

MINKOWSKI 4-UZAYINDA TIME-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE VE TIME-LIKE LOKSODROMLAR

MURAT GÜMÜŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2020

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI 4-UZAYINDA TIME-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE VE TIME-LIKE LOKSODROMLAR

MURAT GÜMÜŞ

Tez Danışmanı

Prof. Dr. MURAT BABAARSLAN

YOZGAT -2020

Her hakkı saklıdır

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İMZA

MURAT GÜMÜŞ

23/12/2020

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MINKOWSKI 4-UZAYINDA TIME-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE VE TIME-LIKE LOKSODROMLAR

MURAT GÜMÜŞ

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. MURAT BABAARSLAN

Bu tez çalışmasında; Minkowski 4-uzayında, time-like dönel yüzeyler üzerindeki loksodromlar çalışıldı. Tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı olup, bu bölümde loksodromun genel tanımına, uygulama alanlarına dair açıklama ve örneklere yer verildi. Ayrıca bu bölümde, Minkowski 4-uzayına ait bazı temel tanımlara yer verilerek ve literatür özeti yapıldı. İkinci bölümde Minkowski 4-uzayına ait bazı tanım ve teoremler verilerek çalışmaya zemin hazırlandı. Çalışmanın orijinal kısmını, üçüncü ve dördüncü bölümler oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde; Minkowski 4-uzayında time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemleri ve genel çözümleri oluşturuldu. Ayrıca bazı örnekler verilerek ilgili grafikler Mathematica programı yardımıyla çizildi. Dördüncü bölümde ise Minkowski 4-uzayında time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemleri elde edildi. Örnekler verildi ve grafikleri Mathematica programıyla çizildi.

2020, 33 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Loksodrom, Time-Like Dönel Yüzey, Minkowski 4-uzayı

ABSTRACT

MASTER THESIS

SPACE-LIKE AND TIME-LIKE LOXODROMES ON TIME-LIKE ROTATIONAL SURFACES IN MINKOWSKI 4-SPACE

MURAT GÜMÜŞ

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. MURAT BABAARSLAN

In this thesis; loxodromes on time-like rotational surfaces were studied in Minkowski 4-space. The thesis study consists of four parts. The first chapter is the introduction, and in this chapter, the general definition of loxodrome, explanations and examples about its application areas are given. In addition, in this section, some basic definitions of the Minkowski 4-space were given and a literature summary was made. In the second chapter, some definitions and theorems of the Minkowski 4-space were given and the groundwork was prepared. The original part of the study consists of the third and fourth parts. In the third part; Differential equations and general solutions of space-like loxodromes on time-like rotational surfaces in Minkowski 4-space are created. In addition, some examples were given and related graphics were drawn with the help of Mathematica program. In the fourth chapter, differential equations of time-like loxodromes on time-like rotational surfaces in Minkowski 4-space are obtained. Examples were given and their graphics were drawn with the Mathematica program.

2020, 33 PAGE

KEYWORDS: Loxodromes, Time-Like Rotations Surfaces, Minkowski 4-Space

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında, Minkowski 4-uzayında time-like dönel yüzeyler üzerindeki loksodromlar araştırıldı. İlk olarak Minkowski 4-uzayındaki time-like ve space-like iki vektör arasındaki Lorentzian açı tanımından yararlanılarak time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemleri ve genel çözümleri bulundu. Daha sonra aynı uzaydaki time-like iki vektör arasındaki Lorentzian açı tanımından yararlanılarak time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemleri ve genel çözümleri elde edildi.

Bu tez çalışmanın tamamlanması sürecinde başta, benden desteğini esirgemeyen, çalışmam boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli danışman hocam Doç. Dr. Murat BABAARSLAN'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca bu zaman zarfında her zaman maddi ve manevi yanımda olan, bana moral veren sevgili eşim Havva GÜMÜŞ'e ve uslu durarak çalışmalarıma katkı sağlayan biricik kızım Zeynep Sare GÜMÜŞ'e canı gönülden teşekkür ederim.

Bu tez çalışması;

Yozgat Bozok Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 6601-FBE/19-279 nolu Tez Destek Projesi ile desteklenmiştir.

MURAT GÜMÜŞ

23/12/2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
ABSTRACT v
ÖNSÖZ vi
İÇİNDEKİLER vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ viii
RESİMLERİN LİSTESİ ix
SİMGELER x
1.GİRİŞ 1
2.TEMEL KAVRAMLAR 5
3.TIME-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ
SPACE-LIKE LOKSODROMLAR 10
3.1. Eliptik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-Like
Loksodromlar 10
3.2. Hiperbolik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki
Space-LikeLoksodromlar 12
3.3. Parabolik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki
Space-LikeLoksodromlar 13
3.4. Örnekler 16
4.TIME-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ
TIME-LIKE LOKSODROMLAR 21
4.1. Eliptik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Time-Like
Loksodromlar 21
4.2. Hiperbolik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki
Time-LikeLoksodromlar 22
4.3. Parabolik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki
Time-LikeLoksodromlar 23
4.4. Örnekler 25
5.SONUÇ 31
KAYNAKLAR 32

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 3.4.1. Eliptik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi, space-like loksodromun izdüşümleri 17
Şekil 3.4.2. Hiperbolik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi, space-like loksodromun izdüşümleri 18
Şekil 3.4.3. Parabolik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi, space-like loksodromun izdüşümleri 20
Şekil 4.4.1. Eliptik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi, time-like loksodromun izdüşümleri 27
Şekil 4.4.2. Hiperbolik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi, time-like loksodromun izdüşümleri 28
Şekil 4.4.3. Parabolik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi, time-like loksodromun izdüşümleri 30

RESİMLER LİSTESİ

Resim **Sayfa**

Resim 1.1. Loksodromun Merkatör izdüşümü 1
Resim 1.2. Loksodromun stereografik izdüşümü..... 2
Resim 1.3. Minkowski 4-uzayı (temsili) 3

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{E}_1^4$	Minkowski 4-uzayı (Minkowski Uzay-Zaman)
$\mathbb{E}_1^3$	Minkowski 3-uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\langle .,. \rangle$	Skalar çarpım
$\| \cdot \|$	Norm
β_i	Profil eğrisi
P_i	Düzlem
Π_i	Hiperdüzlem
R_i	Dönel yüzey
$T_p S$	Yüzeyin P noktasındaki tanjant düzlemi
ds^2	Metrik tensör (Birinci temel form)
E, F, G	Birinci temel form katsayıları
s	Yay uzunluğu
φ	Space-like ve time-like vektörler arasındaki Lorentzian time-like açı
ψ	Time-like iki vektör arasındaki Lorentzian time-like açı
α_i	Space-like loksodrom
σ_i	Time-like loksodrom

1. GİRİŞ

Dünya yüzeyi üzerinde sabit bir doğrultu boyunca hareket etmekte olan bir gemi ya da uçak aslında bir eğri boyunca hareket eder. Dünya yüzeyi üzerindeki bütün meridyenleri sabit açıyla kesen bu eğrilere kerte hattı (rhumb line) adı verilir. Loksodrom; Latince'de kerte hattı ile eş anlama sahiptir ve daha çok geometri alanında kullanılan isimdir (Alexander, 2004). Loksodromlar bize hava ve deniz ulaşımında sabit pusula açısı altında, dünya yüzeyi üzerindeki iki nokta arasında (en kısa olmasa da) pratik bir güzergâh sunar (Kaufmann, 1980, s.33). Bu yüzden loksodromlar navigasyon çalışmalarında oldukça sık karşımıza çıkar.

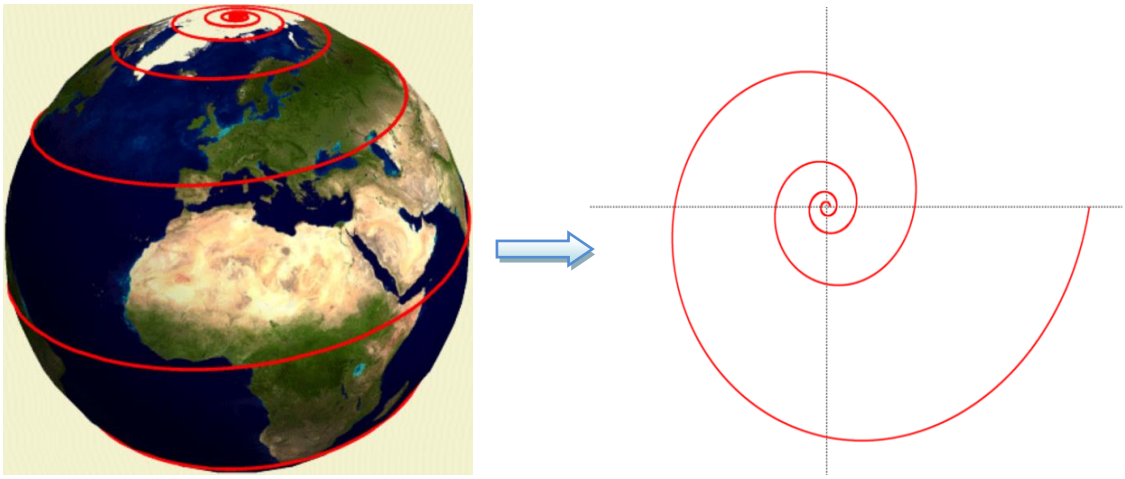
Dünya üzerindeki bütün meridyenleri 90° lik açıyla kesen loksodromlar paralel eğrilerinin kendisidir. Örneğin; New York ve Madrid şehirleri dünyamız üzerinde yaklaşık olarak 41° kuzey enlem paralelinde yer alır. Bu paralel boyunca düz bir çizgi gibi 90° lik pusula açısını değiştirmeden hareket eden bir uçak pratik bir şekilde New York şehrine varabilir. Merkatör izdüşümünde düz bir doğru gibi görünen yolumuz aslında 41° kuzey enlem eğrisidir (GIS Geography, 2020).



Resim 1.1. Loksodromun Merkatör İzdüşümü(GIS Geography, 2020)

Bu yöntem dünya yüzeyi üzerindeki aynı enlem paralelleri üzerinde olan şehirler için pratiktir fakat aynı enlem paralelleri üzerinde olmayan şehirler içinde loksodromlar bize kullanışlı, pratik bir yol sunar. Örneğin; başlangıç noktası olarak 52° kuzey enlem paralelinde yer alan Londra şehrini ve sabit pusula açısı olarak 80° alınırsa New York şehrine bir loksodromu takip ederek pratik bir şekilde varabiliriz (GIS Geography, 2020).

Dünya yüzeyi üzerindeki loksodromların steografik izdüşümü logaritmik spirallere karşılık gelir (Babaarslan ve Yayli, 2015, s.963).

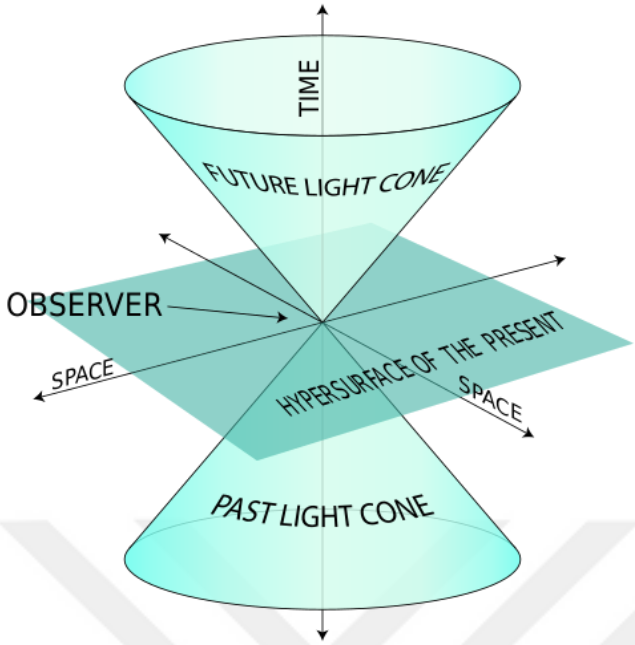


Resim 1.2. Loksodromun Stereografik İzdüşümü (Atractor, 2019; Babaarslan ve Yayli, 2015)

Dünyanın şekli tam bir küre olmasa da, şekli yaklaşık olarak dönel yüzeylerin özel durumları olan elipsoid veya dönel elipsoid olarak düşünülebilir. Bu yüzden bu yüzeyler üzerindeki loksodromlar önemlidir. 3-boyutlu uzayda loksodromları kavramak veya hayal etmek daha kolaydır. Fakat evreni anlamakta farklı bir bakış açısı getiren Minkowski 4-uzayında her gün üzerinde adım attığımız dünyamızı kavramak ve taşıdığı özellikleri algılamak daha zordur.

Albert Einstein'in özel görelilik kuramı kütle-çekim, ışık zaman gibi yapılara getirilen açıklamanın yanı sıra, evrenin temel taşları olarak nitelendirilen üç boyutlu yapıya (en-boy-yükseklik), yeni bir boyut kazandırarak ünlü Alman Matematikçi Hermann Minkowski'nin adı ile anılan Minkowski 4-uzayının oluşmasını sağlamıştır. Ayrıca bu kuram o güne kadar bilinen bu kavramlara farklı bakış açıları getirerek bu konudaki fikirlerin değişmesine neden olmuştur. Özellikle de zamanın üç boyutlu evren üzerinden akıp gittiği düşüncesine yeni bir anlam kazandırmış ve zamanın boyutlardan farklı olarak değil de kendisinin bir boyut oluşturduğunu ve uzay-zamanın büküldüğü fikrini ortaya atmıştır (Kaufmann, 1980, s.33).

Minkowski 4-uzayını temsili olarak;



Resim 1.3. Minkowski 4-uzayı (temsili) (Fronteri, 2012).

ile gösterebiliriz. Öklid metriği pozitif tanımlı olduğundan, Öklidiyen geometrideki vektör, doğru, çember, küre, vb. kavramları tek türlü iken; Minkowski 4-uzayında space-like (uzay-benzeri), time-like (zaman-benzeri), light-like (ışık-benzeri) olmak üzere üç sınıfa ayrılırlar. Uzay-benzeribir kavramın geometrisi Öklid uzayındakine benzer iken, zaman-benzeri ve ışık-benzeri olanların geometrileri ve yorumları farklıdır (Yaglom, 1979; Graciela ve Nomizu, 1984).

Öklid 3-uzayındaki küre üzerindeki loksodromların diferansiyel denklemi 1905 yılında Noble tarafından bulunmuştur (Noble, 1905). Minkowski 3-uzayındaki dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemi Babaarslan ve Munteanu (Babaarslan ve Munteanu, 2015) tarafından, Minkowski 3-uzayındaki dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemi, Babaarslan ve Yaylı (Babaarslan ve Yayli, 2014) tarafından çalışılmıştır. Minkowski 4-uzayında eliptik, hiperbolik tip dönel yüzeyler Dursun ve Bektaş (Bektaş ve Dursun, 2015) ve Cuong (Cuong, 2013) tarafından, yine Minkowski 4-uzayında parabolik tip dönel yüzeyler Dursun ve Bektaş (Bektaş ve Dursun, 2015) tarafından bulunmuştur. Öklid 4-uzayında dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemleri Babaarslan (Babaarslan, 2019) tarafından elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında, 2015 yılında Dursun ve Bektaş tarafından oluşturulan Minkowski 4-uzayında eliptik, hiperbolik ve parabolik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki meridyenleri sabit bir açı ile kesen space-like ve time-likelo ksodromların denklemleri elde edilecektir. Daha sonra elde edilen sonuçlara birer örnek verilerek loksodromların uzunlukları hesaplanacaktır. İzdüşüm yöntemiyle 4-boyuttan üç boyuta indirgenen time-like dönel yüzeylerin, time-like meridyenlerin, space-like ve time-like loksodromların grafikleri Mathematica programı kullanılarak çizilecektir. Bu tez çalışmasının, Minkowski 4-uzayının daha iyi anlaşılmasına katkı sağlaması, ayrıca navigasyon çalışmalarına da yardımcı olması beklenmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmaya esas olan Minkowski 4-uzayına ait bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1. *(x, y, z, w),* Minkowski 4-uzayının ($\mathbb{E}_1^4$) dik koordinat sistemi olmak üzere bu uzaydaki metrik tensör

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2 \tag{1}$$

eşitliğiyle verilir (Ratcliffe, 2006).

Metrik tensörün matris gösterimi (işaret matrisi)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Fronteri, 2012).

Tanım 2.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında a keyfi bir vektör olmak üzere $\langle a,a \rangle > 0$ ise bu vektöre space-like, $\langle a,a \rangle < 0$ ise bu vektöre time-like, $\langle a,a \rangle = 0$ ise bu vektöre light-like (null) vektör adı verilir (Ratcliffe, 2006).

Tanım 2.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında a herhangi bir vektör olmak üzere, a vektörünün normu

$$\|a\| = \sqrt{|\langle a,a \rangle|} \tag{2}$$

eşitliğiyle hesaplanır. Özel olarak $\|a\| = 1$ ise bu vektöre birim vektör adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.4. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $I \subset \mathbb{R}$ bir açık olmak üzere, $\varsigma : I \to \mathbb{E}_1^4$ bir düzgün ve regüler bir ς eğrisi alalım. Eğer $\langle \dot{\varsigma}, \dot{\varsigma} \rangle > 0$ ise bu eğriye space-like, $\langle \dot{\varsigma}, \dot{\varsigma} \rangle < 0$ ise bu eğriye time-like, $\langle \dot{\varsigma}, \dot{\varsigma} \rangle = 0$ ise bu eğriye light-like eğri adı verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.5. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $U \subset \mathbb{R}^2$ bir açık alt küme olmak üzere $S : U \to \mathbb{E}_1^4$ olmak üzere $\mathbb{E}_1^4$ uzayına gömülmüş düzgün bir S yüzeyi alalım. Eğer S yüzeyinin birinci

temel formu; Riemann metriği ise S yüzeyine space-like bir yüzey, eğer Lorentzian metrik ise S yüzeyine time-like bir yüzey denir. Eğer S yüzeyinin birinci temel formu non-dejenere ise S yüzeyine non-dejenere yüzey adı verilir (O'Neill, 1983).

Şimdi $\mathbb{E}_1^4$ uzayında dönel yüzey tanımını verelim.

Tanım 2.6. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $\Pi \subset \mathbb{E}_1^4$ bir hiperdüzlem olmak üzere $\beta : I \to \Pi$ düzgün bir profil eğrisi ve Π de bir P düzlemi alalım. β profil eğrisinin P düzlemi etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeye dönel yüzey denir (Bektaş ve Dursun, 2015).

$\mathbb{E}_1^4$ uzayında G işaret matrisi ve P düzlem olmak üzere P düzlemini sabit bırakan A dönme matrisi aşağıdaki şartları sağlar:

1) $det\, A = 1$,

2) $A^t.G.A = G$,

3) $A.P = P$ (Ratcliffe, 2006).

Böylece $\mathbb{E}_1^4$ uzayında üç farklı tip dönel yüzey vardır. İlk olarak eliptik tip dönel yüzey şu şekildedir:

$\mathbb{E}_1^4$ uzayının standart ortonormal bazı $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ olsun. Π_1 hiperdüzlemi, $Span\ \eta_1, \eta_3, \eta_4$ ve P_1 düzlemi, $Span\ \eta_3, \eta_4$ olsun.

$u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $x(u) > 0$ olmak üzere Π_1 hiper düzleminde $\beta_1(u) = x(u), 0, z(u), w(u)$ profil eğrisini alalım. $\beta_1(u)$ eğrisinin P_1 düzlemi etrafında döndürülmesiyle oluşan eliptik tip dönel yüzey $R_1(u,v)$ olmak üzere bu yüzeyin parametrik denklemi $u \in I$, $v \in [0, 2\pi]$ olmak üzere

$$R_1(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \\ w(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u)\cos v \\ x(u)\sin v \\ z(u) \\ w(u) \end{bmatrix}$$

ya da

$$R_1(u,v) = x(u)cosv, x(u)sinv, z(u), w(u) \tag{3}$$

şeklindedir (Bektaş ve Dursun, 2015). Burada

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi, P_1 düzlemini invaryant bırakan dönme matrisidir.

İkinci olarak hiperbolik tip dönel yüzey şu şekildedir:

Π_2 hiperdüzlemi, $Span\ \eta_1,\eta_2,\eta_4$ ve P_2 düzlemi, $Span\ \eta_1,\eta_2$ olsun. $u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $w(u) > 0$ olacak şekilde Π_2 hiperdüzleminde bir $\beta_2(u) = x(u),\ y(u),\ 0,\ w(u)$ profil eğrisi alalım. O halde hiperbolik tip dönel yüzey $R_2(u,v)$ olmak üzere bu yüzeyin parametrik denklemi $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$R_2(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & 0 & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ 0 \\ w(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ w(u)\sinh v \\ w(u)\cosh v \end{bmatrix}$$

veya

$$R_2(u,v) = x(u), y(u), w(u)sinh\ v, w(u)cosh\ v \tag{4}$$

şeklindedir (Bektaş ve Dursun, 2015). Burada P_2 düzlemini invaryant bırakan dönme matrisi

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh v & \sinh v \\ 0 & 0 & \sinh v & \cosh v \end{bmatrix}$$

dir.

Son olarak parabolik tip dönel yüzeyler şu şekildedir:

$\mathbb{E}_1^4$ uzayının yarı-ortonormal bazı $\eta_1,\eta_2,\xi_3,\xi_4$ olsun. Burada $\xi_3=(\eta_4-\eta_3)/\sqrt{2}$ ve $\xi_4=(\eta_3+\eta_4)/\sqrt{2}$ dir. Π_3 hiperdüzlemi, *Span* η_1,ξ_3,ξ_4 ve P_3 düzlemi, *Span* η_1,ξ_3 olsun. $u\in I\subset\mathbb{R}$ ve $w(u)>0$ olmak üzere Π_3 hiperdüzleminde bir $\beta_3(u)=x(u)\eta_1+z(u)\xi_3+w(u)\xi_4$ profil eğrisi alalım. O halde parabolik tip dönel yüzey $R_3(u,v)$ olmak üzere bu yüzeyin parametrik denklemi

$$R_3(u,v)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\sqrt{2}v\\0&\sqrt{2}v&1&v^2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(u)\\0\\z(u)\\w(u)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(u)\\\sqrt{2}vw(u)\\z(u)+v^2w(u)\\w(u)\end{bmatrix}$$

ya da

$$R_3(u,v)=x(u)\eta_1+\sqrt{2}vw(u)\eta_2+\ z(u)+v^2w(u)\ \xi_3+w(u)\xi_4,\ u\in I,\ v\in\mathbb{R} \qquad (5)$$

şeklindedir (Bektaş ve Dursun, 2015).

Burada işaret matrisi

$$G_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{bmatrix}$$

ve P_3 düzlemini sabit bırakan dönme matrisi

$$A_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&\sqrt{2}v\\0&\sqrt{2}v&1&v^2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 2.7. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında S bir yüzey ve bu yüzey üzerinde bir nokta $p=S(u,v)$ olsun. O halde S yüzeyinin p noktasındaki tanjant düzlemi $T_pS=span\ S_u,S_v$ şeklindedir.

$$E=\langle S_u,S_u\rangle,\ F=\langle S_u,S_v\rangle \text{ ve } G=\langle S_v,S_v\rangle$$

eşitlikleri birinci temel formun katsayıları olmak üzere S yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{6}$$

eşitliği ile verilir (O'Neill, 1983).

Burada $EG\text{-}F^2>0$ ise yüzey space-like, $EG\text{-}F^2<0$ ise yüzey time-likedir (Lopez, 2014).

Tanım 2.8. S yüzeyi üzerinde light-like olmayan bir eğrinin u_1 ile u_2 noktaları arasındaki yay-uzunluğu

$$s=\left|\int_{u_1}^{u_2}\sqrt{\left|E+2F\frac{dv}{du}+G\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right|}du\right| \tag{7}$$

ile verilir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.9. R, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında non-dejenere bir dönel yüzey olmak üzere R üzerindeki bütün non-dejenere meridyenleri aynı Lorentzian açı ile kesen eğri loksodrom olarak isimlendirilir.

3. TIME-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ SPACE-LIKE LOKSODROMLAR

Bu bölümde time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların denklemleri elde edilecektir. İlk olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 3.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında u bir space-like vektör ve v bir time-like vektör olsun. $\varphi \in \mathbb{R}^+ \cup 0$ sayısı bu vektörler arasındaki açı olmak üzere

$$\left|\langle u,v\rangle\right| = \|u\|\|v\| sinh\varphi \tag{8}$$

dir. Burada $\varphi \in \mathbb{R}^+ \cup 0$ sayısı u ve v vektörleri arasındaki Lorentzian time-like açı olarak adlandırılır (Ratcliffe, 2006).

Tanım 3.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, time-like dönel yüzey üzerindeki time-like meridyenleri sabit φ Lorentzian time-like açısıyla kesen space-like eğriye space-like loksodrom denir.

3.1. Eliptik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-Like Loksodromlar

Şimdi (3) eşitliğiyle verilen eliptik tip dönel yüzeyi göz önüne alalım. $u \in J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere β_1 profil eğrisini birim hızlı, yani $x'^2(u) + z'^2(u) - w'^2(u) = -1$ olarak alalım.

R_1 eliptik tip dönel yüzeyin kısmi türevleri

$$R_{1u}(u) = x'(u)cosv, x'(u)sinv, z'(u), w'(u) \tag{9}$$

ve

$$R_{1v}(v) = -x(u)sin\, v, x(u)cos\, v, 0, 0 \tag{10}$$

olarak bulunur. O halde R_1 yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= < R_{1u}, R_{1u} > = -1, \\ F &= < R_{1u}, R_{1v} > = 0, \\ G &= < R_{1v}, R_{1v} > = x^2(u) \end{aligned} \tag{11}$$

şeklindedir.

Basit bir hesaplamayla, $EG\text{-}F^2 = -x^2(u) < 0$ olur ki buradan R_1 yüzeyinin time-like bir dönel yüzey olduğu anlaşılır. Birinci temel form katsayılarından ve (6) eşitliğinden yararlanarak R_1 yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = -du^2 + x^2(u)dv^2 \tag{12}$$

eşitliğiyle ifade edilebilir.

R_1 dönel yüzeyi üzerindeki space-like loksodrom $\alpha_1(t) = R_1\ u(t), v(t)$ eşitliğiyle verilsin. $\alpha_1(t)$ eğrisinin R_1 yüzeyi üzerindeki bir time-like meridyenle kesiştiği $p = R_1(u,v)$ noktasındaki Lorentzian time-like açı φ olmak üzere bu noktada;

$$\begin{aligned} \varepsilon \sinh\varphi &= \frac{<\alpha_1'(t), R_{1u}>}{\|\alpha_1'(t)\|\|R_{1u}\|} \\ &= \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{-E^2du^2 - 2EFdudv - EGdv^2}} \\ &= \frac{-du}{\sqrt{-du^2 + x^2(u)dv^2}} \end{aligned} \tag{13}$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu denklemden faydalanarak R_1 eliptik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemi

$$x^2(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \coth^2\varphi \tag{14}$$

olarak bulunur. Bu denklemin genel çözümü $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$v(u) = \varepsilon \coth\varphi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{x(u)} du \tag{15}$$

şeklinde bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında eliptik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromlar

$$\alpha_1(u) = x(u)\cos v(u), x(u)\sin v(u), z(u), w(u) \tag{16}$$

eşitliğiyle ifade edilir. Burada $v(u) = \varepsilon \coth \varphi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{x(u)} du$ dir.

3.2. Hiperbolik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-Like Loksodromlar

(4) denklemiyle verilen hiperbolik tip dönel yüzeyi göz önüne alalım. R_2 hiperbolik tip time-like dönel yüzeyin kısmi türevleri

$$R_{2u}(u) = x'(u), y'(u), w'(u)\sinh v, w'(u)\cosh v \tag{17}$$

ve

$$R_{2v}(v) = 0, 0, w(u)\cosh v, w(u)\sinh v \tag{18}$$

şeklindedir. (17) ve (18) eşitliklerinden yararlanarak R_2 yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= < R_{2u}, R_{2u} > = -1, \\ F &= < R_{2u}, R_{2v} > = 0, \\ G &= < R_{2v}, R_{2v} > = w^2(u) \end{aligned} \tag{19}$$

olarak bulunur.

$EG\text{-}F^2 = -w^2(u) < 0$ olduğundan R_2 dönel yüzeyi, time-like bir dönel yüzeydir. Birinci temel form katsayılarından yararlanarak R_2 yüzeyinin birinci temel formu

$$\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ &= -du^2 + w^2(u)dv^2 \end{aligned} \tag{20}$$

şeklindedir.

$\alpha_2(t) = R_2\ u(t), v(t)$ eğrisinin R_2 yüzeyi üzerindeki bir time-like meridyenle kesiştiği $p = R_2(u,v)$ noktasındaki Lorentzian time-like açı φ olmak üzere bu noktada;

$$\varepsilon sinh\varphi = \frac{< \alpha_2'(t), R_{2u} >}{\|\alpha_2'(t)\|\|R_{2u}\|}$$

$$= \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{-E^2du^2 - 2EFdudv - EGdv^2}} \tag{21}$$

$$= \frac{-du}{\sqrt{-du^2 + w^2(u)dv^2}}$$

eşitliği vardır.

(21) denkleminden faydalanarak R_2 hiperbolik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların diferansiyel denklemi;

$$w^2(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = coth^2\varphi \tag{22}$$

olarak hesaplanır.

Bu denklemin genel çözümü

$$v(u) = \varepsilon coth\varphi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)} du \tag{23}$$

dir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında hiperbolik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromlar

$$\alpha_2(u) = x(u), y(u), w(u)sinh\, v(u), w(u)cosh\, v(u) \tag{24}$$

şeklindedir. Burada $v(u) = \varepsilon coth\varphi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)} du$ dir.

3.3. Parabolik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Space-Like Loksodromlar

(5) eşitliğiyle verilen parabolik tip dönel yüzeyi göz önüne alalım. $u \in J \subset \mathbb{R}$ olmak üzere β_3 profil eğrisi birim hızlı, yani $x'^2(u) - 2z'(u)w'(u) = -1$ olsun.

R_3 parabolik tip dönel yüzeyin kısmi türevleri

$$R_{3u}(u) = x'(u)\eta_1 + \sqrt{2}vw'(u)\eta_2 + (z'(u) + v^2 w'(u))\xi_3 + w'(u)\xi_4 \tag{25}$$

ve

$$R_{3v}(v) = \sqrt{2}w(u)\eta_2 + 2vw(u)\xi_3 \tag{26}$$

şeklindedir. Buradan R_3 dönel yüzeyinin birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= < R_{3u}, R_{3u} > = -1, \\ F &= < R_{3u}, R_{3v} > = 0, \\ G &= < R_{3v}, R_{3v} > = 2w^2(u) \end{aligned} \tag{27}$$

olur.

$EG\text{-}F^2 = -2w^2(u) < 0$ olduğundan R_3 yüzeyinin time-like bir dönel yüzey olduğu anlaşılır. (6) eşitliğinden yararlanarak R_3 yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2 = -du^2 + 2w^2(u)dv^2 \tag{28}$$

şeklinde yazılabilir.

R_3 yüzeyi üzerindeki space-like loksodrom eğrisinin $\alpha_3(t) = R_3\ u(t), v(t)$ eşitliğiyle verildiğini varsayarsak, $\alpha_3(t)$ eğrisinin R_3 yüzeyi üzerindeki time-like meridyenlerle kesiştiği $p = R_3(u,v)$ noktasındaki Lorentzian time-like açı

$$\begin{aligned} \varepsilon \sinh\varphi &= \frac{< \alpha_3'(t), R_{3u} >}{\|\alpha_3'(t)\| \|R_{3u}\|} \\ &= \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{-E^2du^2 - 2EFdudv - EGdv^2}} \\ &= \frac{-du}{\sqrt{-du^2 + 2w^2(u)dv^2}} \end{aligned} \tag{29}$$

eşitliği ile verilir. Bu denklemden space-like loksodromun diferansiyel denklemi

$$2w^2(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = coth^2\varphi \tag{30}$$

ve denklemin genel çözümü $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon coth\varphi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)} du \tag{31}$$

şeklinde bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında parabolik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromlar

$$\alpha_3(u) = x(u)\eta_1 + \sqrt{2}v(u)w(u)\eta_2 + \ z(u) + v^2(u)w(u)\ \xi_3 + w(u)\xi_4 \tag{32}$$

şeklindedir ve burada $v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon coth\varphi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)} du$ dir.

Ayrıca aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromların u_1 ile u_2 noktaları arasındaki yay-uzunluğu

$$s = \left|\frac{u_2 - u_1}{sinh\varphi}\right| \tag{33}$$

dir.

İspat: İspatı, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında eliptik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromlar için yapalım. (7) denkleminde, (11) denklemindeki E, F, G katsayıları yerine yazılırsa

$$s = \left|\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left|-1 + x^2\ u\ \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right|} du\right|$$

elde edilir. Burada, (14) denklemindeki $\left(\frac{dv}{du}\right)^2$ için elde edilen sonuç yazılırsa

$$s = \left| \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left| -1 + x^2 \;\; u \left\{ \frac{\coth^2 \varphi}{x^2 \;\; u} \right\} \right|} du \right|$$

$$= \left| \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left| \coth^2 \varphi - 1 \right|} du \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\sinh \varphi} \int_{u_1}^{u_2} du \right|$$

$$= \left| \frac{u_2 - u_1}{\sinh \varphi} \right|$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. Diğer tipteki time-like dönel yüzeyler üzerindeki space-like loksodromlar için de benzer işlemler yapılarak sonuca ulaşılır.

Şimdi elde ettiğimiz sonuçlara birer örnek verelim.

3.4. Örnekler

Örnek 3.1. β_1 time-like profil eğrisini $\beta_1(u) = \sqrt{2}\cosh u,\ 0,\ u,\ \sqrt{2}\sinh u$ olarak alalım. Buradan R_1 eliptik tip time-like dönel yüzeyi

$$R_1(u,v) = \sqrt{2}\cosh u \cos v, \sqrt{2}\cosh u \sin v, u, \sqrt{2}\sinh u \tag{34}$$

dir.

Teorem 3.1. de, $\varepsilon = 1$ ve $\varphi = 2$ alalım. Ayrıca $u_0 = 0$ ise $v(u) = \sqrt{2}\coth 2 \left(\arctan \left[\tanh \frac{u}{2} \right] \right)$ dir.

$u \in (-2,2)$ için $v \in (-0.954831, 0.954831)$ dir.

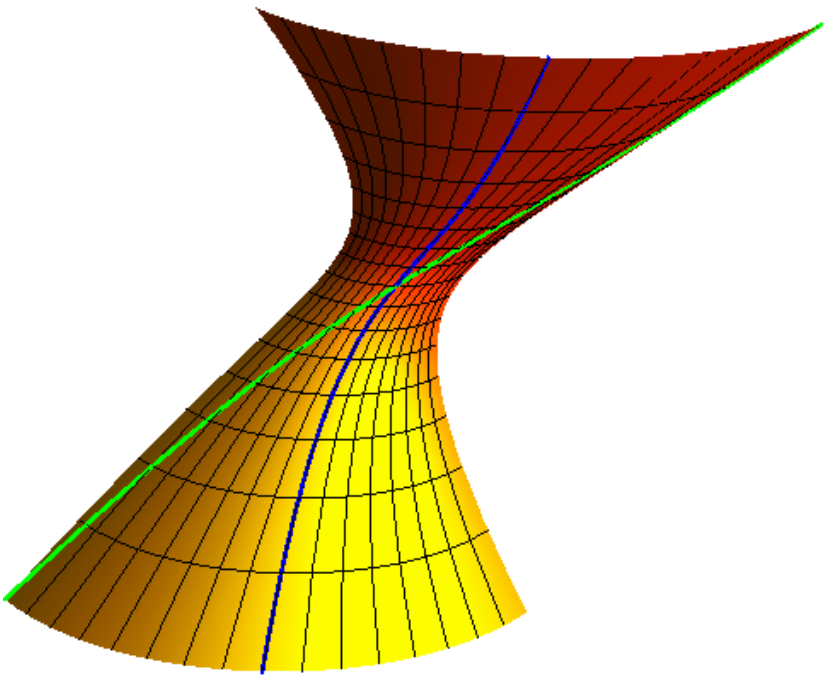
O halde space-like loksodromun denklemi

$$\alpha_1(u) = \sqrt{2}\cosh u \cos v(u), \sqrt{2}\cosh u \sin v(u), u, \sqrt{2}\sinh u \tag{35}$$

dir. Burada $v(u) = \sqrt{2}\coth 2 \arctan \left(\tanh \frac{u}{2} \right)$ dir.

(33) denkleminden yararlanarak, eliptik tip time-like dönel yüzey üzerindeki space-like loksodromun $u \in (-2,2)$ aralığındaki uzunluğu 1.10288 dir.

$\mathbb{E}_1^4$ deki time-like dönel yüzeyin, time-like meridyenin $(v=0)$ ve space-like loksodromun $\mathbb{E}_1^3$ uzayına izdüşümleri Mathematica programında; $ParametricPlot3D\left[\{x(u,v),y(u,v)+z(u,v),w(u,v)\},\{u,a,b\},\{v,c,d\}\right]$ komutu yardımıyla, aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.1. Eliptik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi (mavi), space-like loksodromun (yeşil) izdüşümleri

Örnek 3.2. β_2 time-likeprofil eğrisini $\beta_2(u) = sinu, cosu, 0, \sqrt{2}u$ şeklinde alalım. Buradan (4) eşitliğindeki R_2 hiperbolik tip time-like dönel yüzeyi

$$R_2(u,v) = sinu, cosu, \sqrt{2}usinhv, \sqrt{2}ucoshv \tag{36}$$

dir.

Teorem 3.2. de, $\varepsilon = 1$ ve $\varphi = 2$ alalım. Ayrıca $u_0 = 1$ ise $v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} coth 2 \ log u$ dır.

$u \in (\frac{1}{2},2)$ için $v \in (-0.508418, 0.508418)$ dir.

O halde space-like loksodromun denklemi

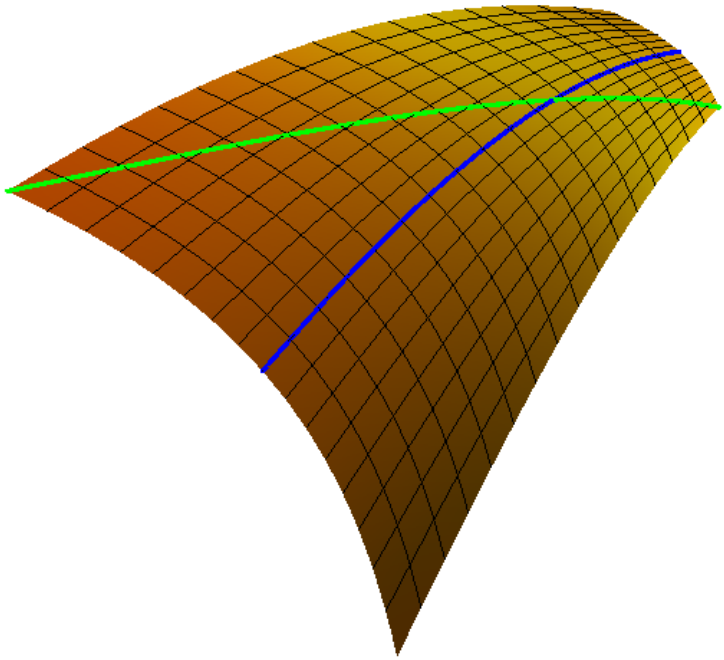
$$\alpha_2(u) = \ sinu, cosu, \sqrt{2}usinhv(u), \sqrt{2}ucoshv(u) \tag{37}$$

dır. Burada $v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} coth 2 \ \log u$ dır.

Space-like loksodromun $u \in (\frac{1}{2}, 2)$ aralığındaki uzunluğu 0.413581 dir.

$\mathbb{E}_1^4$ deki hiperbolik tip time-like dönel yüzeyin, time-like meridyenin $(v = 0)$ ve space-like loksodromun $\mathbb{E}_1^3$ uzayına izdüşümleri, Mathematica programında;

$ParametricPlot3D\left[\{x(u,v)+y(u,v),z(u,v),w(u,v)\},\{u,a,b\},\{v,c,d\}\right]$ komutuyla çizilirse aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 3.2. Hiperbolik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi (mavi), space-like loksodromun (yeşil) izdüşümleri

Örnek 3.3. β_3 time-like profil eğrisini $\beta_3(u) = coshue_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} sinhu\xi_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} sinhu\xi_4$ şeklinde alalım. Buradan R_3 parabolik tip time-like dönel yüzeyi

$$R_3(u,v) = coshu\eta_1 + vsinhu\eta_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} sinhu\ \ 1+v^2\ \ \xi_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} sinhu\xi_4 \qquad (38)$$

dir.

Teorem 3.3. de, $\varepsilon = 1$ ve $\varphi = 3$ olarak alalım. Ayrıca $u_0 = 1$ ise $v(u) = coth3log\left(tanh\frac{u}{2}\right) + 0.775773$ dir.

$u \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ için $v \in (-1.41382, -0.27369)$ dır.

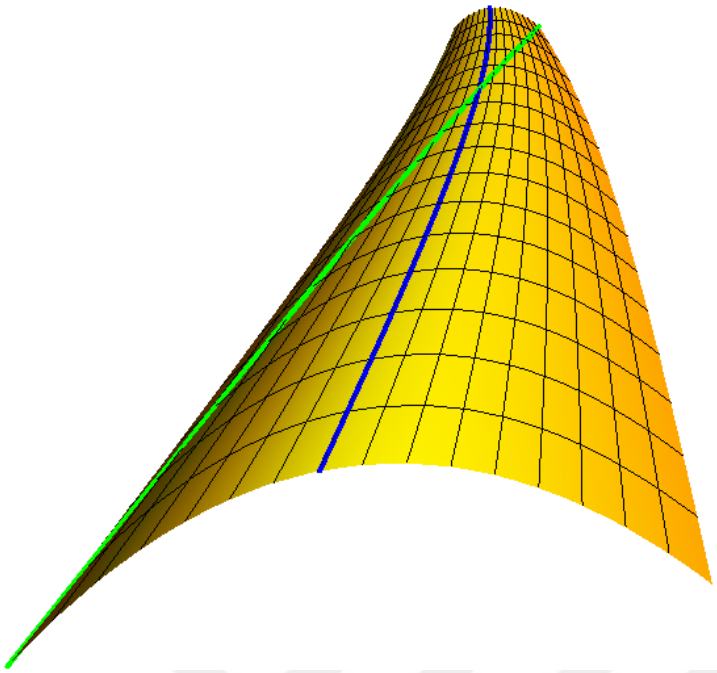
Böylece space-like loksodromun denklemi

$$\alpha_3(u) = coshun_1 + v(u)sinhun_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} sinhu\ \ 1+v^2(u)\ \ \xi_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} sinhu\xi_4 \qquad (39)$$

dir, burada $v(u) = coth3log\left(tanh\frac{u}{2}\right) + 0.775773$ dir.

(33) denkleminden yararlanarak, parabolik tip time-like dönel yüzey üzerindeki space-like loksodrom eğrisinin uzunluğu $u \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ için 0.149732 dir.

$\mathbb{E}_1^4$ deki parabolik tip time-like dönel yüzeyin, time-like meridyenin $(v = 0)$ ve space-like loksodromun $\mathbb{E}_1^3$ deki izdüşümleri Mathematica programında; $ParametricPlot3D\left[\{x(u,v)+y(u,v), z(u,v), w(u,v)\}, \{u,a,b\}, \{v,c,d\}\right]$ komutuyla aşağıdaki şekilde elde edilir.



Şekil 3.3. Parabolik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi (mavi), space-like loksodromun (yeşil) izdüşümleri

4. TIME-LIKE DÖNEL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ TIME-LIKE LOKSODROMLAR

Bu bölümde time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların denklemleri elde edilecektir. İlk olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 4.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında u ve v birer time-like vektör ve $\psi \in \mathbb{R}^+ \cup 0$ sayısı bu vektörler arasındaki açı olmak üzere

$$\left|\langle u,v\rangle\right| = \|u\|\|v\| cosh\,\psi \tag{40}$$

dir. Burada $\psi \in \mathbb{R}^+ \cup 0$ reel sayısı u ve v vektörleri arasındaki Lorentzian time-like açı olarak adlandırılır (Ratcliffe, 2006).

Tanım 4.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında, time-like dönel yüzey üzerindeki time-like meridyenleri sabit ψ Lorentzian time-like açısıyla kesen time-like eğriye time-like loksodrom denir.

4.1. Eliptik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Time-Like Loksodromlar

(3) eşitliğinde verilen eliptik tip dönel yüzeyi göz önüne alalım.

R_1 dönel yüzeyi, (3.1) alt başlığındaki dönel yüzeyle aynı olduğundan birinci temel formu (12) eşitliği ile aynıdır.

R_1 dönel yüzeyi üzerindeki time-like loksodromu $\sigma_1(t) = R_1\ u(t),v(t)$ eşitliğiyle verelim. $\sigma_1(t)$ eğrisinin R_1 dönel yüzeyi üzerindeki bir time-like meridyenle kesiştiği $p = R_1(u,v)$ noktasındaki Lorentzian time-like açı ψ olmak üzere bu noktada;

$$-cosh\,\psi = \frac{<\sigma_1'(t),R_{1u}>}{\|\sigma_1'(t)\|\|R_{1u}\|}$$

$$= \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E^2du^2 + 2EFdudv + EGdv^2}} \tag{41}$$

$$= \frac{-du}{\sqrt{du^2 - x^2(u)dv^2}}$$

eşitliği vardır.

Buradan R_1 eliptik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemi

$$x^2(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = tanh^2\psi \tag{42}$$

ve bu denklemin genel çözümü $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$v(u) = \varepsilon \tanh\psi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{x(u)} du \tag{43}$$

dır.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında eliptik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromlar

$$\sigma_1(u) = x(u)cosv(u), x(u)sinv(u), z(u), w(u) \tag{44}$$

eşitliğiyle ifade edilir. Burada $v(u) = \varepsilon \tanh\psi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{x(u)} du$ dir.

4.2. Hiperbolik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Time-Like Loksodromlar

(4) eşitliğiyle verilen hiperbolik tip time-like dönel yüzeyi ele alalım.

R_2 hiperbolik tip time-like dönel yüzeyin birinci temel formu (3.2) alt başlığındaki birinci temel form ile aynıdır.

R_2 dönel yüzeyi üzerindeki bir meridyenin time-like loksodrom $\sigma_2(t) = R_2\ u(t), v(t)$ ile kesiştiği $p = R_2(u,v)$ noktasında Lorentzian time-like açı ψ olmak üzere;

$$-\cosh\psi = \frac{<\sigma_2'(t), R_{2u}>}{\|\sigma_2'(t)\|\|R_{2u}\|}$$

$$= \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E^2du^2 + 2EFdudv + EGdv^2}} \tag{45}$$

$$= \frac{-du}{\sqrt{du^2 - w^2(u)dv^2}}$$

eşitliği vardır.

(45) eşitliğinden yararlanarak hiperbolik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların diferansiyel denklemi;

$$w^2(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \tanh^2\psi \tag{46}$$

ve denklemin genel çözümü $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$v(u) = \varepsilon \tanh\psi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)} du \tag{47}$$

dır.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.2. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında hiperbolik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromlar

$$\sigma_2(u) = x(u), y(u), w(u)\sinh v(u), w(u)\cosh v(u) \tag{48}$$

eşitliğiyle ifade edilir. Burada $v(u) = \varepsilon \tanh\psi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)} du$ dir.

4.3. Parabolik Tip Time-Like Dönel Yüzeyler Üzerindeki Time-Like Loksodromlar

Son olarak (5) ifadesinde verilen parabolik tipteki time-like dönel yüzeyleri göz önüne alalım. R_3 dönel yüzeyinin birinci temel formu (28) eşitliği ile aynıdır.

R_3 dönel yüzeyi üzerindeki bir meridyenin, time-like loksodrom $\sigma_3(t) = R_3\ u(t),v(t)$ ile kesiştiği $p = R_3(u,v)$ noktasında

$$-\cosh\psi = \frac{<\sigma_3'(t), R_{3u}>}{\|\sigma_3'(t)\|\|R_{3u}\|}$$

$$= \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E^2du^2 + 2EFdudv + EGdv^2}} \tag{49}$$

$$= \frac{-du}{\sqrt{du^2 - 2w^2(u)dv^2}}$$

eşitliği vardır. Buradan time-like loksodromun diferansiyel denklemi

$$2w^2(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \tanh^2\psi \tag{50}$$

ve denklemin genel çözümü $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere

$$v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon \tanh\psi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)}du \tag{51}$$

dır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebiliriz.

Teorem 4.3. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında parabolik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromlar

$$\sigma_3(u) = x(u)\eta_1 + \sqrt{2}v(u)w(u)\eta_2 + \ z(u) + v^2(u)w(u)\ \xi_3 + w(u)\xi_4 \tag{52}$$

ile ifade edilir. Burada $v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon \tanh\psi \int_{u_0}^{u} \frac{1}{w(u)}du$ dir.

Ayrıca aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 4.1. $\mathbb{E}_1^4$ uzayında time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromların u_1 ile u_2 noktaları arasındaki yay-uzunluğu

$$s = \left| \frac{u_2 - u_1}{\cosh \psi} \right| \tag{53}$$

dir.

İspat: İspatı, $\mathbb{E}_1^4$ uzayında hiperbolik tip time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromlar için yapalım.

(19) denklemindeki E, F, G katsayıları (7) denkleminde yazılırsa

$$s = \left| \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left| -1 + w^2 \ u \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right|} du \right|$$

dir. (46) denklemindeki $\left(\frac{dv}{du} \right)^2$ için elde edilen sonuç yerine yazılırsa

$$s = \left| \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left| -1 + w^2 \ u \left(\frac{\tanh^2 \psi}{w^2 \ u} \right) \right|} du \right|$$

$$= \left| \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left| \tan^2 \psi - 1 \right|} du \right|$$

$$= \left| \frac{1}{\cosh \psi} \int_{u_1}^{u_2} du \right|$$

$$= \left| \frac{u_2 - u_1}{\sinh \psi} \right|$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. Diğer tipteki time-like dönel yüzeyler üzerindeki time-like loksodromlar için de benzer işlemler yapılarak sonuca ulaşılır.

Şimdi bazı örnekler verelim.

4.4.Örnekler

Örnek 4.1. β_1 time-like profil eğrisi $\beta_1(u) = \left(u^2 + 1,\ 0,\ \frac{4}{3} u\sqrt{u},\ u^2 + u \right)$ olarak alınırsa,

R_1 eliptik tip time-like dönel yüzeyi

$$R_1(u,v)=\left((u^2+1)cosv,(u^2+1)sinv,\frac{4}{3}u\sqrt{u},u^2+u\right) \tag{54}$$

dır.

Teorem 4.1. de, $\varepsilon=1, \psi=2$ ve $u_0=1$ alınırsa $v(u)=tanh2\ arctanu\ -0.75714$ dır. Ayrıca $u\in(0,2)$ için $v\in\ -0.75714,0.31017$ dır.

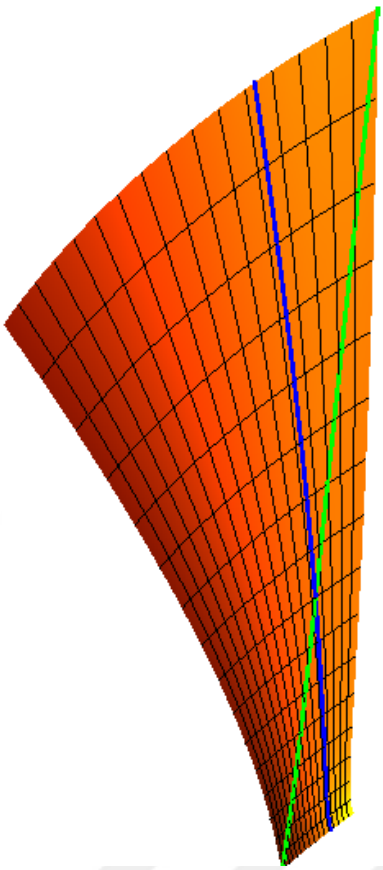
Böylece time-like loksodromun denklemi

$$\sigma_1(u)=\left((u^2+1)cosv(u),(u^2+1)sinv(u),\frac{4}{3}u\sqrt{u},u^2+u\right), \tag{55}$$

dir, burada $v(u)=tanh2\ arctanu\ -0.75714$ dır.

Eliptik tip time-like dönel yüzey üzerindeki time-like loksodromun $u\in(0,2)$ aralığındaki uzunluğu $0,531604$ dır.

$\mathbb{E}_1^4$ deki time-like dönel yüzeyin, time-like meridyeninin $(v=0)$ ve time-like loksodromunun $\mathbb{E}_1^3$ uzayına izdüşümleri Mathematica programında; $ParametricPlot3D\left[\{x(u,v),y(u,v)+z(u,v),w(u,v)\},\{u,a,b\},\{v,c,d\}\right]$ komutuyla aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 4.1. Eliptik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi (mavi), time-like loksodromun (yeşil) izdüşümleri

Örnek 4.2. β_2 time-like profil eğrisini $\beta_2(u) = (\sqrt{2}coshu,\ 0,\ u,\ \sqrt{2}sinhu)$ olarak alalım.

Buradan R_2 hiperbolik tip time-like dönel yüzeyi

$$R_2(u,v) = \sqrt{2}coshu, u, \sqrt{2}sinhusinhv, \sqrt{2}sinhucoshv \tag{56}$$

dir. Teorem 4.2. de, $\varepsilon = 1$ ve $\psi = 2$ alalım. Ayrıca $u_0 = 1$ ise $v(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} tanh\, 2\, log\left(tanh\frac{u}{2}\right) + 0.526206$ dır.

Ayrıca $u \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ için $v \in (-0.432787, 0.340559)$ dır.

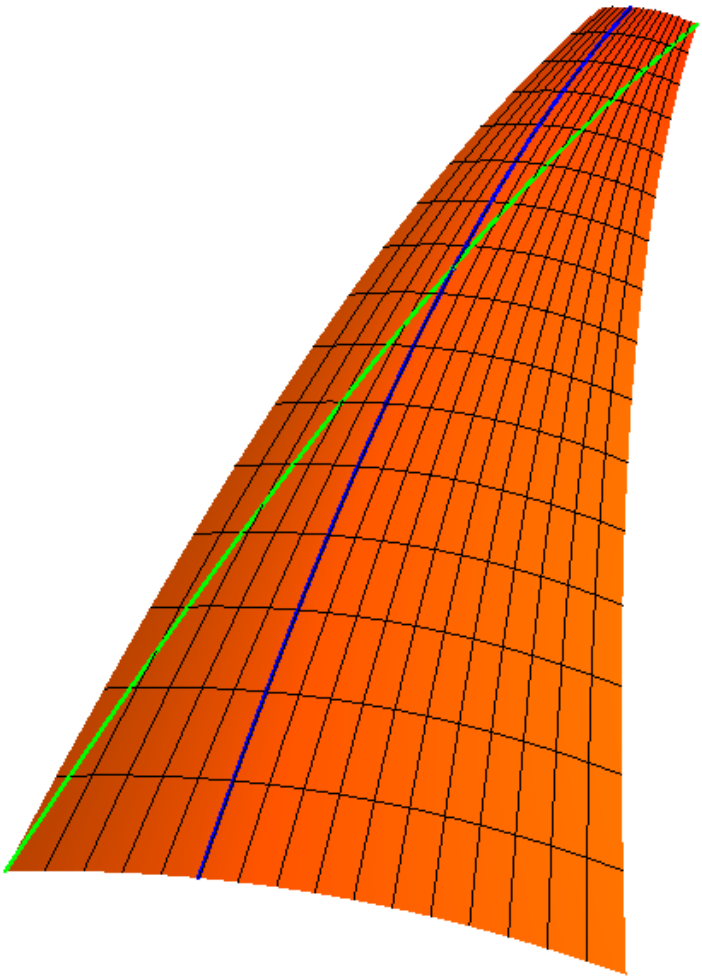
Buradan time-like loksodromun denklemi

$$\sigma_2(u) = \sqrt{2}coshu, u, \sqrt{2}sinhusinhv(u), \sqrt{2}sinhucoshv(u)\ , \tag{57}$$

dir, burada $v(u)=\frac{1}{\sqrt{2}}\tanh 2\log\left(\tanh\frac{u}{2}\right)+0.526206$ dir.

Ayrıca hiperbolik tip time-like dönel yüzey üzerindeki time-like loksodromun $u\in\left(\frac{1}{2},2\right)$ aralığındaki uzunluğu 0.398703 dır.

$\mathbb{E}_1^4$ deki time-like dönel yüzeyin, time-like meridyenin $(v=0,1)$ ve time-like loksodromun $\mathbb{E}_1^3$ uzayına izdüşümleri Mathematica programının; $ParametricPlot3D\left[\{x(u,v),y(u,v)+z(u,v),w(u,v)\},\{u,a,b\},\{v,c,d\}\right]$ komutu yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 4.2. Hiperbolik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi (mavi), time-like loksodrom (yeşil) izdüşümleri

Örnek 4.2. β_3 time-like profil eğrisini $\beta_3(u) = 2\sqrt{e^u}\eta_1 + (u - e^{-u})\xi_3 + \frac{e^u}{2}\xi_4$ alalım. O halde R_3 time-like parabolik tip dönel yüzeyi

$$R_3(u,v) = 2\sqrt{e^u}\eta_1 + \sqrt{2}v\frac{e^u}{2}\eta_2 + \left(u - e^{-u} + v^2\frac{e^u}{2}\right)\xi_3 + \frac{e^u}{2}\xi_4 \tag{58}$$

dir. Teorem 4.3. de, $\varepsilon = 1$ ve $\psi = 2$ olarak alalım. Ayrıca $u_0 = 0$ ise $v(u) = \sqrt{2}\tanh 2\ \sqrt{1 - e^{-u}}$ dır.

$u \in (-1,1)$ için $v \in (-2.342603, 0.861796)$ dir.

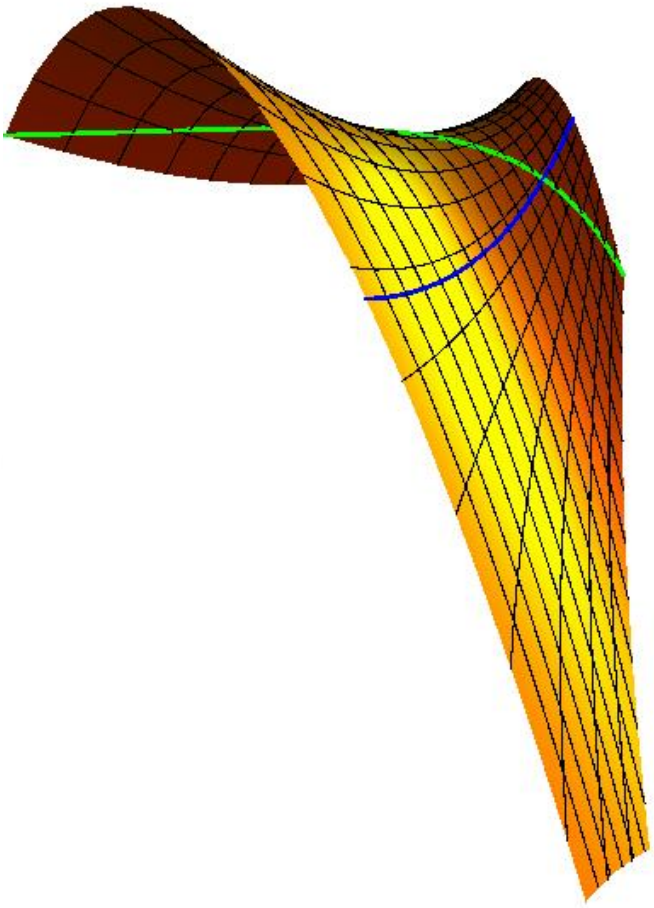
Böylece time-like loksodromun denklemi

$$\sigma_3(u) = 2\sqrt{e^u}\eta_1 + \sqrt{2}v(u)\frac{e^u}{2}\eta_2 + \left(u - e^{-u} + v(u)^2\frac{e^u}{2}\right)\xi_3 + \frac{e^u}{2}\xi_4, \tag{59}$$

dir. Burada $v(u) = \sqrt{2}\tanh 2\ \sqrt{1 - e^{-u}}$ dir.

Ayrıca time-like loksodromun $u \in (-1,1)$ aralığındaki uzunluğu 0.531604 dır.

$\mathbb{E}_1^4$ deki parabolik tip time-like dönel yüzeyin, time-like meridyenin $(v = -1)$ ve time-like loksodromun $\mathbb{E}_1^3$ uzayına izdüşümleri Mathematica programında; $ParametricPlot3D\left[\{x(u,v)+y(u,v), z(u,v), w(u,v)\}, \{u,a,b\}, \{v,c,d\}\right]$ komutuyla aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 4.3. Parabolik tip time-like dönel yüzey, time-like meridyen eğrisi (mavi), time-like loksodrom (yeşil) izdüşümleri

5. SONUÇ

Minkowski 4-uzayında eliptik, hiperbolik tip dönel yüzeylerinin denklemi Dursun ve Bektaş (Bektaş ve Dursun, 2015) ve Cuong (Cuong, 2013) tarafından, ayrıca Minkowski 4-uzayında parabolik tip dönel yüzeylerinin denklemi Dursun ve Bektaş (Bektaş ve Dursun, 2015) tarafından elde edilmiştir. Öklid 4-uzayında dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemleri Babaarslan (Babaarslan, 2019) tarafından elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında, Minkowski 4-uzayında eliptik, hiperbolik ve parabolik tip time-like dönel yüzeylerinin üzerindeki loksodromların diferansiyel denklemleri bulundu ve elde edilen sonuçlara birer örnek verildi. Ayrıca Mathematica programı kullanılarak, time-like dönel yüzeylerin, time-like meridyenlerin ve loksodromların grafikleri çizildi. Elde edilen sonuçların, navigasyon çalışmalarına katkı sağlaması beklenmektedir.

KAYNAKLAR

Alexander, J. Loxodromes: A Rhumb Wayto Go, Math. Mag., 77 (2004), 349-356.

Babaarslan M., Loxodromes on helicoidal surfaces and tube with variable radius in Common. Fac. Sci. Univ. Ank.,Sér. A1, Math. Stat. 68 (2019) 1950-1958.

Babaarslan M. And Munteanu M. I., Time-like loxodromes on rotational surfaces in Minkowski 3-space, An. Ştiinţ. Univ. Al. I. CuzaIaşi, Ser. Nouă, Mat. 61 (2015) 471-484.

Babaarslan, M. And Yayli, Y., Differential Equation of the Loxodrome on a Helicoidal Surface, Journal of Navigation, 68(2015), 962-970.

Babaarslan M. And Yayli Y., Space-like loxodromes on rotational surfaces in Minkowski 3-space, J. Math. Anal. Appl. 409 (2014) 288-298.

Bektaş B. and Dursun U., Time-like Rotational Surfaces of Elliptic, Hyperbolic and Parabolic Types in Minkowski Space with Pointwise 1-Type Gauss Map, Filomat. 29 (2015) 381-392.

Cuong D. V.,Surfaces of Revolution with Constant Gaussian Curvature in Four-Space, Asian-Eur. J. Math. 6 (2013) 1350021.

Graciela, S. B. And Nomizu, K., Trigonometry in Lorentzian Geometry, The American Mathematical Monthly, Vol. 91, No. 9, 543-549, 1984.

İnternet: ATRACTOR, A Curva Loxodrómica e Duas Projecções da Esfera (Meredianose Paralelos) URL: https://www.atractor.pt/mat/loxodromica/meridianos_paralelos.html# Son Erişim Tarihi: 17.09.2019.

İnternet: GIS Geography, Why Are Rhumb Lines (Loxodromes) a Constant Track Direction? (and not the Shor test Path), URL: https://gisgeography.com/rhumb-lines-loxodromes/, Son Erişim Tarihi: 17.10.2020.

Kaufmann W. J. (Çeviren: Sacit Tameroğlu), Rölativite ve Kozmoloji, Onur Yayınları, 1980, syf 33.

Lopez, R.,Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space, International Electronic Journal of Geometry, 7(2014), 44-107.

Noble C. A.,Note on loxodromes, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1905) 116-119.

O'Neill B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Pure and Applied Mathematics (New York, 1983).

Paul A. Fronteri, The Geometry behind the Special Relativity Theory, Universitas Bergensis Bachelor Project in Mathematics, 4 (2012), 4, 6.

RatcliffeJ. G., Foundations of Hyperbolic Manifolds (Springer, 2006).

Yaglom, I. M., A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis, Springer-Verlag, 1979.