{(r_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\int_{q_{mn}}^{(q_{mn})^{\alpha}}\frac{O(u)}{u^3v^3}dudv\right\}$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\left\{\frac{o(1)}{q_{mn}\, r_{mn}} + \frac{O(1)}{q_{mn}(r_{mn})^{2\alpha}}\right\}$$

$$= \frac{o(1)}{q_{mn}\, r_{mn}(m+1)(n+1)} + O(1)(n+1)^{2\alpha-1} = o(1) \qquad (5.18)$$

elde edilir. Eşitlik 5.14. – eşitlik 5.18. sonuç olarak

$$I_6 = o(1) \qquad (5.19)$$

olduğunu gösterir.

Son olarak eşitlik 3.1.'den, $\varphi \in L_{2\pi x 2\pi}$ ve $u \in ((q_{mn})^{\alpha}, \pi)$ için $\frac{1}{u^2}$, $v \in ((r_{mn})^{\alpha}, \pi)$ için $\frac{1}{v^2}$ azalan olduğundan

$$I_7 = O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}}\int_{(q_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\int_{(r_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\frac{|\varphi(u,v)|}{u^2v^2}dvdu$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}}{P_{mn}(q_{mn})^{2\alpha}(r_{mn})^{2\alpha}}\int_{(q_{mn})^{\alpha}}^{\pi}\int_{(r_{mn})^{\alpha}}^{\pi}|\varphi(u,v)|dvdu$$

$$= O(1)\frac{p_{mn}\phi(\pi,\pi)}{P_{mn}(q_{mn})^{2\alpha}(r_{mn})^{2\alpha}} = O(1)(n+1)^{2\alpha-1}(m+1)^{2\alpha-1}$$

$$= o(1) \qquad (5.20)$$

elde edilir. Eşitlik 5.20., eşitlik 5.19., eşitlik 5.13., eşitlik 5.6. – eşitlik 5.4. sonuçları eşitlik 3.5.'i ispat eder.

6. ARTMAYAN DİZİLERE KARŞILIK GETİRİLEN FOURİER SERİLERİNİN NÖRLUND TOPLANABİLMESİ

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan teoremlerden bir diğeri olan artmayan dizilere karşılık getirilen Fourier serilerinin Nörlund toplanabilmesiyle ilgili Teorem3.4'ün ispatı incelenecektir.

Tekrar eşitlik 2.5. temsili ile başlanır ve integral eşitlik 5.3.'deki gibi parçalanabilir. Fakat bu kez q_{mn} ve r_{mn}'yi sırası ile $\frac{\pi}{m+1}$ ve $\frac{\pi}{n+1}$ ile değiştirmek gerekmektedir. Karşılık gelen integraller yine sırası ile I_1, I_2, I_3 ve I_4 ile gösterilsin.

$$\sigma = \left[\!\left[\frac{\pi}{u}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{\pi}{\frac{\pi}{m+1}}\right]\!\right] = m+1 \quad , \quad \tau = \left[\!\left[\frac{\pi}{v}\right]\!\right] = \left[\!\left[\frac{\pi}{\frac{\pi}{n+1}}\right]\!\right] = n+1$$

olduğunu dikkate alarak Lemma 4.2., eşitlik 3.12. ve eşitlik 3.9. 'dan

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{m+1}} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |\varphi(u,v)||K_{mn}(u,v)|dvdu \le (m+1)(n+1)\phi\left(\frac{\pi}{m+1},\frac{\pi}{n+1}\right)$$

$$= (m+1)(n+1)o\left(\frac{\frac{\pi}{m+1}\frac{\pi}{n+1}}{P_{\sigma\tau}}\right) = \frac{o(1)}{P_{m+1,n+1}}$$

$$= \frac{o(1)}{\log(m+1)\log(n+1)} = o(1) \tag{6.1}$$

elde edilir. Tekrar Lemma 4.2. kullanılarak

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |\varphi(u,v)||K_{mn}(u,v)|dvdu = \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\pi} \frac{|\varphi(u,v)|P_{\sigma n}}{u} dudv$$

$$= \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{m} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{|\varphi(u,v)|P_{\sigma n}}{u} dvdu$$

$$= \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{m} \frac{(j+1)P_{j+1,n}}{\pi} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |\varphi(u,v)|dvdu$$

$$= \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{m} (j+1) P_{jn} \left(\phi_{j,n+1} - \phi_{j+1,n+1} \right)$$

yazılabilir. Burada $\phi_{jn} = \phi\left(\frac{\pi}{j}, \frac{\pi}{n}\right)$ olmak üzere

$$\phi_{j,n+1} - \phi_{j+1,n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{j}} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |\varphi(u,v)| dv du - \int_0^{\frac{\pi}{j+1}} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |\varphi(u,v)| dv du$$

$$= \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} |\varphi(u,v)| dv du$$

ve $\frac{P_{j+1,n}}{P_{jn}} = O(1)$ olması kullanılmıştır. Gerçekten de $\{p_k\}$ artmayan olduğundan

$$\frac{P_{j+1,n}}{P_{jn}} = \frac{P_{jn} + \sum_{k=0}^{n} p_{j+1,k}}{P_{jn}} < 1 + \frac{\sum_{k=0}^{n} p_{j+1,k}}{\sum_{k=0}^{n} p_{jk}} < 2$$

dır. Buradan

$$I_2 = \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} \Bigg\{ P_{0n} \phi_{1,n+1} + \sum_{j=1}^{m} P_{jn} \phi_{j,n+1} + \sum_{j=1}^{m} j\left(P_{jn} - P_{j-1,n}\right) \phi_{j,n+1} - (m+1) P_{mn} \phi_{m+1,n+1} \Bigg\}$$

$$\leq I_{21} + I_{22} + I_{23} \tag{6.2}$$

elde edilir. Burada yine yalnızca pozitif terimler göz önüne alınmaktadır. Eşitlik 3.7., eşitlik 3.9. ve eşitlik 3.14.'den

$$I_{21} = \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} P_{0n} \phi_{1,n+1} = \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} P_{0n} \phi\left(\pi, \frac{\pi}{n+1}\right)$$

$$= \frac{O(1)(n+1) P_{0n} \frac{\pi}{n+1}}{P_{mn} P_{1,n+1}} = \frac{O(1) P_{0n}}{P_{mn} P_{1n}} = \frac{O(1)}{\log m \log n} = o(1) \tag{6.3}$$

elde edilir. Eşitlik 3.7., eşitlik 3.9., eşitlik 3.12., eşitlik 3.14.'den ve j_0'ın yeterince büyük sabit bir tam sayı olduğunu kabul ederek

$$I_{22} = \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} P_{jn}\phi_{j,n+1} + \sum_{j=j_0+1}^{m} P_{jn}\phi_{j,n+1} \right\}$$

$$= \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} P_{jn} \frac{O\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{P_{1,n+1}} + \sum_{j=j_0+1}^{m} P_{jn} \frac{o\left(\frac{\pi}{j}\frac{\pi}{n+1}\right)}{P_{j,n+1}} \right\}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} + \frac{o(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \frac{1}{j} = \frac{O(1)}{\log m \log n} + \frac{o(1)}{\log n} = o(1) \qquad (6.4)$$

elde edilir. Yine j_0 yeterince büyük sabit bir tam sayı, $1 \le j \le m$ için $P_{j,n+1} \ge P_{1n}$ olduğunu dikkate alarak eşitlik 3.7., eşitlik 3.9., eşitlik 3.12. ve eşitlik 3.14.'den

$$I_{23} = \frac{O(1)(n+1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} \frac{j\left(P_{jn} - P_{j-1,n}\right) O\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{P_{1,n+1}} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=j_0+1}^{m} \frac{j\left(P_{jn} - P_{j-1,n}\right) o\left(\frac{\pi}{j}\frac{\pi}{n+1}\right)}{P_{j,n+1}} \right\}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}P_{1n}} \sum_{j=1}^{j_0} jP_{jn} + \frac{o(1)}{P_{mn}P_{1n}} \sum_{j=j_0+1}^{m} P_{jn} - P_{j-1,n}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} + \frac{o(1)}{P_{mn}P_{1n}}\left(P_{mn} - P_{j_0 n}\right) = \frac{O(1)}{\log m \log n} + \frac{o(1)}{P_{1n}} = o(1) + \frac{o(1)}{\log n}$$

$$= o(1) \qquad (6.5)$$

elde edilir. Eşitlik 6.3. – eşitlik 6.5.'den

$$I_2 = o(1) \qquad (6.6)$$

olur. Benzer şekilde

$$I_3 = o(1) \qquad (6.7)$$

dır. Gerçekten

$$I_3 = \frac{O(1)(m+1)}{P_{mn}} \int_0^{\frac{\pi}{m+1}} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} \frac{|\varphi(u,v)| P_{m\tau}}{v} \, dvdu$$

$$= \frac{O(1)(m+1)}{P_{mn}} \Bigg\{ P_{m0}\phi_{m+1,1} + \sum_{j=1}^{n} P_{mj}\phi_{m+1,j}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} j\big(P_{mj} - P_{m,j-1}\big)\phi_{m+1,j} - (n+1)P_{mn}\phi_{m+1,n+1} \Bigg\}$$

$$\leq I_{31} + I_{32} + I_{33}$$

dır. Buradan

$$I_{31} = \frac{O(1)(m+1)}{P_{mn}} P_{m0}\phi_{m+1,1} = \frac{O(1)P_{m0}}{P_{mn}P_{m1}} = \frac{O(1)}{\log m \log n} = o(1)$$

$$I_{32} = \frac{O(1)(m+1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} P_{mj} \frac{O\left(\frac{\pi}{m+1}\right)}{P_{m+1,1}} + \sum_{j=j_0+1}^{n} P_{mj} \frac{o\left(\frac{\pi}{j}\frac{\pi}{m+1}\right)}{P_{m+1,j}} \right\}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} + \frac{o(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{1}{j} = \frac{O(1)}{\log m \log n} + \frac{o(1)}{\log m} = o(1)$$

$$I_{33} = \frac{O(1)(m+1)}{P_{mn}} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{j_0} \frac{j\big(P_{mj} - P_{m,j-1}\big)O\left(\frac{\pi}{m+1}\right)}{P_{m+1,1}}$$

$$+ \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{j\big(P_{mj} - P_{m,j-1}\big)o\left(\frac{\pi}{j}\frac{\pi}{m+1}\right)}{P_{m+1,j}} \Bigg\}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} + \frac{o(1)}{P_{mn}P_{m1}}\big(P_{mn} - P_{mj_0}\big) = \frac{O(1)}{\log m \log n} + \frac{o(1)}{P_{m1}} = o(1) + \frac{o(1)}{\log m}$$

$$= o(1)$$

olur. Lemma 4.2'den ve I_2'nin ispatında kullanılan mantığa benzer olarak

$$I_4 = \int_{\frac{\pi}{m+1}}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\pi} |\varphi(u,v)||K_{mn}(u,v)|dvdu = \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} \frac{|\varphi(u,v)|P_{\sigma\tau}}{uv} dvdu$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{(j+1)(k+1)P_{jk}}{\pi^2} \int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} |\varphi(u,v)|dvdu$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (j+1)(k+1) P_{jk} \{ \phi_{jk} - \phi_{j+1,k} - \phi_{j,k+1} + \phi_{j+1,k+1} \}$$

elde edilir. Burada

$$\int_{\frac{\pi}{j+1}}^{\frac{\pi}{j}} \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} |\varphi(u,v)| dv du = \{ \int_{0}^{\frac{\pi}{j}} \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{j+1}} \int_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} \} |\varphi(u,v)| dv du$$

$$= \{ \int_{0}^{\frac{\pi}{j}} \int_{0}^{\frac{\pi}{k}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{j}} \int_{0}^{\frac{\pi}{k+1}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{j+1}} \int_{0}^{\frac{\pi}{k}} + \int_{0}^{\frac{\pi}{j+1}} \int_{0}^{\frac{\pi}{k+1}} \} |\varphi(u,v)| dv du$$

olduğu kullanılmıştır. Buradan

$$\begin{aligned} I_4 = \frac{O(1)}{P_{mn}} \Bigg\{ & \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (j+1)(k+1) P_{jk} \phi_{jk} - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} j(k+1) P_{j-1,k} \phi_{jk} \\ & - \sum_{k=1}^{n} (m+1)(k+1) P_{mk} \phi_{m+1,k} + \sum_{k=1}^{n} (k+1) P_{ok} \phi_{1k} \\ & - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} (j+1) k P_{j,k-1} \phi_{jk} - \sum_{j=1}^{m} (j+1)(n+1) P_{jn} \phi_{j,n+1} \\ & + \sum_{j=1}^{m} (j+1) P_{jo} \phi_{j1} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} jk P_{j-1,k-1} \phi_{jk} - \sum_{k=1}^{n} k P_{0,k-1} \phi_{1k} \\ & + \sum_{k=1}^{n} (m+1) k P_{m,k-1} \phi_{m+1,k} - \sum_{j=1}^{m} j P_{j-1,0} \phi_{j1} \\ & + \sum_{j=1}^{m} j(n+1) P_{j-1,n} \phi_{j,n+1} + (m+1)(n+1) P_{mn} \phi_{m+1,n+1} \\ & - (m+1) P_{m0} \phi_{m+1,1} - (n+1) P_{m0} \phi_{m+1,1} + P_{00} \phi_{11} \Bigg\} \end{aligned}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} \Bigg\{ P_{00}\phi_{11} + (m+1)(n+1)P_{mn}\phi_{m+1,n+1} + \sum_{j=1}^{m} \big[(j+1)P_{jo} - jP_{j-1,0}\big]\phi_{j1}$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \big[(k+1)P_{ok} - kP_{0,k-1}\big]\phi_{1k}$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \big[(j+1)(n+1)P_{jn} - j(n+1)P_{j-1,n}\big]\phi_{j,n+1}$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \big[(m+1)(k+1)P_{mk} - k(m+1)P_{m,k-1}\big]\phi_{m+1,k}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \big[(j+1)(k+1)P_{jk} - j(k+1)P_{j-1,k} - (j+1)kP_{j,k-1}$$

$$+ jkP_{j-1,k-1}\big]\phi_{jk} \Bigg\} \leq I_{41} + I_{42} + I_{43} + I_{44} + I_{45} \qquad (6.8)$$

yazılabilir. Burada yine yalnızca pozitif terimler dikkate alınmaktadır. $f \in L_{2\pi x 2\pi}$ olduğundan ve eşitlik 3.9.'dan

$$I_{41} = \frac{O(1)}{P_{mn}} P_{00}\phi_{11} = \frac{O(1)}{P_{mn}} = \frac{O(1)}{\log m \log n} = o(1) \qquad (6.9)$$

elde edilir. Eşitlik 3.12. ve eşitlik 3.9.'dan

$$I_{42} = \frac{O(1)}{P_{mn}} (m+1)(n+1)P_{mn}\phi_{m+1,n+1} = \frac{O(1)(m+1)(n+1)o\left(\frac{\pi}{m+1}\frac{\pi}{n+1}\right)}{P_{m+1,n+1}}$$

$$= \frac{O(1)}{\log(m+1)\log(n+1)} = o(1) \qquad (6.10)$$

elde edilir. Eşitlik 3.6., eşitlik 3.13., $\varphi \in L_{2\pi x 2\pi}$ olduğundan ve j_0 yeterince büyük sabit bir tam sayı olmak üzere

$$I_{43=} \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{m} \big[(j+1)P_{jo} - jP_{j-1,0}\big]\phi_{j1}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} P_{jo}\phi_{j1} + \sum_{j=j_0+1}^{m} P_{jo}\phi_{j1} + \sum_{j=1}^{j_0} j(P_{jo} - P_{j-1,0})\phi_{j1} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=j_0+1}^{m} j(P_{jo} - P_{j-1,0})\phi_{j1} \right\}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \frac{P_{jo} O\left(\frac{\pi}{j}\right)}{P_{j1}} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \frac{j(P_{jo} - P_{j-1,0}) O\left(\frac{\pi}{j}\right)}{P_{j1}}$$

$$= \frac{O(1)}{\log m \log n} + \frac{O(1)}{\log n} + \frac{O(1)}{P_{mn} P_{11}} \sum_{j=j_0+1}^{m} P_{jo} - P_{j-1,0} = o(1) + \frac{O(1) P_{m0}}{P_{mn}}$$

$$= o(1) \tag{6.11}$$

ve tamamen simetrik olarak

$$I_{44=} \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{k=1}^{n} \left[(k+1)P_{ok} - kP_{0,k-1} \right] \phi_{1k}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{k=1}^{k_0} P_{ok}\phi_{1k} + \sum_{j=k_0+1}^{n} P_{ok}\phi_{1k} + \sum_{k=1}^{k} k(P_{ok} - P_{0,k-1})\phi_{1k} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=k_0+1}^{n} k(P_{ok} - P_{0,k-1})\phi_{1k} \right\}$$

$$= \frac{O(1)}{\log m \log n} + \frac{O(1)}{\log m} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=k_0+1}^{n} P_{0k} - P_{0,k-1} = o(1) + \frac{O(1) P_{0n}}{P_{mn}}$$

$$= o(1) \tag{6.12}$$

elde edilir.

$$P_{jk} - P_{j-1,k} - P_{j,k-1} + P_{j-1,k-1} = \sum_{t=0}^{k} p_{jt} - \sum_{t=0}^{k-1} p_{jt} = p_{jk}$$

olduğunu dikkate alarak

$$I_{45} = \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \left[(j+1)(k+1)P_{jk} - j(k+1)P_{j-1,k} - (j+1)kP_{j,k-1} \right.$$

$$\left. + jkP_{j-1,k-1} \right] \phi_{jk}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} jkp_{jk}\, \phi_{jk} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} j\left(P_{jk} - P_{j-1,k}\right)\phi_{jk} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} k\left(P_{jk} - P_{j,k-1}\right)\phi_{jk} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} P_{jk}\, \phi_{jk} \right\}$$

$$= I_{451} + I_{452} + I_{453} + I_{454} \tag{6.13}$$

olsun. j_0 ve k_0 yeterince büyük sayılar olmak üzere eşitlik 3.7., eşitlik 3.9., eşitlik 3.12. – eşitlik 3.14.'den

$$I_{451} = \frac{O(1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=1}^{k_0} jkp_{jk}\, \phi_{jk} + \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{n} jkp_{jk}\, \phi_{jk} + \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_0} jkp_{jk}\, \phi_{jk} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=k_0+1}^{n} jkp_{jk}\, \phi_{jk} \right\}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{jkp_{jk} O\left(\frac{\pi}{k}\right)}{P_{1k}} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{jkp_{jk} O\left(\frac{\pi}{j}\right)}{P_{j1}}$$

$$+ \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{jkp_{jk} o\left(\frac{\pi}{j}\frac{\pi}{k}\right)}{P_{jk}} = \frac{O(1)}{\log m \log n} + o(1)$$

$$= o(1) \tag{6.14}$$

olur. Eşitlik 3.6. – eşitlik 3.9. ve eşitlik 3.12. – eşitlik 3.14.'ü kullanarak

$$I_{452} = \frac{O(1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=1}^{k_0} j\left(P_{jk} - P_{j-1,k}\right)\phi_{jk} + \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{n} j\left(P_{jk} - P_{j-1,k}\right)\phi_{jk} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_0} j\left(P_{jk} - P_{j-1,k}\right)\phi_{jk} + \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=k_0+1}^{n} j\left(P_{jk} - P_{j-1,k}\right)\phi_{jk} \right\}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{j\left(P_{jk} - P_{j-1,k}\right) O\left(\frac{\pi}{k}\right)}{P_{1k}}$$

$$+ \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{j\left(P_{jk} - P_{j-1,k}\right) O\left(\frac{\pi}{j}\right)}{P_{j1}}$$

$$+ \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{j\left(P_{jk} - P_{j-1,k}\right) o\left(\frac{\pi}{j}\frac{\pi}{k}\right)}{P_{jk}}$$

$$= \frac{O(1)}{\log m \log n} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{P_{jk}}{kP_{1k}} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{P_{jk}}{P_{j1}}$$

$$+ \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=k_0+1}^{n} o(1) \frac{\left(P_{jk} - P_{j-1,k}\right)}{kP_{jk}} = o(1) + \frac{O(1)}{\log m} + \frac{O(1)}{\log m \log n}$$

$$= o(1) \tag{6.15}$$

elde edilir. Burada ve devamında j_0 ve k_0 yeterince büyük sayılardır. Simetrik olarak

$$I_{453} = \frac{O(1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=1}^{k_0} k\left(P_{jk} - P_{j,k-1}\right)\phi_{jk} + \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{n} k\left(P_{jk} - P_{j,k-1}\right)\phi_{jk} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_0} k\left(P_{jk} - P_{j,k-1}\right)\phi_{jk} + \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=k_0+1}^{n} k\left(P_{jk} - P_{j,k-1}\right)\phi_{jk} \right\}$$

$$= o(1) + \frac{O(1)}{\log n} + \frac{O(1)}{\log m \log n} = o(1) \tag{6.16}$$

elde edilir. Son olarak eşitlik 3.6. – eşitlik 3.9. ve eşitlik 3.12. – eşitlik 3.14.'ü kullanarak

$$I_{454} = \frac{O(1)}{P_{mn}} \left\{ \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=1}^{k_0} P_{jk}\phi_{jk} + \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{n} P_{jk}\phi_{jk} + \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_0} P_{jk}\phi_{jk} \right.$$

$$\left. + \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=k_0+1}^{n} P_{jk}\phi_{jk} \right\}$$

$$= \frac{O(1)}{P_{mn}} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=1}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{P_{jk} O\left(\frac{\pi}{k}\right)}{P_{1k}} + \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_0} \frac{P_{jk} O\left(\frac{\pi}{j}\right)}{P_{j1}}$$

$$+ \frac{O(1)}{P_{mn}} \sum_{j=j_0+1}^{m} \sum_{k=k_0+1}^{n} o(\frac{\pi}{j}\frac{\pi}{k}) = \frac{O(1)}{\log m \log n} + \frac{O(1)}{\log m} + \frac{O(1)}{\log n} + o(1)$$

$$= o(1) \tag{6.17}$$

elde edilir. Eşitlik 6.13. – eşitlik 6.17. birleştirilerek $I_{45} = o(1)$, bu sonuç ile eşitlik 6.8. – eşitlik 6.12. birleştirilerek $I_4 = o(1)$ elde edilir. Böylece ispat biter.

7.SONUÇ

Bu tez çalışmasında, katlı Nörlund matrislerinin oldukça geniş sınıfları ile katlı Fourier serilerinin herhangi bir noktada toplanabilmesi için yeterli koşullar incelenmiştir.

Genel olarak, ispatı incelenen teoremler B.E. Rhoades ve Moricz tarafından literatüre kazandırılmıştır. İspatı incelenen bu teoremler, Y.S. Chow, K.N. Mishra ve P.L. Sharma'nın ilgili çalışmalarının önemli ölçüde genellemeleri olduğu sonucunu ortaya çıkarmıştır.

Fourier serilerinin toplanabilme teorisindeki hassasiyeti, ispatı incelenen teoremler ve sonuçlar yardımıyla belirlenmiştir. Çalışmada önemli bir rol alan Nörlund çekirdeğinin oluşturulma şartları ayrıntılı bir şekilde araştırılmıştır.

Negatif olmayan ve artmayan çift bir diziye karşılık getirilen katlı Fourier serilerinin katlı Nörlund toplanabilir olması ile ilgili bir teoremin ispatı incelenmiştir. Bu teoremin ispatında kullanılan teknikler yardımıyla negatif olmayan ve azalmayan çift bir diziye karşılık getirilen Fourier serilerinin Nörlund toplanabilir olması ile ilgili bir teoremin ispatı araştırılmıştır.

Çalışmada çift diziler üzerine konulan pozitiflik ve monotonluk şartlarının kaldırılamayacağı sonucuna ulaşılmıştır. Katlı integrallerin ve dolayısıyla Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar sınıfının teoremlerin ispatındaki önemi ve kullanılması araştırılmıştır. Çift dizilerin ileri fark ve geri fark şeklinde oluşturulan farklı türlerinin teoremlerdeki hipotezlerle ilişkileri gözlemlenmiştir. Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı ile özel bir katlı Nörlund toplanabilme metodu olan $(C,1,1)$ toplanabilme arasındaki ilişkiler ile ilgili sonuçlar ifade edilmiştir. Ayrıca, Double Abel dönüşümü, sınırlılık ve sıfır dizisi kavramlarının çalışmaya katmış olduğu işlevsellikler farklı şekillerde belirlenmiştir.

Bu çalışmanın kattığı bilgi ve beceri sonucunda pozitif çift dizilere konulacak belli şartlarla katlı Fourier serilerinin Nörlund veya Nörlund tipi toplanabilmesiyle ilgili literatürde olmayan bir çalışma yapma beklentisi sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

Chow, Y.S; On the Cesâro summability of double Fourier series, 277-283, Tôhoku Math. J. (2) 5, 1953.

Mishra, K.N; Summability of double Fourier series by double Nörlund method, 289-295, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 13, 1985.

Móricz, F. and Rhoades, B.E; Approximation by Nörlund means of double Fourier series for Lipschitz fuctions, 346-377, J. Approx. Theory 49, 1987.

Móricz, F. and Rhoades, B.E; Summability of double Fourier series by Nörlund methods at a point,, 203-215, Journal of mathematical analysis and applications,167, 1992.

Sharma, P.L; On the harmonic summability of double series, 979-986, Proc. Amer. Math. Soc. 9, 1958.

Zygmund A; Trigonometric series, Cambridge, 1959.