T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER VE DEĞİŞKEN YARIÇAPLI TÜPLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR

Hamide Sevda TÜFEKÇİ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

YOZGAT 2020

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER VE DEĞİŞKEN YARIÇAPLI TÜPLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR

Hamide Sevda TÜFEKÇİ

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

YOZGAT 2020

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **iii**

ABSTRACT ..... **iv**

TEŞEKKÜR ..... **v**

ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **vi**

KISALTMALAR LİSTESİ ..... **vii**

1. GİRİŞ **1**

2. TEMEL KAVRAMLAR **2**

3. ÖKLİD 3-UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR..... **5**

4. ÖKLİD 3-UZAYINDA KANAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR..... **13**

5. ÖKLİD 4-UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR **21**

6. ÖKLİD 4-UZAYINDA DEĞİŞKEN YARIÇAPLI TÜPLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR..... **27**

SONUÇ **32**

KAYNAKLAR **33**

ÖZGEÇMİŞ **35**

4-BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER VE DEĞİŞKEN YARIÇAPLI TÜPLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR

Hamide Sevda TÜFEKÇİ

Yozgat Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2020; Sayfa:35

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

ÖZET

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde, Öklid 3-uzayı $\mathbb{R}^3$ teki loksodromlar ile ilgili yapılan çalışmalardan bahsedildi. Aynı zamanda, Öklid 4-uzayı $\mathbb{R}^4$ teki dönel yüzeyler, helikoidal yüzeyler ve kanal yüzeylerden bahsedildi. İkinci bölümde, $\mathbb{R}^4$ teki eğriler ve yüzeyler ile ilgili bazı temel tanım ve formüller verildi. Üçüncü bölümde, Öklid 3-uzayı $\mathbb{R}^3$ teki dönel yüzeylerin ve helikoidal yüzeylerin tanımları ve parametrizasyonları verildi. Daha sonra loksodromların denklemleri oluşturuldu ve bazı örnekler verildi. Dördüncü bölümde, Öklid 3-uzayı $\mathbb{R}^3$ teki kanal yüzeyin tanımı ve parametrizasyonu verildi. Daha sonra loksodromların denklemleri oluşturuldu ve bazı örnekler verildi. Beşinci bölümde, $\mathbb{R}^4$ teki helikoidal yüzeyler ve dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların parametrizasyonları bulundu. Buna ek olarak bir örnek verildi ve ilgili grafikler çizildi. Altıncı bölümde, $\mathbb{R}^4$ teki değişken yarıçaplı tüpler üzerindeki loksodromların parametrizasyonları bulundu. Ayrıca bir örnek verildi ve ilgili grafikler çizildi.

Anahtar Kelimeler : Loksodrom, Helikoidal Yüzey, Değişken Yarıçaplı Tüp.

LOXODROMES ON HELICOIDAL SURFACES AND TUBES WITH VARIABLE RADIUS IN EUCLIDEAN 4-SPACE

Hamide Sevda TÜFEKÇİ

Yozgat Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2020; Page:35

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat BABAARSLAN

ABSTRACT

In the first part of this thesis, the studies regarding loxodromes in Euclidean 3-space $\mathbb{R}^3$ were mentioned. Also, rotational surfaces, helicoidal surfaces and tubes with variable radius surfaces in Euclidean 4-space $\mathbb{R}^4$ were mentioned. In the second part, some fundamental definitions and formulas related to curves and surfaces in $\mathbb{R}^4$ were given. In the third chapter, definitions and parameterizations of the rotational surfaces and helicoidal surfaces in Euclidean 3-space are given. Then, the equations of loxodromes were obtained and some examples were given. In the fourth section, the definition and parameterization of the canal surface in Euclidean 3-space is given. Then the equations of loxodromes were obtained and some examples were given. In the fifth chapter, the parametrizations of loxodromes on helicoidal surfaces and rotational surfaces in $\mathbb{R}^4$ were found. In addition, an example is given and relevant graphs are drawn. In chapter six, the parametrizations of loxodromes on tubes with variable radius in $\mathbb{R}^4$ were found. An example is also given and relevant graphs are drawn.

Key words: Loxodrome, Helicoidal Surface, Tube with Variable Radius.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Doç. Dr. Murat BABAARSLAN'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca, bu çalışmanın oluşma sürecinde maddi manevi desteğini benden esirgemeyen sevgili eşime ve beni bu günlere getiren aileme teşekkürü bir borç bilirim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

		Sayfa
Şekil 3.1:	Helikoidal yüzey, loksodrom ve meridyen eğrisi	**10**
Şekil 3.2:	Helikoidal yüzey, loksodrom ve meridyen eğrisi	**11**
Şekil 3.3:	Dik helikoidal yüzey (helikoid), loksodrom, meridyen ve paralel eğrisi …….....	**12**
Şekil 4.1:	Kanal yüzey (silindir), loksodrom ve meridyen eğrisi	**18**
Şekil 4.2:	Kanal yüzey (koni), loksodrom ve meridyen eğrisi ….....	**19**
Şekil 4.3:	Kanal yüzey (torus), loksodrom ve meridyen eğrisi……..	**19**
Şekil 4.4:	Kanal yüzey (sarmal), loksodrom ve meridyen eğrisi	**20**
Şekil 5.1:	Helikoidal yüzeyin, loksodrom ve meridyen eğrisinin izdüşümleri …….....	**26**
Şekil 6.1:	Değişken yarıçaplı tüpün, loksodrom ve meridyen eğrisinin izdüşümleri …….....	**31**

KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^3$	:	Öklid 3-uzay
$\mathbb{R}^4$	:	Öklid 4-uzay
$\|\|.\|\|$	:	Norm
$\langle .,. \rangle$	:	İç Çarpım
κ, τ	:	Eğrilik, Torsiyon
E, F, G	:	Birinci Temel Form Katsayıları
$T_P(M)$	:	Teğet Düzlemi
β	:	Profil eğrisi
l	:	Dönme ekseni
M	:	Helikoidal yüzey
C	:	Kanal yüzey

1. GİRİŞ

Dünya yüzeyi üzerinde tüm meridyenleri sabit bir açıyla kesen eğriye loksodrom denir. Loksodromların rota değişimine ihtiyacı yoktur ve böylece navigasyonda sıklıkla kullanılırlar. Noble [16] Öklid 3-uzayı $\mathbb{R}^3$ teki dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemlerini oluşturdu. Düzlem eğrisinin bir vida hareketi altındaki yörüngesine helikoidal yüzey denir. Helikoidal yüzeyler, dönel yüzeylerin doğal bir genellemesidir. $\mathbb{R}^3$ teki helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemleri Babaarslan ve Yaylı [3] tarafından bulunmuştur.

Dönel yüzeylerin bir başka genellemesi kanal yüzeylerdir. Kanal yüzeyler, merkezlerinin yörüngesi bir uzay eğrisi üzerinde yatan, bir küre ailesinin zarfı olarak tanımlanır. Kürelerin yarıçapları sabit olduğunda, kanal yüzeyler sabit yarıçaplı boru yüzeylerine indirgenir [18]. Ayrıca kürelerin merkezleri düz bir doğru üzerinde yatıyorsa, kanal yüzey, dönel bir yüzeydir [11]. Örneğin; küre, ekseni bir doğru olan özel bir kanal yüzeydir. $\mathbb{R}^3$ teki kanal yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemleri Babaarslan [4] tarafından bulunmuştur.

Öklid 4-uzayı $\mathbb{R}^4$ teki dönel yüzeyler ilk olarak Moore [15] tarafından çalışılmıştır. Daha sonra, birçok yazar, $\mathbb{R}^4$ teki dönel yüzeyler üzerinde çalışmıştır (Bkz, [19], [20], [1], [2], [8]).

$\mathbb{R}^4$ te değişken yarıçaplı tüpün parametrizasyonu Gal ve Pal [11] tarafından verilmiştir. Ayrıca, $\mathbb{R}^4$ te helikoidal yüzey tanımı ve parametrizasyonu Hieu ve Thang [12] tarafından verilmiştir.

Bu tez çalışmasında, $\mathbb{R}^3$ teki helikoidal ve kanal yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemleri, $\mathbb{R}^4$ uzayına genelleştirilecektir. Ayrıca bazı örnekler verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Öklid 4-uzayında eğriler ve yüzeyler ile ilgili bazı temel tanımlar ve formüller verilecektir. Ayrıca helikoidal yüzeylerin ve değişken yarıçaplı tüplerin parametrizasyonları verilecektir.

Tanım 2.1. $\mathbb{R}$, reel sayılar cismini göstermek üzere $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ eşitliğiyle belirli $\mathbb{R}^4$ kümesinde toplama işlemi,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \tag{2.1}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skalarla çarpma işlemi, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ için

$$\lambda (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) \tag{2.2}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathbb{R}^4$ kümesi, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olur [17].

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^4$ vektör uzayında $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \tag{2.3}$$

eşitliğiyle tanımlanan $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ fonksiyonu, $\mathbb{R}^4$ uzayında bir iç çarpımdır. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^4$ uzayının doğal iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir [17].

Tanım 2.3. Öklid 4-uzayı $\mathbb{R}^4$ te, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ için

$$\|x\| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + x_4^{\,2}} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, x vektörünün normu (ya da uzunluğu) denir. $\|x\|$ geometrik olarak, (x_1, x_2, x_3, x_4) noktasından $0 = (0,0,0,0)$ başlangıç noktasına olan uzaklıktır [9].

Tanım 2.4. $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, $\mathbb{R}^4$ uzayında vektörler olsunlar ve x ile y vektörleri arasındaki açı θ, $0\le\theta\le\pi$ olmak üzere

$$\langle x,y\rangle=\|x\|\|y\|\cos\theta \tag{2.5}$$

eşitliğiyle tanımlanır [9].

Tanım 2.5. $\beta:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$, düzgün bir eğri olsun (yani, $\forall t\in I$ için $\beta'(t)\neq 0$ dır). β nın t_0 ve t arasındaki yay uzunluğu

$$s(t)=\int_{t_0}^{t}\|\beta'(t)\|dt \tag{2.6}$$

dir [5].

Tanım 2.6. $\beta:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^4$ eğrisi verilsin. $\forall t\in I$ için

$$\|\beta'(t)\|=1 \tag{2.7}$$

ise β eğrisine birim hızlı eğri denir [5].

Tanım 2.7. $\mathbb{R}^4$ teki bir M yüzeyinin bir $p=x(u,v)$ noktasındaki teğet düzlemi $T_p(M)=span\{x_u,x_v\}$ ile verilsin. Bu durumda M yüzeyinin birinci temel formu

$$ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \tag{2.8}$$

dir. Burada $E=\langle x_u,x_u\rangle$, $F=\langle x_u,x_v\rangle$ ve $G=\langle x_v,x_v\rangle$ birinci temel form katsayılarıdır. Eğer $EG-F^2>0$ ise M yüzeyi regülerdir [9].

Tanım 2.8. $\mathbb{R}^4$ teki bir M yüzeyi üzerinde $t=t_0$ noktasında kesişen iki $\beta:I\subset\mathbb{R}\to M$ ve $\gamma:I\subset\mathbb{R}\to M$ düzgün eğrileri arasındaki θ açısı

$$\cos\theta=\frac{\langle\beta'(t_0),\gamma'(t_0)\rangle}{\|\beta'(t_0)\|\|\gamma'(t_0)\|} \tag{2.9}$$

dir [9].

Özellikle, M nin sabit parametre eğrileri arasındaki γ açısı

$$\cos\gamma = \frac{\langle x_u, x_v \rangle}{\|x_u\|\|x_v\|} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \tag{2.10}$$

dir. Böylece sabit parametre eğrilerinin ortogonaldir olması için gerek ve yeter şart her (u,v) için $F(u,v)=0$ olmasıdır [9].

Tanım 2.9. $\mathbb{R}^4$ teki bir M yüzeyi üzerindeki bir eğrinin u_1 ve u_2 noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$s = \left| \int_{u_2}^{u_1} \sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du \right| \tag{2.11}$$

dir [9].

3. ÖKLİD-3 UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR

Bu bölümde, ilk olarak $\mathbb{R}^3$ te dönel yüzeylerin ve helikoidal yüzeylerin tanımları ve parametrizasyonları verilecektir. Daha sonra loksodromların denklemleri oluşturulacak ve bazı örnekler verilecektir.

Tanım 3.1. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to P$, $P \subset \mathbb{R}^3$ düzleminde regüler bir eğri ve l, P de bir doğru olsun. β profil eğrisi, l ekseni etrafında döndürülürse, $\mathbb{R}^3$ te bir dönel yüzey meydana gelir. Benzer şekilde, β profil eğrisi l ekseni etrafında döndürüldüğünde öteleme hızı dönme hızıyla orantılı olacak şekilde l ile paralel olarak ötelenirse $\mathbb{R}^3$ te bir helikoidal yüzey meydana gelir [13].

Önerme 3.1. $l = span\{(0,0,1)\}$ olsun. O zaman, l eksenini invaryant bırakan dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; v \in I \subset \mathbb{R} \tag{3.1}$$

dir.

l dönme ekseni ise, o zaman $\mathbb{R}^3$ te, l ekseninin x_3 eksenine dönüştürüldüğü bir Öklid dönüşümü vardır. Dönme, l dönme eksenine dik olan düzlemleri invaryant bırakır. Böylece l dönme eksenini, profil eğrisini içeren bir düzlemden seçebiliriz. Sonuç olarak, x_1x_3-düzleminde, $\beta(u) = (f(u), 0, g(u))$ ile parametrelendirilen β profil eğrisini alabiliriz, burada $u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $f(u) \neq 0$ dır.

l dönme eksenli bir M helikoidal yüzeyi aşağıdaki gibi parametrelendirilir:

$$x(u,v)=\begin{bmatrix}\cos v & -\sin v & 0\\ \sin v & \cos v & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f(u)\\ 0\\ g(u)\end{bmatrix}+\lambda v\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

veya

$$x(u,v)=\left(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)+\lambda v\right) \tag{3.3}$$

dir, burada $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ dir [3].

g sabit bir fonksiyon olduğunda, helikoidal yüzeye dik helikoidal yüzey denir. Ayrıca, $\lambda=0$ olduğunda helikoidal yüzeyler dönel yüzeylerine indirgenir [13].

(3.3) denklemi tarafından verilen M helikoidal yüzeyini ele alalım. Hesapları basitleştirmek için; $\forall u\in I\subset\mathbb{R}$ için $f'^{2}(u)+g'^{2}(u)=1$ olduğunu varsayalım, yani β profil eğrisi, yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilsin. Bu durumda, M nın birinci temel form katsayıları

$$E=\langle x_u,x_u\rangle=1,\ F=\langle x_u,x_v\rangle=\lambda g'(u),\ G=\langle x_v,x_v\rangle=f^{2}(u)+\lambda^{2} \tag{3.4}$$

dir.

Açıkçası, M bir dik helikoidal yüzey veya dönel yüzey ise M nin parametre eğrileri ortogonaldir.

(3.4) eşitliklerini, (2.8) denkleminde yazarsak M nın birinci temel formu aşağıdaki denklem ile belirlenir:

$$ds^{2}=du^{2}+2\lambda g'(u)\,dudv+\left(f^{2}(u)+\lambda^{2}\right)dv^{2}. \tag{3.5}$$

Ayrıca, M üzerindeki herhangi bir eğrinin u_1 ve u_2 noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$s=\int_{u_2}^{u_1}\sqrt{1+2\lambda g'(u)\frac{dv}{du}+\left(f^2(u)+\lambda^2\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\,du \tag{3.6}$$

eşitliği ile verilir.

Şimdi helikoidal yüzey üzerindeki loksodromların denklemlerini bulalım.

Loksodromun $\alpha(t)=x\left(u(t),v(t)\right)$ ile verildiğini varsayalım. $\{x_u,x_v\}$ bazına göre $\alpha'(t)$ vektörünün koordinatları (u',v') ve x_u vektörünün koordinatları $(1,0)$ dır. Loksodromun meridyeni sabit bir θ açıyla kestiği $p=x(u,v)$ noktasında

$$\cos\theta=\frac{\langle\alpha'(t),x_u\rangle}{\|\alpha'(t)\|\|x_u\|}=\frac{Edu+Fdv}{\sqrt{E^2du^2+2EFdudv+EGdv^2}}$$

$$=\frac{du+\lambda g'(u)dv}{\sqrt{du^2+2\lambda g'(u)dudv+\left(f^2(u)+\lambda^2\right)dv^2}} \tag{3.7}$$

eşitliği vardır.

(3.7) denkleminden, M üzerindeki loksodromun diferansiyel denklemi

$$\left(\cos^2\theta\left(f^2(u)+\lambda^2\right)-\lambda^2g'^2(u)\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2-2\lambda\sin^2\theta g'(u)\frac{dv}{du}=\sin^2\theta \tag{3.8}$$

dir. Böylece, M üzerindeki loksodromun diferansiyel denklemin genel çözümü

$$v=\int_{u_0}^{u}\frac{2\lambda\sin^2\theta g'(u)+\varepsilon\sqrt{\sin^2 2\theta\left(f^2(u)-\lambda^2\left(g'^2(u)-1\right)\right)}}{2\cos^2\theta\left(f^2(u)+\lambda^2\right)-2\lambda^2g'^2(u)}du \tag{3.9}$$

dir, burada $\varepsilon=\pm1$ dir [3].

Böylece, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1. $\mathbb{R}^3$ teki helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromların parametrizasyonu

$$\alpha(u)=\left(f(u)\cos v(u), f(u)\sin v(u), g(u)+\lambda v(u)\right) \tag{3.10}$$

dir, burada $v(u)$, (3.9) eşitliği ile verilir.

Dik helikoidal yüzey üzerindeki loksodrom için, (3.8) diferensiyel denklemi (3.11) denklemine indirgenir:

$$\cos^2\theta\left(f^2(u)+\lambda^2\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\sin^2\theta\,. \tag{3.11}$$

Bu diferansiyel denklemin çözümü ile dik helikoidal yüzey üzerindeki loksodromun diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v=\varepsilon\tan\theta\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\sqrt{f^2(u)+\lambda^2}} \tag{3.12}$$

dir, burada $\varepsilon=\pm1$ dir [3].

Noble [16] ve Kos vd. [14], dönel yüzey üzerindeki loksodromun diferansiyel denklemini buldu. (3.12) denkleminde $\lambda=0$ alırsak, dönel yüzey üzerindeki loksodromun diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v=\varepsilon\tan\theta\int_{u_0}^{u}\frac{du}{f(u)} \tag{3.13}$$

dir, burada $\varepsilon=\pm1$ dir [3]. Bu denklem, [16] ve [14] makalelerindeki denklemlerle çakışmaktadır.

Şimdi dik helikoidal yüzey üzerindeki loksodromun yay uzunluğunu verelim. u_1 ve u_2 noktaları arasında dik helikoidal yüzey üzerindeki herhangi bir eğrinin yay uzunluğu

$$s = \int_{u_2}^{u_1} \sqrt{1 + \left(f^2(u) + \lambda^2 \right) \left(\frac{dv}{du} \right)^2} \, du \tag{3.14}$$

dir.

(3.11) denklemi kullanılarak, dik helikoidal yüzey üzerindeki loksodromun yay uzunluğu

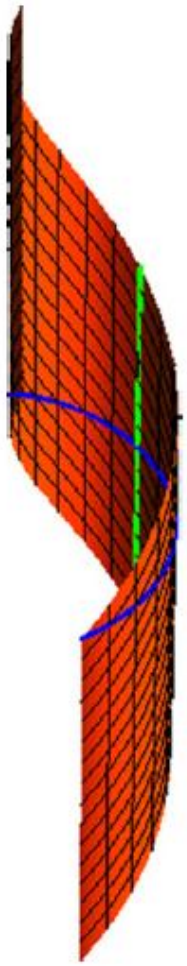
$$s = \left| \frac{u_1 - u_2}{\cos\theta} \right| \tag{3.15}$$

dir [3].

Benzer şekilde, dönel yüzeyindeki loksodromun yay uzunluğu (3.15) denklemi ile çakışmaktadır.

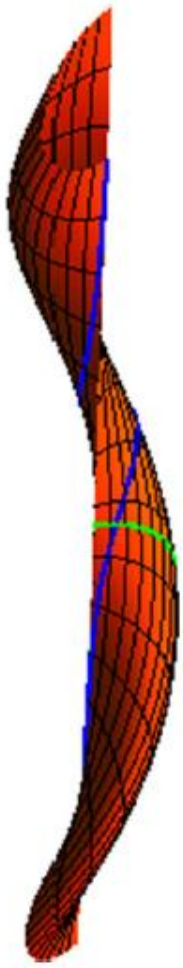
Şimdi sonuçlarımızı desteklemek için helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromlara örnekler verelim.

Örnek 3.1. $f(u) = 2$, $g(u) = u + 1$, $u \in (-5,5)$, $\lambda = 3$, $\theta = \pi / 3$, $\varepsilon = 1$ ve $v(0) = 0$ olarak alalım. Basit bir hesaplama ile $v \in (-2.70959, 2.70959)$ dir. Ayrıca, loksodromun yay uzunluğu 7.50903 e eşittir. Şekil 3.1 de $x(u,v)$ helikoidal yüzeyini, meridyen ($v = \text{sabit}$) ve $x(u, v(u))$ loksodromunu çizebiliriz [3].



Şekil 3.1. Helikoidal yüzey; loksodrom (mavi), meridyen (yeşil).

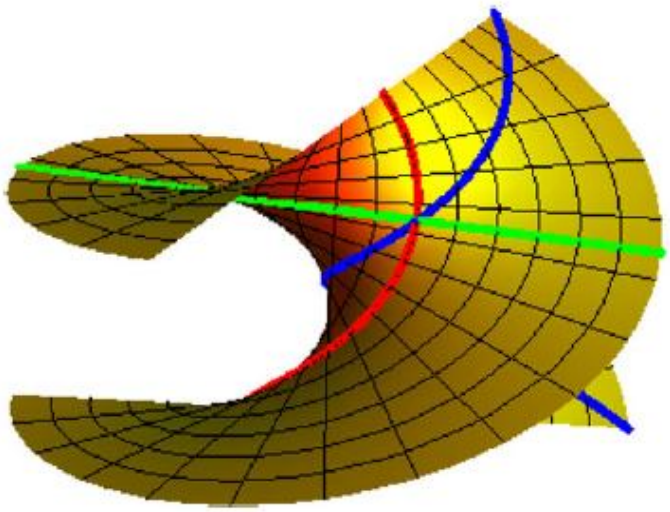
Örnek 3.2. $f(u)=\sin u$, $g(u)=\cos u$, $u\in(0.01,3.14)$, $\lambda=2$, $\theta=\pi/2$, $\varepsilon=-1$ ve $u_0=1.5708$ olarak alalım. Basit bir hesaplama ile $v\in(-2.64916,3.56775)$ dir. Loksodromun yay uzunluğu 11.5391 e eşittir. Şekil 3.2 de $x(u,v)$ helikoidal yüzeyini, meridyen ($v=$ sabit) ve $x(u,v(u))$ loksodromunu çizebiliriz [3].



Şekil 3.2. Helikoidal yüzey; loksodrom (mavi), meridyen (yeşil).

Enerjinin minimizasyonu prensibi nedeniyle, minimal yüzeyler doğada ve bilimde her yerde bulunur. Böylece onların çalışmaları yüzyıllardır büyüleyici bir kavram olmuştur. Minimal yüzeylerin aşikâr olmayan örneklerinden biri, Meusnier ([6]) tarafından bulunan helikoiddir. (3.3) denklemini kullanarak helikoidi oluşturabiliriz. Helikoid üzerindeki bir paralel ($u = \text{sabit}$) helistir ve meridyenlere ($v = \text{sabit}$) diktir. Böylece helikoid üzerindeki helis eğriside bir loksodromdur. Helisler, navigasyonda sıklıkla kullanıldıklarından bu önemli bir özelliktir. Böylece aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.3. $f(u)=u$, $g(u)=1$, $u\in(-4,4)$, $\lambda=1$, $\theta=\pi/4$, $\varepsilon=1$ ve $v(0)=0$ olarak alalım. Basit bir hesaplama ile $v\in(-2.09,2.09)$ dir. Ayrıca, loksodromun yay uzunluğu $8\sqrt{2}$ e eşittir. Şekil 3.3 de, $x(u,v)$ dik helikoidal yüzeyini (helikoid), meridyeni ($v=$ sabit), paralel ($u=$ sabit) ve $x(u,v(u))$ loksodromunu çizebiliriz [3].



Şekil 3.3. Dik helikoidal yüzey (helikoid); loksodrom (mavi), meridyen (yeşil), paralel (kırmızı).

4. ÖKLİD-3 UZAYINDA KANAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR

Bu bölümde, ilk olarak $\mathbb{R}^3$ te kanal yüzeyin tanımı ve parametrizasyonu verilecektir. Daha sonra loksodromların denklemleri oluşturulacak ve bazı örnekler verilecektir.

Tanım 4.1. $\mathbb{R}^3$ te kanal yüzey, merkezleri $m(t)$ baz eğrisi olan $r(t)$ yarıçaplı, 1-parametreli küre ailesinin zarfı olarak tanımlanır. $r(t)$ sabit bir fonksiyon olduğunda, kanal yüzey hareketli bir kürenin zarfıdır ve boru yüzeyi olarak adlandırılır [18].

Önerme 4.1. $\mathbb{R}^3$, bir C kanal yüzeyin parametrizasyonu

$$x(u,v)=m(u)+r(u)\left(\sqrt{\left(1-r'(u)^2\right)}n(u)\cos v+\sqrt{\left(1-r'(u)^2\right)}b(u)\sin v-t(u)r'(u)\right) \quad (4.1)$$

dir, burada u yay uzunluğu parametresi, $0\le v<2\pi$, t, n, ve b, sırasıyla $m(u)$ baz eğrisinin birim teğet, asli normal ve binormal vektörleridir [18].

C kanal yüzeyin $\{x_u, x_v\}$ bazına göre birinci temel form katsayıları

$$E=\langle x_u, x_u\rangle=\left(1-\kappa g\cos v-h'\right)^2+\left(g\tau+h\kappa\sin v\right)^2+\left(g'-h\kappa\cos v\right)^2,$$

$$F=\langle x_u, x_v\rangle=g^2\tau+gh\kappa\sin v,$$

$$G=\langle x_v, x_v\rangle=g^2 \quad (4.2)$$

dir [18].

Böylece C kanal yüzeyinin birinci temel formu aşağıdaki denklemle verilir:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$= \left(\left(1 - \kappa g \cos v - h'\right)^2 + \left(g\tau + h\kappa \sin v\right)^2 + \left(g' - h\kappa \cos v\right)^2 \right) du^2$$

$$+2\left(g^2\tau + gh\kappa \sin v\right) dudv + g^2 dv^2 \tag{4.3}$$

dir, burada $g = g(u) = r(u)\sqrt{1 - r'(u)^2}$ ve $h = h(u) = r(u)r'(u)$; $\kappa = \kappa(u)$ ve $\tau = \tau(u)$ sırasıyla $m(u)$ nun eğriliği ve burulmasıdır [18].

$1 - \kappa g \cos v - h' \neq 0$ olduğunda kanal yüzeyi regülerdir. Ayrıca, regüler bir kanal yüzeyinin açılabilir olması için tüm gerek ve yeter şart, onun bir silindir veya koni olmasıdır [18].

C kanal yüzeyi üzerindeki herhangi bir eğrinin u_1 ve u_2 noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$s = \int_{u_2}^{u_1} \sqrt{H(u,v)}du \tag{4.4}$$

dir, burada

$$H(u,v) = \left(1 - \kappa g \cos v - h'\right)^2 + \left(g\tau + h\kappa \sin v\right)^2 + \left(g' - h\kappa \cos v\right)^2$$

$$+2\left(g^2\tau + gh\kappa \sin v\right)\frac{dv}{du} + g^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

dir [4].

Şimdi kanal yüzey üzerindeki meridyenleri veya paralelleri sabit açıyla kesen loksodromların denklemlerini bulalım.

Loksodromun $\alpha(t)=x(u(t),v(t))$ olarak verildiğini varsayalım. $\alpha'(t)$ teğet vektörü (u',v') koordinatlarına sahiptir ve x_u teğet vektörünün $\{x_u,x_v\}$ bazına göre koordinatları $(1,0)$ dır. Böylece $p=x(u,v)$ kesişme noktasında

$$\cos\theta=\frac{K(u,v)}{\sqrt{L(u,v)}} \tag{4.5}$$

eşitliği vardır, burada

$$K(u,v)=\left(\left(1-\kappa g\cos v-h'\right)^2+\left(g\tau+h\kappa\sin v\right)^2+\left(g'-h\kappa\cos v\right)^2\right)du+\left(g^2\tau+gh\kappa\sin v\right)dv$$

ve

$$\begin{aligned}L(u,v)=&\left(\left(1-\kappa g\cos v-h'\right)^2+\left(g\tau+h\kappa\sin v\right)^2+\left(g'-h\kappa\cos v\right)^2\right)^2du^2\\&+2\left(\left(1-\kappa g\cos v-h'\right)^2+\left(g\tau+h\kappa\sin v\right)^2+\left(g'-h\kappa\cos v\right)^2\right)\\&\times\left(g^2\tau+gh\kappa\sin v\right)dudv\\&+\left(\left(1-\kappa g\cos v-h'\right)^2+\left(g\tau+h\kappa\sin v\right)^2+\left(g'-h\kappa\cos v\right)^2\right)g^2dv^2\end{aligned} \tag{4.6}$$

dir [4].

Bu denklemden, kanal yüzey üzerindeki tüm meridyenleri sabit bir θ açısıyla kesen loksodromun diferansiyel denklemi

$$A\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + B\frac{dv}{du} = C \tag{4.7}$$

dir, burada

$$A = \left(\left(1-\kappa g\cos v - h'\right)^2 + \left(g\tau + h\kappa\sin v\right)^2 + \left(g' - h\kappa\cos v\right)^2\right)g^2\cos^2\theta - \left(g^2\tau + gh\kappa\sin v\right)^2,$$

$$B = -2\left(\left(1-\kappa g\cos v - h'\right)^2 + \left(g\tau + h\kappa\sin v\right)^2 + \left(g' - h\kappa\cos v\right)^2\right)\times\left(g^2\tau + gh\kappa\sin v\right)\sin^2\theta,$$

ve

$$C = \left(\left(1-\kappa g\cos v - h'\right)^2 + \left(g\tau + h\kappa\sin v\right)^2 + \left(g' - h\kappa\cos v\right)^2\right)^2\sin^2\theta \tag{4.8}$$

dir [4].

Ayrıca, loksodrom ile herhangi bir paralel (u=sabit) arasındaki γ açısı aşağıdaki denklemle verilir:

$$\cos\gamma = \frac{\left\langle \alpha'(t), x_v \right\rangle}{\left\|\alpha'(t)\right\|\left\|x_v\right\|} = \frac{Fdu + Gdv}{\sqrt{EGdu^2 + 2FGdudv + G^2dv^2}}$$

$$= \frac{M(u,v)}{\sqrt{N(u,v)}} \tag{4.9}$$

burada

$$M(u,v) = \left(g^2\tau + gh\kappa\sin v\right)du + g^2dv$$

ve

$$N(u,v)=\left(\left(1-\kappa g\cos v-h'\right)^2+\left(g\tau+h\kappa\sin v\right)^2+\left(g'-h\kappa\cos v\right)^2\right)du^2$$

$$+2\left(g^2\tau+gh\kappa\sin v\right)g^2dudv+g^4dv^2 \tag{4.10}$$

dir [4].

(4.10) denkleminden, kanal yüzey üzerindeki paralelleri γ sabit açısıyla kesen loksodromun diferansiyel denklemi,

$$\widetilde{A}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\widetilde{B}\frac{dv}{du}=\widetilde{C} \tag{4.11}$$

dir, burada

$$\widetilde{A}=\left(\left(1-\kappa g\cos v-h'\right)^2+\left(g\tau+h\kappa\sin v\right)^2+\left(g'-h\kappa\cos v\right)^2\right)g^2\cos^2\gamma-\left(g^2\tau+gh\kappa\sin v\right)^2,$$

$$\widetilde{B}=-2\left(g^2\tau+gh\kappa\sin v\right)g^2\sin^2\gamma,$$

ve

$$\widetilde{C}=g^4\sin^2\gamma \tag{4.12}$$

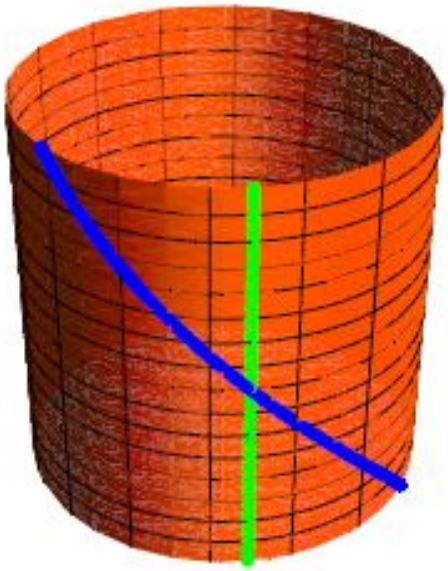
dir [4].

Sırasıyla (4.7) ve (4.11) denklemlerinde, $r=r(u)=$ sabit alırsak, tüp yüzeyleri üzerindeki sırasıyla meridyenleri, θ sabit açısıyla ve paralelleri γ sabit açısıyla kesen loksodromların diferansiyel denklemini elde ederiz.

(4.7) ve (4.11) diferansiyel denklemlerinin genel çözümlerini analitik yöntemler kullanılarak bulmayı başaramadık. Bu bir açık problemdir.

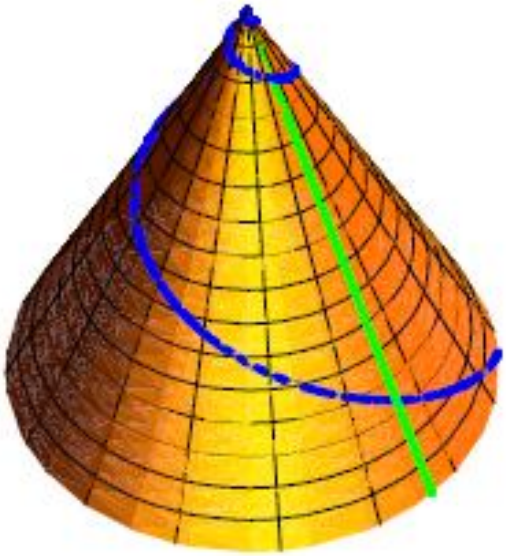
Elde edilen sonuçları desteklemek için Mathematica programı yardımıyla bazı örnekler verelim [4].

Örnek 4.1. $m(u)=(0,0,u+1)$ baz eğrisini ele alalım. $r(u)=1$, $\theta=\pi/4$, $u\in(0,2)$, $v\in(0,2\pi)$ ve $v(0)=0$ alındığında, loksodromun yay uzunluğu $2\sqrt{2}$ olarak hesaplanır. Loksodrom, meridyen $(v=1)$ ve kanal yüzey, Şekil 4.1. de gösterilmektedir [4].



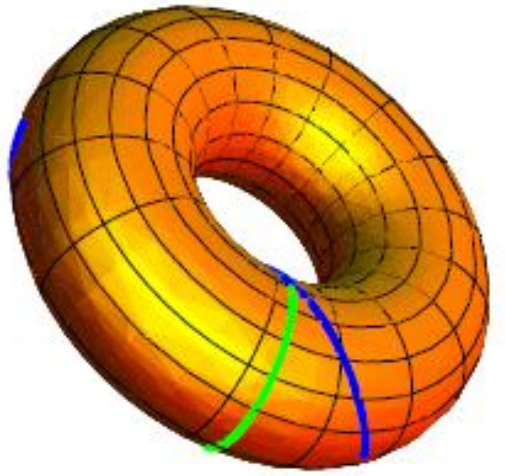
Şekil 4.1. Kanal yüzeyindeki (silindir), loksodrom (mavi) ve meridyen (yeşil).

Örnek 4.2. $m(u)=(0,0,u)$ baz eğrisini ele alalım. $r(u)=u/2$, $\theta=\pi/3$, $u\in(0,7)$, $v\in(0,2\pi)$ ve $u_0=1$ alındığında, loksodromun yay uzunluğu $7\sqrt{3}$ olarak hesaplanır. Ayrıca loksodrom, meridyen $(v=3)$ ve kanal yüzeyi Şekil 4.2. de gösterilmektedir [4].



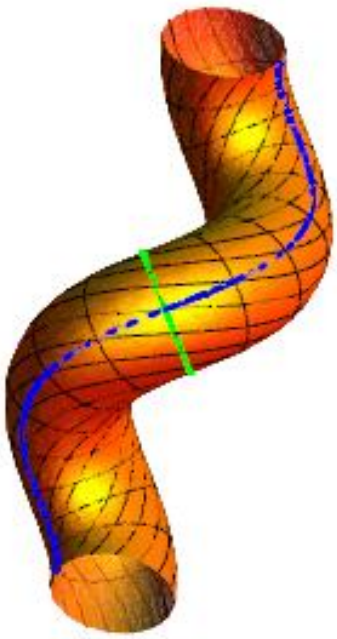
Şekil 4.2. Kanal yüzeyindeki (koni), loksodrom (mavi) ve meridyen (yeşil).

Örnek 4.3. $m(u)=(\cos u,\sin u,0)$ baz eğrisini ele alalım. $r(u)=1/2$, $\gamma=\pi/6$, $v\in(-\pi,\pi)$, $u\in(0,2\pi)$ ve $u(0)=0$ alındığında, loksodromun yay uzunluğu $2\sqrt{3}\pi/3$ olarak hesaplanır. Loksodrom, paralel ($u=1/2$) ve kanal yüzeyi Şekil 4.3. de gösterilmektedir [4].



Şekil 4.3. Kanal yüzeyindeki (halka), loksodrom (mavi) ve meridyen (yeşil).

Örnek 4.4. $m(u)=\left(\cos\left(u/\sqrt{2}\right),\sin\left(u/\sqrt{2}\right),u/\sqrt{2}\right)$ baz eğrisini ele alalım. $r(u)=1,\ \gamma=\pi/2,\ v\in(-2\pi,\pi),\ u\in(0,4\pi)$ ve $u(0)=u$ alındığında, loksodromun yay uzunluğu 14.2074 olarak hesaplanır. Loksodrom, paralel ($u=2\pi$) ve kanal yüzeyi Şekil 4.4. de gösterilmektedir [4].



Şekil 4.4. Kanal yüzeyindeki (sarmal), loksodrom (mavi) ve paralel çizgi (yeşil).

5. ÖKLİD 4-UZAYINDA HELİKOİDAL YÜZEYLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR

Bu bölümde, ilk olarak $\mathbb{R}^4$ teki helikoidal yüzeyler ve dönel yüzeylerin tanımlarını ve parametrizasyonlarını vereceğiz. Daha sonra loksodromların denklemlerini elde edeceğiz. Ayrıca bir örnek vereceğiz.

Tanım 5.1. $\beta : I \subset \mathbb{R} \to H$, $H \subset \mathbb{R}^4$ hiperdüzleminde düzgün bir eğri ve P de H hiperdüzleminde bir düzlem olsun. β profil eğrisi P düzlemi etrafında döndürülürse meydana gelen yüzeye $\mathbb{R}^4$ te dönel yüzey denir. Benzer şekilde β profil eğrisi, P düzlemi etrafında döndürülürken dönme hızı öteleme hızı ile orantılı olacak şekilde P düzlemine paralel bir l ekseni etrafında ötelenirse meydana gelen yüzeye $\mathbb{R}^4$ te bir helikoidal yüzey denir [12].

Önerme 5.1. x, y, z, w; $\mathbb{R}^4$ te koordinat fonksiyonları olsun. H nin xzw-hiperdüzlemi, P nin zw-düzlemi ve l nin, z-eksenine paralel olduğunu varsayalım. Bu durumda, P düzlemini sabit bırakan dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \le v \le 2\pi \tag{5.1}$$

dir. H hiperdüzleminde $\beta(u) = \left(f(u), 0, g(u), h(u)\right)$ profil eğrisini düşünelim, burada $u \in I \subset \mathbb{R}$ ve $f(u) > 0$ dır. Böylece M_1 helikoidal yüzeyinin parametrizasyonu

$$x_1(u,v) = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v & 0 & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \\ h(u) \end{bmatrix} + \lambda v \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \left(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u), h(u)\right) \tag{5.2}$$

dır. Burada $\lambda \in \mathbb{R}^+$ dır. g sabit bir fonksiyon olduğunda, helikoidal yüzey dik helikoidal yüzey olarak adlandırılır. $\lambda = 0$ olduğunda, $\mathbb{R}^4$ teki helikoidal yüzeyler dönel yüzeylere indirgenir. Ayrıca, h sabit bir fonksiyon olduğunda, helikoidal yüzey tam anlamıyla $\mathbb{R}^3$ te bir helikoidal yüzeydir [12].

(5.2) eşitliğiyle verilen M_1 helikoidal yüzeyini düşünelim. Hesapları sadeleştirmek için, β nın birim hızlı olduğunu varsayalım, yani, $f'^2(u)+g'^2(u)+h'^2(u)=1$ olsun. $x_1(u,v)$ nin kısmi türevleri sırasıyla

$$x_{1u} = \left(f'(u)\cos v, f'(u)\sin v, g'(u), h'(u)\right) \tag{5.3}$$

ve

$$x_{1v} = \left(-f(u)\sin v, f(u)\cos v, \lambda, 0\right) \tag{5.4}$$

dir.

(5.3) ve (5.4) eşitliklerini kullanarak, M_1 in birinci temel form katsayıları

$$E = \langle x_{1u}, x_{1u}\rangle = 1,\ F = \langle x_{1u}, x_{1v}\rangle = \lambda g'(u) \text{ ve } G = \langle x_{1v}, x_{1v}\rangle = f^2(u)+\lambda^2 \tag{5.5}$$

dir.

$EG - F^2 = \lambda^2\left(1-g'^2\right)+f^2 > 0$ olsun, yani M_1 regülerdir.

(2.8) eşitliği kullanılarak M_1 in birinci temel formu

$$ds^2 = du^2 + 2\lambda g'(u)\,dudv + \left(f^2(u)+\lambda^2\right)dv^2 \tag{5.6}$$

dir.

(2.11) eşitliği kullanılarak, M_1 üzerindeki herhangi bir eğrinin u_1 ve u_2 noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$s = \left| \int_{u_2}^{u_1} \sqrt{1+2\lambda g'(u)\frac{dv}{du} + \left(f^2(u)+\lambda^2\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du \right| \tag{5.7}$$

dir.

$\alpha(t)$, M_1 üzerinde bir eğri olsun. Bu durumda, $\alpha(t) = x_1(u(t), v(t))$ yazabiliriz. $\{x_{1u}, x_{1v}\}$ lokal bazına göre, $\alpha'(t)$ vektörünün koordinatları (u', v') ve x_{1u} vektörünün koordinatları $(1,0)$ dır. Loksodromun, meridyeni sabit θ açısıyla kestiği $p_1 = x_1(u,v)$ noktasında

$$\cos\theta = \frac{du^2 + \lambda g'(u)\, dv}{\sqrt{du^2 + 2\lambda g'(u)\, du dv + \left(f^2(u)+\lambda^2\right)dv^2}} \tag{5.8}$$

eşitliği vardır. (5.8) eşitliğinden de,

$$\left(\cos\theta\left(f^2(u)+\lambda^2\right) - \lambda^2 g'^2(u)\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - 2\lambda \sin^2\theta g'(u)\frac{dv}{du} = \sin^2\theta \tag{5.9}$$

elde edilir. Bu denklem $\mathbb{R}^4$ teki helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromların diferansiyel denklemidir.

(5.9) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v = v(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{2\lambda \sin^2\theta g'(u) + \varepsilon\sqrt{\sin^2 2\theta\left(f^2(u) - \lambda^2\left(g'^2(u)-1\right)\right)}}{2\cos^2\theta\left(f^2(u)+\lambda^2\right) - 2\lambda^2 g'^2(u)} du \tag{5.10}$$

dir. Burada $\varepsilon = \pm 1$ dir [5].

Böylece, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5.1. $\mathbb{R}^4$ teki helikoidal yüzeyler üzerindeki loksodromların parametrizasyonu

$$\alpha(u) = \left(f(u)\cos v(u), f(u)\sin v(u), g(u) + \lambda v(u), h(u)\right) \tag{5.11}$$

dir. Burada $v(u)$, (5.10) eşitliği ile verilir [5].

(5.10) eşitliğinde, $\lambda = 0$ alındığında $\mathbb{R}^4$ teki dönel yüzey üzerindeki loksodromların diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v(u) = \varepsilon \tan\theta \int_{u_0}^{u} \frac{du}{f(u)} \tag{5.12}$$

dır [5].

Böylece, aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 5.2. $\mathbb{R}^4$ teki dönel yüzeyler üzerindeki loksodromların parametrizasyonu

$$\gamma(u) = \left(f(u)\cos v(u), f(u)\sin v(u), g(u), h(u)\right) \tag{5.13}$$

dir. Burada $v(u) = \varepsilon \tan\theta \int_{u_0}^{u} \frac{du}{f(u)}$ dir [5].

$\mathbb{R}^4$ te, M_1 dik helikoidal yüzey ise M_1 üzerindeki loksodromun yay uzunluğu

$$s = \left| \frac{u_2 - u_1}{\cos\theta} \right| \tag{5.14}$$

dir.

Benzer şekilde, $\mathbb{R}^4$ teki dönel yüzey üzerindeki loksodromun yay uzunluğu (5.14) eşitliği ile aynıdır [5].

Şimdi, aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 5.1. $\mathbb{R}^4$ te, $\beta(u) = \left(\cos\frac{u}{2}, 0, \sin\frac{u}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}u\right)$ profil eğrisini düşünelim. Eğer $\lambda = 1$, $\theta = \pi/2$ ve $\varepsilon = 1$ olarak alınırsa, M_1 helikoidal yüzeyinin parametrizasyonu

$$x_1(u,v)=\left(\cos\frac{u}{2}\cos v,\cos\frac{u}{2}\sin v,\sin\frac{u}{2}+v,\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)$$

dir.

(5.10) eşitliğini kullanarak ve $u_0=0$ alarak, $v(u)=4\ln\left|\frac{1-\tan\frac{u}{4}}{1+\tan\frac{u}{4}}\right|$ bulunur.

$u\in(-2,2)$ alınırsa, $v\in(-4.9048,4.9048)$ dir.

Böylece loksodromun parametrizasyonu

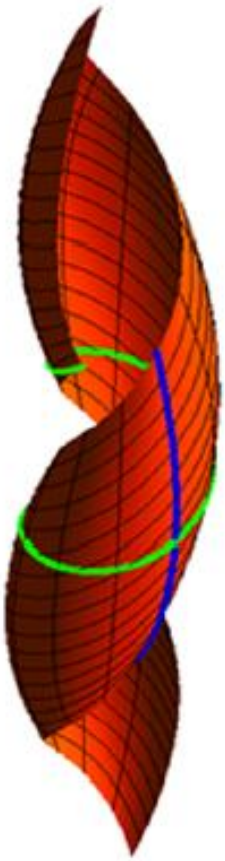
$$\alpha(u)=\left(\cos\frac{u}{2}\cos v(u),\cos\frac{u}{2}\sin v(u),\sin\frac{u}{2}+v(u),\frac{\sqrt{3}}{2}u\right)$$

dir, burada $v(u)=4\ln\left|\frac{1-\tan\frac{u}{4}}{1+\tan\frac{u}{4}}\right|$ dir.

Ayrıca (5.5) eşitliğini kullanarak, loksodromunun yay uzunluğu yaklaşık olarak 12.0528 bulunur.

$$ParamatricPlot3D\left[\{x(u,v),y(u,v),z(u,v)+w(u,v)\},\{u,a,b\},\{u,c,d\}\right]$$

Mathematica komutunu kullanarak, helikoidal yüzeyin, loksodromun ve $v=0$ meridyeninin $\mathbb{R}^3$ uzayına izdüşümleri, Şekil 5.1 deki gibidir [5].



Şekil 5.1. Helikoidal yüzeyin, loksodromun (yeşil), meridyenin (mavi) izdüşümleri.

6. DEĞİŞKEN YARIÇAPLI TÜPLER ÜZERİNDEKİ LOKSODROMLAR

Bu bölümde, $\mathbb{R}^4$ teki değişken yarıçaplı tüpler üzerindeki loksodromların parametrizasyonlarını bulacağız. Ayrıca bir örnek vereceğiz.

İlk olarak, $\mathbb{R}^4$ te değişken yarıçaplı tüpün parametrizasyonunu verelim.

Önerme 6.1. $\beta(u)=\left(f(u),g(u),h(u),0\right)$ birim hızlı baz eğrisini düşünelim. Bu durumda Frenet formülleri

$$\beta'(u)=e_1(u),$$

$$e_1'(u)=\kappa(u)e_2(u),$$

$$e_2'(u)=-\kappa(u)e_1(u)+\tau(u)e_3(u),$$

$$e_3'(u)=-\tau(u)e_2(u),$$

$$e_4'(u)=0$$

ile verilir, burada $\{e_1(u),e_2(u),e_3(u),e_4(u)\}$, β nın Frenet vektörleri, $\kappa(u)$ ve $\tau(u)$ da β nın eğrilikleridir.

Böylece değişken yarıçaplı tüp M_2 nin parametrizasyonu

$$x_2(u,v)=\beta(u)+r(u)\left(e_3(u)\cos v+e_4(u)\sin v\right) \tag{6.1}$$

dir ([11], [7]).

(6.1) eşitliği ile verilen değişken yarıçaplı tüp M_2 yi ele alalım. $p_2=x_2(u,v)$ noktasında M_2 nin teğet düzlem $T_{p_2}(M_2)=span\{x_{2u},x_{2v}\}$ dir.

Böylece

$$x_{2u} = e_1(u) - r(u)\tau(u)\cos v e_2(u) + r'(u)\cos v e_3(u) + r'(u)\sin v e_4(u) \qquad (6.2)$$

ve

$$x_{2v} = -r(u)\sin v e_3(u) + r(u)\cos v e_4(u) \qquad (6.3)$$

dir.

(6.2) ve (6.3) denklemlerini kullanarak, M_2 nin birinci temel form bileşenleri

$$E = \langle x_{2u}, x_{2u} \rangle = 1 + r'^2 + r^2\tau^2\cos^2 v\,,\ F = \langle x_{2u}, x_{2v} \rangle = 0 \text{ ve } G = \langle x_{2v}, x_{2v} \rangle = r^2 \qquad (6.4)$$

dir.

$EG - F^2 = r^2 + r^2 r'^2 + r^4\tau^2\cos^2 v > 0,$ yani M_2 nin regüler olduğunu varsayalım.

M_2 nin birinci temel formu

$$ds^2 = \left(1 + r'^2 + r^2\tau^2\cos^2 v\right)du^2 + r^2 dv^2 \qquad (6.5)$$

dir.

Ayrıca M_2 üzerindeki herhangi bir eğrinin u_1 ve u_2 noktaları arasındaki yay uzunluğu

$$s = \left| \int_{u_2}^{u_1} \sqrt{1 + r'^2 + r^2\tau^2\cos^2 v + r^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du \right| \qquad (6.6)$$

dir.

Şimdi, $\sigma(t)$ nin M_2 üzerinde bir eğri olduğunu varsayalım. Bu durumda, $\sigma(t)=x_2(u(t),v(t))$ yazabiliriz. $\{x_{2u},x_{2v}\}$ lokal bazına göre, $\sigma'(t)$ vektörünün koordinatları (u',v') ve x_{2u} vektörünün koordinatları $(1,0)$ dır. Loksodromun meridyeni φ sabit açıyla kestiği, $p_2=x_2(u,v)$ noktasında

$$\cos\varphi=\frac{\left(1+r'^2+r^2\tau^2\cos^2 v\right)du}{\sqrt{\left(1+r'^2+r^2\tau^2\cos^2 v\right)^2du^2+\left(1+r'^2+r^2\tau^2\cos^2 v\right)r^2dv^2}} \tag{6.7}$$

dir. Bu durumda, $\mathbb{R}^4$ teki değişken yarıçaplı tüpler üzerindeki loksodromların diferansiyel denklemi

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\tan^2\varphi\left(\frac{1+r'^2}{r^2}+\tau^2\cos^2 v\right) \tag{6.8}$$

dir.

Şimdi, β nın ikinci eğriliğinin sıfır olduğunu varsayalım. Yani, β düzlemsel bir eğri olsun. Bu durumda (6.8) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$v=v(u)=\varepsilon\tan\varphi\int_{u_0}^{u}\frac{\sqrt{1+r'^2}}{r}du \tag{6.9}$$

dir. Burada $\varepsilon=\pm1$ dir [5].

Bu şart altında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 6.1. $\mathbb{R}^4$ teki değişken yarıçaplı tüp üzerindeki loksodromun parametrizasyonu

$$\sigma(t)=\beta(u)+r(u)\left(e_3(u)\cos v(u)+e_4(u)\sin v(u)\right) \tag{6.10}$$

dır. Burada $v(u)=\varepsilon\tan\varphi\int_{u_0}^{u}\frac{\sqrt{1+r'^2}}{r}du$ dir [5].

Şimdi aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 6.1. $\mathbb{R}^4$ te, $\beta(u)=(u,0,0,0)$ baz eğrisini düşünelim. $r(u)=u$, $\varphi=\pi/4$ ve $\varepsilon=1$ alarak değişken yarıçaplı tüpün parametrizasyonu

$$x_2(u,v)=(u,0,u\cos v,u\sin v)$$

dir.

(6.9) eşitliğini kullanarak ve $u_0=1$ alarak $v(u)=\sqrt{2}\ln|u|$ bulunur.

$u\in(0.1,9)$ alınırsa, $v\in(-3.2563,3.2563)$ dir. Bu durumda loksodromun parametrizasyonu

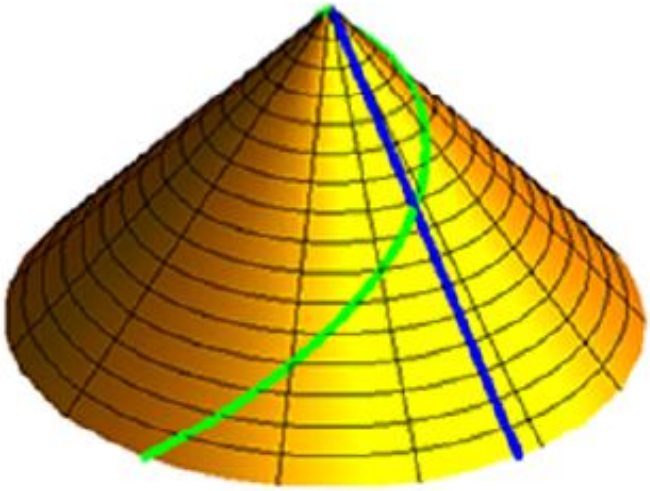
$$\sigma(u)=\left(u,0,u\cos\left(\sqrt{2}\ln u\right),u\sin\left(\sqrt{2}\ln u\right)\right)$$

dir.

Ayrıca (6.6) eşitliğini kullanarak, loksodromun yay uzunluğu yaklaşık olarak 17.8 bulunur.

$$ParamatricPlot3D\left[\{x(u,v)+y(u,v),z(u,v),w(u,v)\},\{u,a,b\},\{u,c,d\}\right]$$

Mathematica komutunu kullanarak, değişken yarıçaplı tüpün, loksodromun ve $v=2$ meridyeninin $\mathbb{R}^3$ uzayına izdüşümleri, Şekil 6.1 deki gibidir [5].



Şekil 6.1. Değişken yarıçaplı tüpün, loksodromun (yeşil), meridyenin (mavi) izdüşümleri.

SONUÇ

Loksodromlar, Dünya yüzeyi üzerindeki tüm meridyenleri sabit bir açıyla kesen özel eğrilerdir. Loksodromların rota değişimine ihtiyaçları yoktur. Böylece navigasyonda sıklıkla kullanılırlar. $\mathbb{R}^3$ teki dönel, helikoidal ve kanal yüzeyler üzerindeki loksodromlar farklı yazarlar tarafından incelenmiştir (Bkz, [16], [3], [4]). Bu tez çalışmasında, $\mathbb{R}^4$ teki helikoidal yüzeyler üzerindeki ve ayrıca değişken yarıçaplı tüpler üzerindeki loksodromların denklemlerini araştırdık. Yani, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki helikoidal ve kanal yüzeyler üzerindeki loksodromların denklemlerini, $\mathbb{R}^4$ uzayına genelledik. Ayrıca bazı örnekler verdik.

KAYNAKLAR

1. Arslan, K., Bayram (Kılıç), B., Bulca, B., Kim, Y. H., Murathan, C., and Öztürk, G., Rotational embeddings in $\mathbb{E}^4$ with pointwise 1-type Gauss map, Turk. J. Math., 35, 493-499, 2011.

2. Arslan, K., Bayram (Kılıç), B., Bulca, B., and Öztürk, G., Generalized Rotation Surfaces in $\mathbb{E}^4$, Results. Math. 61, 315-327, 2012.

3. Babaarslan, M., and Yayli, Y., Differential equation of the loxodrome on a helicoidal surface, Journal of Navigation, 68, 962-970, 2015.

4. Babaarslan, M., Loxodromes on Canal Surfaces in Euclidean 3-Space, Ann. Sofia Univ. Fac. Math. and Inf., 103, 97-103, 2016.

5. Babaarslan, M., Loxodromes on Helicoidal Surfaces and Tubes With Variable Radius in $\mathbb{E}^4$, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat., 68, 1950-1958, 2019.

6. Bates, P.W. Wei, and Zhao, S., Minimal Molecular Surfaces and Their Applications. Journal of Computational Chemistry, 29, 380-391, 2008.

7. Bulca, B., Arslan, K., Bayram, B., and Öztürk, G., Canal surfaces in 4-dimensional Euclidean space, Int. J. Optim. Control, Theor. Appl. (IJOCTA), 7, 83-89, 2017.

8. Dursun, U., and Turgay, N. C., General rotational surfaces in Euclidean space $\mathbb{E}^4$ with point-wise 1-type Gauss map, Math. Commun., 17, 71-81, 2012.

9. Do Carmo, M. P., Diferansiyel Geometri: Eğriler ve Yüzeyler, s. 587, TÜBA Yayınları, 2012.

10. Erdoğdu, M., and Özdemir, M., Generating Four Dimensional Matrices, doi:10.13140/RG.2.1.4118.3442, 2015.

11. Gal, R. O., and Pal, L., Some notes on drawing twofolds in 4-dimensional Euclidean space, Acta Univ. Sapientiae, Informatica, 1(2), 125-134, 2009.

12. Hieu D. T., and Thang, N. N., Bour's Theorem in 4-Dimensional Euclidean Space, Bull. Korean Math Soc., 54, 2081-2089, 2017.

13. Ikawa, T., Bour's Theorem and Gauss Map. Yokohama Mathematical Journal, 48, 173–180, 2000.

14. Kos, S., Filjar, R., and Hess, M., Differential Equation of the Loxodrome on a Rotational Surface. Proceedings of the 2009 International Technical Meeting of The Institute of Navigation, Anaheim, CA.,2009.

15. Moore, C. L. E., Surfaces of Rotation in a Space of Four Dimensions, Ann. Math. (2), 21, 81-93, 1919.

16. Noble, C. A., Note on loxodromes, Bull. Am. Math. Soc., 1-2, 116-119, 1905.

17. Sabuncuoğlu, A., Diferansiyel Geometri, s. 516, Nobel Yayınları, Ankara, 2012.

18. Xu, Z., Feng, R., and Sun, J., Analytic and algebraic properties of canal surfaces, J. Comput. Appl. Math., 195, 220-228, 2006.

19. Yoon, D. W., Rotation Surfaces with Finite Type Gauss Map in $\mathbb{E}^4$, Indian J. Pure Appl. Math., 32, 1803-1808, 2001.

20. Yoon, D. W., Some Properties of the Clifford Torus as Rotational Surfaces, Indian J. Pure Appl. Math., 34, 907-915, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Amasya'da doğan Hamide Sevda TÜFEKÇİ, ilk ve orta öğrenimini Amasya'nın Merkezinde sırasıyla Akşemseddin İlköğretim Okulu ve 12 Haziran Lisesinde tamamlamıştır. 2008 yılında kazandığı Hereke Ömer İsmet Uzunyol Meslek Yüksek Okulunda Dış Ticaret Bölümü Önlisans eğitimini 2010 yılında bitirmiştir. 2010 yılında kazandığı Yozgat Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2014 yılında birincilikle bitirmiştir.

2014 yılından beri Yozgat Bozok Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimi gören Hamide Sevda TÜFEKÇİ, evli ve 1 çocuk annesidir.

İletişim Bilgileri

Adres: Selçuklu mh. Kaplan sok.19/8
Sincan/ANKARA
Telefon:(531) 2703036
E-posta: hamidesevdakucuk@gmail.com