T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HİROTA YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

İFTAR ŞAHİN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

YOZGAT - 2021

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HİROTA YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

İFTAR ŞAHİN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

YOZGAT – 2021

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İFTAR ŞAHİN

28/09/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN HİROTA YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

İFTAR ŞAHİN

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. YUSUF PANDIR

Bu tez çalışmasında, Hirota-bilineer yöntemi incelenmiştir. Bu yöntem lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik tam tek dalga çözümlerini elde etmek için uygulanır. Bu tarz denklemlerin çoklu soliton çözümlerini elde etmek için kullanılan ve R. Hirota tarafından ortaya konan Hirota-bilineer yöntemi yardımıyla matematiksel fiziğin önemli denklemlerinin 1-, 2-, 3- ve çoklu soliton çözümleri araştırılmıştır. Ele alınan bu yöntem sırasıyla (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KP denklemi ile (3+1) boyutlu soliton denklemine uygulanmıştır. Bu yöntem kullanılarak lineer hale dönüşen denklemlerin çoklu soliton çözümlerini elde etmek için farklı fonksiyonlar ele alınmıştır. İncelenen denklemlerin diğer yöntemler ile elde edilen çözümleriyle bu çalışmada elde edilen tam çözümlerinin karşılaştırılması yapılmıştır. Ayrıca, (3+1) boyutlu genelleştirilmiş KP denklemi ve (3+1) boyutlu soliton denkleminin elde edilen çoklu (soliton) tam çözümlerinin fiziksel davranışlarını anlayabilmek için iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

2021, 50 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Hirota-Bilineer Yöntemi, (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş KP Denklemi, (3+1)-Boyutlu Soliton Denklemi, 1- Soliton, 2- Soliton, Çoklu Solitonlar, Tam Çözümler

ABSTRACT

MASTER THESIS

EXAMINATION OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY HIROTA'S METHOD

İFTAR ŞAHİN

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

MATHEMATICS

SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. YUSUF PANDIR

In this thesis, the Hirota-bilinear method was examined. This method is applied to obtain analytical exact single-wave solutions of the nonlinear partial differential equations. 1-, 2-, 3- and multiple soliton solutions of the important equations of the mathematical physics were investigated with the help of the Hirota-bilinear method, which was used to obtain the multiple soliton solutions of such equations and introduced by R. Hirota. This method is applied to the (3+1)-dimensional generalized KP equation and (3+1)-dimensional soliton equation, respectively. Different functions are considered in order to obtain multiple soliton solutions of the equations that become a linear using this method. The solutions of the examined equations obtained by other methods were compared with the exact solutions obtained in this study. In addition, two and three dimensional graphs are drawn to understand the physical behavior of the obtained multiple (soliton) exact solutions of the (3+1) dimensional generalized KP equation and the (3+1) dimensional soliton equation.

2021, 50 PAGE

KEYWORDS: Hirota-Bilinear Method, (3+1)-Dimensional Generalized KP Equation, (3+1)-Dimensional Soliton Equation, 1- Soliton, 2- Soliton, Multiple Solitons, Exact Solutions

ÖNSÖZ

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerinin analitik olarak elde edilmesi uygulamalı matematiğin önemli konularından biri olmuştur. Doğadaki farklı fiziksel olayların modellenmesiyle oluşturulan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin elde edilmesini sağlayan yöntemler bilim insanlarının sürekli ilgisini çeken konular arasındadır.

Bu çalışmada kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesini sağlayan dinamik yöntemlerden birisi olan Hirota-bilineer yöntemi ele alındı. 1971 yılında literatüre kazandırılan bu yöntem günümüzde hala kısmi türevli diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerinin bulunması için kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasının belirlenmesi ve hazırlık sürecinde yapılan çalışmaların her aşamasında bilgisini, tecrübelerini ve değerli zamanlarını esirgemeyerek bana her fırsatta yardımcı olan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf PANDIR'a, her zaman yanımda olan babama, anneme ve ablama teşekkürü bir borç bilirim.

İFTAR ŞAHİN

28/09/2021

İÇİNDEKİLER

Tez Onay Sayfası…….. ii

Tez Beyanı…….. iii

Özet…….. iv

Abstract…… v

Önsöz…… vi

İçindekiler…… vii

Şekiller Listesi…….. ix

1. GİRİŞ…… 1

2. GENEL BİLGİLER..……..... 6

2.1. Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler…….....…….. 6

2.2. Soliton Kavramı ve Çeşitleri...…….....…… 8

3. YÖNTEM…….....…… 12

3.1. Hirota-Bilineer Yöntemi....…… 12

3.2. Hirota-Bilineer Yönteminin Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması….…… 16

4. BULGULAR.....…… 19

4.1. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş KP Denklemine Hirota-Bilineer Yönteminin Uygulaması 19

4.2. (3+1)-Boyutlu Soliton Denklemine Hirota-Bilineer Yönteminin Uygulaması.... 29

5. SONUÇ ve ÖNERİLER …….....…… 38

6. KAYNAKLAR…….....…… 40

ÖZGEÇMİŞ

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil		**Sayfa**
Şekil 2.1.	Bir dalga kavramı	10
Şekil 4.1.	(4.20) denklemindeki çözümün $p_4=-2,\ q_4=1,\ r_4=1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	22
Şekil 4.2.	(4.30) denklemindeki çözümün $a_4=3,\ p_4=-2,\ q_4=1,\ r_4=1$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	24
Şekil 4.3.	(4.37) denklemindeki çözümün $a_1=-3,\ p_4=-2,\ q_4=r_1=r_4=1$ ve $q_1=1$ üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	27
Şekil 4.4.	(4.43) denkleminde $p_1=3,\ q_1=-1,\ r_1=3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	28
Şekil 4.5.	(4.64) denklemindeki çözümün $p_4=2,\ q_4=-1,\ r_4=2$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	32
Şekil 4.6.	(4.68) denklemindeki çözümün $a_3=-2,\ a_4=p_3=p_4=2,$ $a_4=q_4=-1,\ s_3=-2$ değerleri için reel kısmın üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	33
Şekil 4.7.	(4.82) denklemindeki çözümün $a_1=-2,\ p_3=p_4=2,\ q_4=-1$ $r_1=r_4=1$ değerleri için sanal kısmın üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	36

1. GİRİŞ

Yaşarken karşılaştığımız farklı olayların belli bir kuralların sonucunda oluştuğunu gözlemlemek zor değildir. Karşılaşılan her bir olayın daha iyi anlaşılması için insanoğlu bunları ortaya koyduğu yasalar ile anlaşılır kılmıştır. Ortaya konulan bu yasalar için uzun yıllardan bu yana çalışmalar yapılmış ve bilim insanları bu yasaların geliştirilmesine katkı sağlamışlardır. Genellikle yaşam bilimleri ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan bu yasalar fiziksel fenomenler olarak açıklanabilir. Fiziksel fenomenlerin matematiksel modeller aracılığıyla incelenmesi, hem teorik hem de uygulamalı bilimlerde temel bir unsurdur. Diferansiyel denklemler teorisinin temelleri fiziksel olayların modellenmesine dayanır. Bu modeller ise adi ve kısmi diferansiyel denklem ile denklem sistemleriyle belirtilir. Bu nedenle böyle bir modelin analitik ve yaklaşık çözümlerini bilmek modelin belirttiği fiziksel olayı daha iyi anlamak ve yorumlamak açısından önemlidir.

Kimya, fizik, mühendislik gibi birçok uygulamalı bilim alanlarında karşımıza çıkan problemlerin modellenmesiyle genellikle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler elde edilir. Bu sebeple lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin analitik çözümlerinin elde edilmesi büyük önem arz eder. Analitik çözümlerin elde edilmesini sağlayan teorilerin geliştirilmesi sonucunda denklemlerin tam çözümleri elde edilmiştir. Bu geliştirilen analitik çözüm yöntemleriyle meydana gelen fiziksel fenomenlerin daha iyi anlaşılması sağlanmıştır.

Bu fiziksel olayların doğrusal olmayan optik, biyoloji, katı hal fiziği, deniz bilimi vb. gibi birçok doğa biliminde geniş uygulamaları bulunur. Bunlara ısının zamanla yayılması, uyduların konumlanması, roketleri atmosfer dışı hareketleri, sığ ve derin sulardaki dalga hareketleri, bir DNA'nın yapısındaki bozulma sonucu oluşan mutasyonlarının tespiti ve bir maddenin parçalanmasıyla oluşan radyoaktif bozulmayı verebiliriz. Ele alınan problemler genellikle lineer olmadığından modellemeler sonucunda lineer olmayan denklemler elde edilmektedir. Bu modellemelerle oluşan diferansiyel denklemlerin analitik veya tam çözümleri(kapalı formları) ile nümerik çözümleri elde edilmeye çalışılır. Lineer olmayan ile lineer denklemlerin çözüm yöntemleri farklıdır. Lineer denklemler için geçerli olan üst üste bindirme kuralı yani; herhangi iki farklı çözümün birleşimi de bir çözüm meydana getirirken, lineer olmayan denklemler için bu kural geçerli değildir. Bu sebeple lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin

integre edilip edilmeyeceği ile sınıflandırılması uygulanacak yöntemler açısından oldukça önemlidir.

Literatürdeki önerilen yöntemler sayesinde analitik çözümlerinin bulunması ve elde edilen çözümlerin fiziksel özelliklerinin anlaşılması önemlidir. Ayrıca uygulanan analitik(tam) çözüm yöntemleri sonucunda farklı çözümler bulunabileceğinden bu çözümlerin sınıflandırılması da önemlidir. Bu sebeple uygulamalı matematik bilim dalındaki bilim insanları analitik ve nümerik çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine katkı sağlamaktadır. Birçok araştırmacı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümüne katkı sağlayan farklı yöntemler geliştirdiler. Geliştirilen bu yöntemler sayesinde elde edilen çözümler, ele alınan problemlerin mekanizmalarının anlaşılması ve yorumlanması katkı sağlamaktadır.

Ayrıca zamana göre türevi içeren lineer olmayan diferansiyel denklemlerin integrallenebilirliği önerilen yöntemler açısından önemlidir. Bu sebeple bu tarz denklemlerin çözümleri veren genel bir yöntem yoktur. Direkt ve dolaylı yöntemler sayesinde son yıllarda bu tarz denklemlerin çözülebilmesi mümkün olmaktadır. Önerilen yöntemler içerisinde soliton teorisindeki dalga kavramı önemli rol oynar. Ayrıca herhangi bir çözüme sahip olmayan bu tarz denklemlerin nümerik çözümleriyle hareketli dalga (tam) çözümlerinin araştırılması önemlidir.

Soliton teorisindeki dalga kavramı; belirli bir alanda belli bir hız ile hareket eden ve herhangi bir zamansal değişime yol açmayan bir doğa olayına karşılık gelir. Farklı çeşitlerde dalgalar bulunmaktadır. Sabit hızla ilerlerken kendi şeklini koruyabilen dalgalara tek dalga(soliton) adı verilir. Solitonlar etkilere maruz bırakılsalar bile kendi özelliklerini korurlar. Soliton teorisinin geniş bir uygulama alanı olmasından dolayı, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin hareketli dalga (tam) çözümlerinin elde edilmesini sağlayan direkt ve dolaylı yöntemler bilim insanları tarafından literatüre kazandırılmıştır. Geliştirilen bu yeni yöntemler ile yeni çözüm fonksiyonlarının belirlenmesi sayesinde farklı fiziksel fenomenlerin anlaşılması mümkün hale gelmiştir. Bu nedenle denklemlerin direkt yöntemler kullanılarak çözülebilmesine olanak sağlanması dalga modeli açısından da önemlidir. Böylece elde edilen hareketli dalga çeşitlerinin soliton teorisindeki karşılıklarının belirlenmesi ve bunların uygulamalardaki karşılıklarının ortaya çıkarılması önem arz eder. Bu yüzden son yıllarda bu tarz denklem ve sistemlerin yaklaşık ve analitik çözümlerini bulmak için pek çok direkt yöntemler geliştirilmiştir. Bu direkt yöntemlerden

en önemlileri Hirota'nın direkt(bilineer) yöntemi (Hirota, 1971; Hirota, 1973; Hirota, 1982; Hirota, 2004; Hietarinta, 1987; Hietarinta, 1997; Hietarinta, 2005), Rosales'in pertürbasyon yöntemi (Rosales, 1978), Hereman'ın gerçek üstel yaklaşımı (Hereman vd., 1986), Frobenius yöntemi (Ma vd., 2007), Faz uzayı analizi: Liapunov (Kalman ve Bertram, 1960) verilebilir.

Hareketli dalga (tam) çözüm yöntemlerine Hirota'nın bilinear dönüşüm yöntemi (Hirota, 1971; Hirota, 1973; Hirota, 1982; Hirota, 2004; Hietarinta, 1987; Hietarinta, 1997; Hietarinta, 2005), üstel fonksiyon yöntemi (He ve Wu, 2006; Zhang, 2007; Zhu, 2007), çoklu üstel fonksiyon yöntemi (Wan vd., 2020; Ma ve Zhu, 2012), tanh fonksiyon yöntemi (Malfliet ve Hereman, 1996; Malfliet, 2004), (G'/G)- açılım yöntemi (Akbar vd., 2013), geliştirilmiş (G'/G)-açılım yöntemi (Guo ve Zhou, 2010), deneme denklem yöntemi (Liu, 2006; Gürefe vd., 2011), genişletilmiş deneme denklem yöntemi (Pandır vd., 2012; Gürefe vd., 2013;), çoklu genişletilmiş deneme denklem yöntemi (Pandır vd., 2013), Kudryashov yöntemi (Kudryashov, 2012; Lee ve Sakthivel, 2013), modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi (Tandoğan vd., 2013), genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi (Pandır, 2016; Pandır vd., 2015), ilk integral yöntemi (Abbasbandy, 2010), Weierstrass eliptik fonksiyon açılım yöntemi (Lia vd., 2008), Jakobi eliptik fonksiyon yöntemi (Fu vd., 2001; Shen, 2003), ve genelleştirilmiş F -açılım yöntemi (Pandır ve Turhan, 2017; Pandır, 2017) gibi yöntemler örnek olarak verilebilir. Bu analitik yöntemlerden sadece Hirota bilineer yöntemi lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin multi(çoklu) soliton çözümlerini bulmak için kullanılmaktadır.

Ryogo Hirota 1971 yılında, sonradan Hirota bilineer yöntem olarak adlandırılacak, integrallenebilen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çoklu soliton çözümlerinin elde edilebileceği bir yöntem önerdi (Hirota, 1971). Önerilen bu yöntem lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere bağımlı değişken dönüşümü uygulayarak, bilineer forma dönüştürüp çözmeyi amaçlamaktadır. Yöntemi uygulamasında ilk önce denklemin yapısına uyan bir bağımlı değişken dönüşümü seçilmelidir. Seçilen bu dönüşüm her denklem için farklı olacağından seçimi çok kolay değildir. Denklemi bilineer hale getirmek için ise özel bir türev operatörü olan Hirota D-türev operatörü kullanılır. Bu türev operatörü denklemi bu operatörler cinsinden polinom şeklinde yazılmasını sağlamaktadır. Bilineer hale gelen denkleme pertürbasyon tekniği uygulanarak, denklemin multi(çoklu) soliton çözümleri bulunur (Hirota, 1971). Hirota tarafından önerilen bu

yöntem sonraki zamanlarda birçok denklemin çoklu soliton çözümlerini bulmak için kullanılmıştır (Hietarinta, 1987; Hietarinta, 1997; Hietarinta, 2005). Hirota'nın literatüre kazandırdığı bu etkin yöntemin ilerki yıllarda farklı versiyonları bilim insanları tarafından önerilermiştir. (Hereman ve Nuseir, 1997; Ma vd., 2010).

Willy Hereman ve Amenia Nuseir 1997 yılında sadeleştirilmiş Hirota metodu olarak adlandırılan ve bilineer yapılara gereksinim olmadan denklemlerin çoklu soliton çözümlerinin bulunabileceğini gösterdiler (Hereman ve Nuseir, 1997). Hereman ve Nuseir'in önerdikleri yöntem ile bilineer hale dönüştürmeden yada dönüşmeyen denklemlerin çözümlerini elde ettiler. Ele aldıkları denklemler ise konveksiyon terimini barındıran ve barındırmayan Fischer denklemleri olup, ayrıca bu denklemler integrali alınamayan denklemlerdir. Buradan elde ettikleri çözümler ise hareketli dalga çözümleri olup, çoklu soliton çözümleri değildir.

Bu tez çalışmasında, Hirota bilineer yönteminin incelenmesi yapılarak, lineer olmayan kısmi türevli denklemlere uygulamaları verilmiştir. Ryogo Hirota'nın literatüre sunduğu Hirota bilineer yöntemi ifade edilmiş, daha sonra ise bu yöntemin diğer direkt yöntemler ile karşılaştırılması belirtilmiştir. Ayrıca Hirota bilineer yönteminin diğer geliştirilen versiyonları da incelenmiş ve bu yöntem ile farklı olan yanları ifade edilmiştir. Hirota bilineer yöntemi sırasıyla (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş KP denklemine ve (3+1)-boyutlu soliton denklemine uygulanmıştır. Hirota bilineer yönteminde kullanılacak bağımlı değişken dönüşümünün yapısının tespiti ve elde edilen dönüşüme göre denklemin bilineer hale getirilmesi detaylı bir şekilde ifade edilmiştir. Daha sonra çoklu soliton çözümlerini elde etmek için hazırlanan algoritmalara göre meydana getirilen kodlar Mathematica 10 paket programıyla yazılmıştır. Ayrıca ele aldığımız denklemlerin paket program yardımıyla hesaplanan çözümlerinin kontrolü yapılmıştır ve denklemlerin literatürde yer alan ve yer almayan 1-soliton, 2-soliton ve çoklu soliton çözümleri ifade edilmiştir. Bulunan 1-soliton, 2-soliton ve çoklu soliton çözümlerinin fiziksel davranışlarının daha iyi açıklanabilmesi adına iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde ele alınacak kısmi türevli denklemlerin genel bilgileri, tanımlarıyla bu denklemlerin çözümlerinden elde edilen 1-soliton, 2-soliton ve çoklu soliton çeşitlerinden ayrıntılı olarak bahsedilmiştir. Üçüncü bölümünde ise Hirota bilineer yöntemi ve bu yöntemin diğer yöntemlerle karşılaştırılması ayrıntılı olarak verilmiştir. Dördüncü bölümde Hirota bilineer yöntemi sırasıyla (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş KP

denklemine ve (3+1)-boyutlu soliton denklemine uygulanmıştır. Sonuç bölümde Hirota bilineer yöntemine göre elde edilen 1-soliton, 2-soliton ve çoklu soliton çözümlerin farklı soliton çözümler olup olmadığının ele alınan denklemlerin diğer yöntemlerle elde edilen çözümlerle karşılaştırılması ifade edilmiştir. Ayrıca elde edilen soliton çözümlerin fiziksel davranışları hakkında literatüre göre değerlendirme yapılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Doğadaki fiziksel fenomenleri anlamamıza olanak sağlayan ve matematiksel argümanların kullanılarak bunların modellemesi yapılabilmektedir. Bu modellemeyle meydana gelen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması bu fiziksel fenomenlerin anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır. Tezin bu bölümünde ilerleyen bölümlerde kullanacağımız kavramlarının anlaşılmasını sağlayacak bazı kısmi türevli denklemler ile bunların çözümlerinde karşılaştığımız soliton ve türleri hakkında temel tanımlar ve özellikleri ayrıntılı olarak verilmiştir.

2.1. Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Kısmi türevli diferansiyel denklem, $x, y, z, ..., t$ bağımsız değişkenler ve bilinmeyen fonksiyon $\varphi = \varphi(x, y, z, ..., t)$ olmak üzere

$$\Theta\left(x, y, z, \cdots, t, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \cdots, \varphi_t, \varphi_{xx}, \varphi_{yy}, \varphi_{zz}, \cdots, \varphi_{tt}, \cdots\right) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Burada yer alan kısmi türevler sırasıyla

$$\varphi_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ \varphi_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y},\ \varphi_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},\ \varphi_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\varphi_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},\ \varphi_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},\ \varphi_{zz} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},\ \varphi_{tt} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. (2.1) denklemi ile verilen kısmi türevli diferansiyel denklemlerin mertebe, lineerlik gibi farklı sınıflandırmaları bulunur. Bir denklemde yer alan en yüksek mertebeden türev içeren terimin lineer olması durumunda denkleme yarı lineer; eğer denklem yer alan en yüksek mertebeden türevli terimlerin katsayıları sadece bağımsız değişkene ait ise, denkleme hemen hemen lineer denir. Bu tanımlara bakıldığında yarı lineer denklem hemen hemen lineer denklemi, hemen hemen lineer denklem ise yarı lineer denklemi içermektedir. Bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin katsayıları göre sabitse denkleme sabit katsayılı, değişken katsayılı ise değişken katsaylı ve kompleks katsayılı ise de kompleks katsayılı denklem olarak sınıflandırma yapılabilir. Ayrıca denklemleri yapılarına görede sınıflandırabiliriz. İkinci mertebeden sabit katsayılı hemen hemen lineer bir kısmi türevli diferansiyel denklemin genel halini

$$A(x, y)\varphi_{xx} + 2B(x, y)\varphi_{xy} + C(x, y)\varphi_{yy} + F\left(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y\right) = 0 \tag{2.4}$$

olarak kabul edelim. Burada A, B ve C herhangi bir düzlemin Θ bölgesinde sürekli türevlenebilen ve üçünün de aynı zamanda sıfırdan farklı olduğunu kabul edelim. Buradan delta fonksiyonunu $\Delta(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y)$ şeklinde tanımlayalım. Eğer $\Delta(x,y) > 0$ ise (2.4) denklemine hiperbolik, $\Delta(x,y) = 0$ ise parabolik ve $\Delta(x,y) < 0$ ise, eliptik denklem olarak denir. (Çağlıyan ve Çelebi, 2010). Homogen olmayan dalga denklemi

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = G(x,t) \tag{2.5}$$

hiperbolik tip denkleme, homogen olmayan ısı denklemi

$$u_t - k u_{xx} = H(x,t) \tag{2.6}$$

parabolik tip denkleme, iki boyutlu Poisson denklemi

$$u_{xx} + u_{yy} = \eta(x,y) \tag{2.7}$$

eliptik tip denkleme örnek olarak verebiliriz.

Eliptik tip denklemler; tanımlandıkları bölgede potansiyel olarak adlandırılan büyüklüğün değişimini (sıklığı) ifade ederler. Buradaki tanımlanan potansiyele örnek olarak sıcaklık ve basınç verilebilir.

Parabolik tip denklemler ise tanımlanan potansiyelin farklı durumlarındaki büyüklüğün elde edeceği son değerleri ifade eder. Zamanla değişim gösteren bağıl ısı ve madde yayılması problemleri bu duruma örnek olarak verilebilir.

Hiperbolik tip denklemler ise zamana bağlı olmak üzere; bir ortamın içerisinde yayılmayı(dalganın) veya titreşimleri ifade eder. Doğa bilimleri ve mühendislik alanlarında genellik dalga denklemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunlara örnek olarak salınım yapan bir yayı, deprem esnasında yapılarda ölçümlenen titreşimleri, jel kıvamındaki bir sıvının içinde asılı halde bulunan taneciklerin oluşturduğu hareketi verebiliriz. Dalga denkleminin en çok görüldüğü alanlar akustik, optik, ses yayılması, aerodinamik ve atom fiziği verilebilir.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulabilmek her zaman mümkün olmayabilir. Lagrange-Charpit yöntemi birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümleri bulmaya yarayan bir yöntemdir. Denklemlerin genel çözümünü bulabilmek için uygulanacak yöntemlerin belirlenmesi için

denklemlerde yer alan bağımsız değişkenlerin sayısı ile denklemin mertebesi oldukça önemlidir. Bu sebeplerden dolayı denklemin ya tek çözümü, ya sonsuz çözümü ya da hiç çözümü olmayabilir. Bazen ise bütün çözümlerin kapsanmadığı, parametreli veya genel çözümlerden elde edilemeyen aykırı çözümler bulunabilir.

Yüksek mertebeden lineer olmayan denklemlerin genel çözümünün bulunmasını sağlayan genel bir yöntem bulunmamaktadır. Bu sebeple herhangi bir çözümün denklemi sağlaması durumunda bu tarz çözümlere tam çözümler denilmektedir. Literatürde incelendiğinde bu tam çözümlerin elde edilmesini sağlayan pek çok yöntem olduğu görülür. Tam çözüm yöntemlerinin hepsi hareketli dalga dönüşümü uygulayarak, lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere dönüştürmeye dayanmaktadır. Uygulanan yöntemlerle soliton, kompakton, kink ve periyodik çözümler gibi adlandırılan tam çözümler bulunmaktadır. Bu çözümlerin hepsini veren genel ve tek bir yöntem bulunmamaktadır (Dönmez, 2020).

2.2. Soliton Kavramı ve Çeşitleri

Sıklıkla fen bilimlerinde karşımıza çıkan dalga, boşlukta veya herhangi bir ortamda yayılan ve genellikle enerjinin taşınmasına izin veren titreşimler olarak tanımlanır. Sabit bir konumda oluşan titreşimler ile meydana gelirler ve zaman içerisinde belli bir ortamda ilerleyip bir dalga modelini meydana getiren denklemi oluştururlar. Dalgalara örnek olarak su yüzeyindeki rüzgâr ile oluşan yüzey dalgaları, deprem sonrasında denizde oluşan uzun periyotlu dalgalar ve ses dalgaları verilebilir. Dalgaların mekaniksel dalgalar ve elektromanyetik dalgalar olmak üzere iki çeşidi bulunur. Mekanik dalgalar belli bir ortamda deformasyona maruz kalır iken, elektromanyetik dalgalar ise herhangi bir ortama ihtiyaç duymadan yayılırlar. Mekanik dalgalara örnek olarak hava moleküllerinin çarpışmasıyla yayılan ses dalgaları verilebilir. Elektromanyetik dalgalara örnek ise yüklü parçacıkların meydana getirdiği manyetik alanlarda oluşan radyo dalgaları verilebilir.

Titreşimlerin oluşturduğu dalga sabit bir frekansla ve kendisinin boyuna bağlı olarak hareket yapar. Frekans, dalga boyu ve genlik herhangi bir dalganın karakteristiğini belirler. Genlik salınımın şiddetini, frekans salınımın sıklığını ve dalga boyu ise dalganın iki tepesi veya iki çukuru arasındaki mesafeyi gösterir. Periyodik ve periyodik olmayan dalgalar şeklinde dalga hareketi sınıflandırılır. Bir kemanın çıkardığı nota sesine periyodik dalgaya ani bir patlamayla meydana gelen ses de periyodik olmayan dalgaya örnek olarak verilebilir (Hirota, 2004).

Dalgaları duran ve hareketli dalgalar olmak üzere de sınıflandırılabilir. Pozisyonlarını değiştirmeyen, ortamın hareketine ters hareket eden ve durgun bir ortamda bile ters yönlü hareket eden iki dalganın etkileşmesiyle meydana gelen dalgalar duran dalgalar denir. Belli bir ortamda sadece enerjinin bir noktadan diğer bir noktaya yayılması ile oluşan dalgalara hareketli dalgalar adı verilir. Hareketli dalgalarda frekans ile dalga boyu ters orantılı olup, dalga boyu azalırken frekans artmaktadır. Dalganın hızını V, dalganın boyunu λ ve dalganın frekansını f ile gösterirsek,

$$\nu = f\lambda \tag{2.8}$$

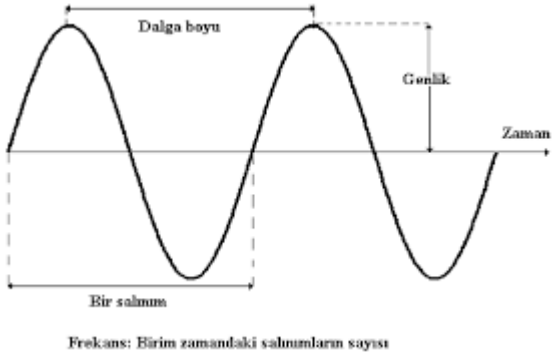
ifadesi yazılır.

Şekil ve hızını değişmeden koruyup, kendisini güçlendirerek yayılan lineer olmayan dalgalara soliton(tekil dalgalar) adı verilir. Herhangi bir etkiye maruz kaldıklarında veya birbirleriyle çarpıştıklarında mevcut özelliklerini koruyabilirler. Solitonlar lineer olmayan fiziksel olayların modellenmesiyle oluşturulan denklemlerin çözümleriyle elde edilirler. Örneğin mıknatıslardaki manyetik hareketlerde, plazma fiziğinde, nörobiyolojide nöron sinyallerinde ve optik ışınlarının ilerlemesinde karşılaştığımız solitonlar gelişen teknolojiyle birlikte kendisine farklı uygulama alanları bulmaktadır. Solitonlar uzun mesafelerde bile taşınabildiği için fiber optikte normal dalga yerine kullanılabilirler. Böylece, taşınan sinyallerde kayıp olmadan büyük miktarda bilgi istenilen yere taşınabilecektir. Ayrıca, fiber optikler boyunca karşılaşan solitonlar çarpışsalar bile birbirlerini etkilenmemekte ve sinyallerin her iki yönde iletilebilmesi sağlanmaktadır. Bu sayede sinyaller istenilen yere yere orijinal durumlarında ve istenildiği oranda ulaştırılabilmektedir.

1834 yılında Scott Russell tarafından ilk kez solitary(tekil) dalgalar gözlemlenmiştir. Daha sonra bu gözlem laboratuvar ortamında bir kez daha bu dalgaları tekrardan görmek için deneysel olarak yapılmıştır. Bu deney için su tankları oluşturmuş, su tanklarının uçlarına ağırlık bırakılarak tekil dalgaları ve onların özellikleri detaylı bir şekilde gözlemlenmiştir. (Hirota, 2004). Yapılan deneyler sonucunda herhangi bir ortamdaki solitonun dalga hızını ν, dalgasının genliğini ℓ, derinliğini h ve yer çekimini g ile gösterilirse

$$\nu = \sqrt{g\left(\ell + h\right)} \tag{2.9}$$

olarak ifade edilir.



Şekil 2.1. Bir dalga kavramı

Farklı genliklere sahip olan iki tekil dalga birbirleriyle çarpıştıktan sonra birleşen iki tekil dalga birbirlerinden ayrılarak asılı koruyarak birleşmeden kendi hareketlerine devam ederler. Ayrıca yapılan deneyler sonucunda meydana gelen dalgaların lineer olmayan bir davranış gösterdikleri gözlemlenmiştir (Hirota, 2004). Farklı iki normal dalga ise birbirleriyle çarpıştıktan sonra ya düzleşirler ya da dikleşerek sönümlü bir hale gelirler. Russell'in yaptığı deneyler ve elde ettiği sonuçlar herhangi bir teoriyle birleştirilmemiş ve deneysel sonuçlar lineer olmayan bir denklemin çözümüne karşılık olarak belirtilmemiştir. İlerleyen yıllarda birçok bilim insanı Russell'in elde ettiği sonuçlara karşılık gelecek bir probleminin çözümünde tekil dalga kavramını detaylı olarak araştırdılar.

1895 yılında Hollandalı matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries sonradan KdV denklemi olarak adlandırılacak

$$\varphi_t - 6\varphi\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0 \tag{2.10}$$

denkleminin çözümü elde ettiler. η dalga sayısını göstermek üzere,

$$\varphi(x,t) = \ell\,\mathrm{Sech}^2\left(\eta\left(x - vt\right)\right),\ v = 2\ell = 4\eta^2 \tag{2.11}$$

şeklindeki çözümün bir tekil dalgaya karşılık geldiğini ispatladılar (Hirota, 2004). Böylece Russell'in sığ sularda gözlemlediği dalgaların sürekli olarak yayılmasını açıklayan model KdV denkleminin çözümüyle anlam kazanmıştır. Bu denklemin çözümüne karşılık gelen dalga yapılarının kararlı olup olmadığı ile ilgili araştırmalar yapılmış ve iki solitary dalganın birleşmesiyle biçimlerindeki değişimler belirlenmeye çalışılmıştır.

1965 yılında Kruskal ve Zabusky KdV denkleminin nümerik bir çözüm yöntemi olan sonlu farklar yöntemiyle nümerik çözümlerini incelediklerinde hakikaten iki dalganın

çarpışması sonrasında yapılarını koruduklarını gözlemlediler ve bu tarz dalgalara ilk kez soliton ismini verdiler (Hirota, 2004). Bu çalışma ile soliton teorisinin temelleri atılmış ve bu konuda yeni bir sayfa açılmıştır. 1967 yılında ise Gardner ve ark. analitik bir yöntem olan ters saçılma yöntemini geliştirip, KdV denkleminin farklı soliton çözümlerini elde etmişlerdir (Hirota, 2004; Kaplan 2018; Kangalgil, 2008).

Bu yıllardan sonra KdV denkleminin ve diğer denklemlerin hem analitik hem de nümerik olarak çözümlenmesi soliton teorisine ilgi ve alakayı arttırmıştır. Günümüzde hala bu konu üzerine yapılan çalışmalarla ileri teknolojilerde solitonlara ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin telekomünikasyon, iletişim sektörlerinde ve ileri radar teknolojilerinde gibi birçok alanda solitonlarla karşılaşılmaktadır.

3. YÖNTEM

Bu bölümde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini direkt olarak bulmaya olanak sağlayan en iyi bilinen yöntemlerden biri olan Hirota bilineer yönteminin detaylı bir şekilde incelemesi yapılmıştır. Matematiksel fizikte önemli bir yere sahip olan yüksek boyutlu lineer olmayan evrim denklemlerinin çözümünü bulmaya yarayan Hirota bilineer yöntemi ifade edilmiştir. Sonra bu yöntemin farklı versiyonları ile diğer yöntemlerle karşılaştırılması yapılmış ve avantajlı ve dezavantajları durumları açıklanmıştır. Hirota bilineer yöntemiyle birçok bilim insanının dikkatini çekmiş ve yüksek boyutlu lineer olmayan diferansiyel denklem ve sistemlerin 1-, 2- ve çoklu soliton çözümleri bulunmuştur. (Hirota, 1982; Hietarinta, 1987; Hietarinta, 1997; Hietarinta, 2005; Pandır ve Ulusoy, 2017; Pu ve Hu, 2018; Liu vd., 2019;).

3.1. Hirota-Bilineer Yöntemi

Ryogo Hirota tarafından önerilen Hirota bilineer yöntemi; lineer olmayan evrim denklemlerinin N-soliton çözümlerini elde etmek için kullanılan direkt bir yöntemdir. Hirota bilineer yöntemi lineer olmayan diferansiyel denklemlerin 1-, 2- ve çoklu soliton benzeri çözümleri elde etmek için önerildi (Hirota, 1971). Hirota'nın yayınladığı makale soliton çözümlerinin direkt olarak bulunmasını sağladığı için birçok araştırmacının dikkatini çekti.

Hirota bilineer yöntemi, integre edilebilen denklemler için ideal bir yöntemdir. Bilineer hale getirilebilmiş birçok denklem için 1 ve 2- soliton çözümler genellikle mevcut olup, eğer mümkünse multi(çoklu)-soliton çözümleri elde edilebilirse, bu takdirde bu tarz denklemlerin integrallenebileceği söylenebilir. Diğer yandan integrallenebilen lineer olmayan denklemler mutlaka bilineer hale getirilebilmektedir. Bunun tersi her zaman doğru değildir. Asıl amaç lineer olmayan bir diferansiyel denklemin uygun yöntemle lineer hale getirilmesi ve buradan denklemin tam çözümlerinin elde edilmesi mümkün olmaktadır. Hirota bilineer yöntemi lineer hale getirme esasına dayandığından, ele alınan denklemin nasıl bir bilineer forma sahip olacağının bilmesi gerekmektedir. Yöntem; tek bir bilineer denklem, birden fazla bilineer denkleme veya sistemlere dönüşen lineer olmayan diferansiyel denklemlere uygulanır. Ayrıca bu yöntem fark denklemlerine, integro tipteki denklemlere uygulanır. Hirota bilineer yöntemin esası üstel fonksiyonlardan oluşan 1-, 2- ve çoklu soliton çözümlerini elde etmektir (Kaplan 2018).

Bu bölümde, Hirota bilineer yönteminin nasıl bir çözüm algoritma olduğu detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem $x, y, t, \ldots$ bağımsız değişkenler olmak üzere

$$\Theta\left(\varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_t, \ldots, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{xt}, \ldots, \varphi_{tt}, \ldots\right) = 0 \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\varphi\left(x, y, t, \ldots\right)$ bilinmeyen fonksiyon ve Θ'da bir polinom ifadesine karşılık gelmektedir. $\varphi\left(x, y, t, \ldots\right)$ fonksiyonunu Hirota bilineer yöntemine göre belirlemek için aşağıdaki adımları yapmalıyız.

1. Adım: Bazı yeni ve bilinmeyen f fonksiyonu için bir $\varphi = T\left(f\right)$ bilineer dönüşümü uygulanır.

2. Adım: Hirota tarafından tanımlanan D-operatörü m, n ve p negatif olmayan tam sayılar olmak üzere,

$$D_x^m D_y^n D_t^p f\left(x,y,t\right)\cdot g\left(x,y,t\right) = \left(\partial_x - \partial_{x'}\right)^m \left(\partial_y - \partial_{y'}\right)^n \left(\partial_t - \partial_{t'}\right)^p f\left(x,y,t\right)\cdot g\left(x',y',t'\right)\Big|_{x=x',y=y',t=t'} \tag{3.2}$$

1. Adım'daki dönüşüm kullanılarak, (3.1) denklemi

$$\phi\left(D_t, D_y, D_x, f\right) = 0 \tag{3.3}$$

biçimindeki Hirota'nın bilineer formuna dönüştürülebilir (Hirota, 1974).

3. Adım: Genişletilmiş test yaklaşımını kullanarak, (3.3) bilineer denkleminin farklı soliton dalga çözümlerini elde etmek için uygulanan algoritmaya göre denklem çözülür. Çözümden elde edilen farklı soliton dalga çözümlerindeki periyodik dalganın periyodu sonsuz olarak kabul edelim. Böylece sadece düzensiz dalgaları değil diğer farklı bütün olan rasyonel, periyodik ve homoklinik dalgalar gibi dalgaları elde edebiliriz.

Hirota D-operatörün uygulanması ile ilgili bazı özellikler aşağıda kurallar şeklinde belirtilmiştir.

$$D_x f\cdot g = f_x g - f g_x \tag{3.4}$$

$$D_x D_y f\cdot g = f_{xy} g - f_x g_y - f_y g_x + f g_{xy} \tag{3.5}$$

$$D_t^2 f\cdot g = f_{tt} g - 2 f_t g_t + f g_{tt} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} D_t^3 f\cdot g &= f_{ttt} g - 3 f_{tt} g_t + 3 f_t g_{tt} - f g_{ttt} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$D_t^s f\cdot g = \sum_{r=0}^{s} (-1)^r \binom{r}{s} \frac{\partial^{(r-s)} f\, \partial^r g}{\partial t^{(r-s)} \partial t^r} \tag{3.8}$$

Hirota D-operatörü incelendiğinde klasik türevdeki çarpımın türevi ile neredeyse aynı olduğu görülür. Burada sadece farklılık türevdeki terimler arasındaki işaretin eksi olmasıdır.

İşlemlerde kolaylık sağlaması için Hirota D-operatörünün tanımı dikkate alındığında aşağıdaki özellikler kolayca gösterilebilir.

$$D_x^m D_y^n f \cdot g = D_y^n D_x^m f \cdot g = D_x^{m-1} D_y^n D_x f \cdot g \tag{3.9}$$

$$D_x^m f \cdot 1 = \frac{\partial^m f}{\partial x^m} \tag{3.10}$$

$$D_x^m f \cdot g = (-1)^m D_x^m g \cdot f \tag{3.11}$$

$$m \quad tek \quad ise \quad D_x^m f \cdot f = 0 \tag{3.12}$$

$$D_x\left(D_x f \cdot g\right)\cdot h + D_x\left(D_x h \cdot f\right)\cdot g + D_x\left(D_x g \cdot h\right)\cdot f = 0 \tag{3.13}$$

Hirota bilineer yönteminin 1. Adımında bulunan lineer olmayan denklemi bilineer forma dönüştüren dönüşümler:

i. Rasyonel dönüşüm $\varphi = \frac{a}{b}$ olarak seçilebilir. Buradaki tanımlanan dönüşüme göre ilgili türevlerin Hirota D-operatörü cinsinden karşılıkları

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D_x a \cdot b}{b^2} \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D_x^2 a \cdot b}{b^2} - \frac{a}{b}\frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2} \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{D_x^3 a \cdot b}{b^2} - 3\frac{D_x a \cdot b}{b^2}\frac{D_x a \cdot b}{b^2} \tag{3.16}$$

$$\vdots$$

olarak bulunur.

ii. Diğer bir dönüşüm örneği ise logaritmik dönüşüm olan $\varphi = R(\ln f)_{xx}$ olarak seçilebilir. Burada özel olarak $R = 2$ alınırsa, $\varphi = 2(\ln f)_{xx}$'nin ilgili türevlerinin Hirota D-operatörü cinsinden karşılıkları

$$2\frac{\partial}{\partial x^2}(\ln f) = \frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \tag{3.17}$$

$$2\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}(\ln f) = \frac{D_x D_t f \cdot f}{f^2} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4}(\ln f) = \frac{D_x^4 f \cdot f}{f^2} - 3\left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2}\right)^2 \tag{3.19}$$
$$\vdots$$

olarak hesaplanır. Bu belirtilen dönüşümler ele alınan denklemlerde bulunan terimlere ve denklemdeki terim sayılarına bağlı olmak üzere daha farklı da seçilebilir. Örneğin (2.10) da belirtilen KdV denklemini göz önüne alalım. Bu denkleme $\varphi = -2(\ln f)_{xx}$ logaritmik bilineer dönüşüm uygulanırsa, $\phi = -2\frac{f_x}{f}$ olmak üzere $\varphi = \phi_x$ olur ki bu da (2.10) denklemine uygulandığında

$$\phi_{xt} - 6\phi_x\phi_{xx} + \phi_{xxxx} = 0 \tag{3.20}$$

denklemine dönüşür. (3.20) denklemini x'e göre bir kez integre edip integrasyon sabitini de sıfır olarak seçersek,

$$\phi_t - 3\phi_x^2 + \phi_{xxx} = 0 \tag{3.21}$$

elde edilir. Burada ilgili türevler sırasıyla

$$\phi_t = -2\left(\frac{f_{xt}f - f_x f_t}{f^2}\right), \qquad \phi_x = -2\left(\frac{f_{xx}f - f_x^2}{f^2}\right) \tag{3.22}$$

$$\phi_{xxx} = -2\left(\frac{f_{xxxx}}{f} - \frac{4f_x f_{xxx}}{f^2} - \frac{3f_{xx}^2}{f^2} + \frac{12f_x^2 f_{xx}}{f^3} - \frac{6f_x^4}{f^4}\right) \tag{3.23}$$

şeklinde hesaplanır. Bu hesaplanan türevler (3.21) denkleminde yerine yazılıp, denklem düzenlediğinde

$$f_{xt}f - f_x f_t + f_{xxxx}f - 4f_x f_{xxx} + 3f_{xx}^2 = 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. (3.24) denkleminin Hirota D-operatör karşılığı tanıma göre

$$D_x D_t f \cdot f + D_x^4 f \cdot f = 0 \tag{3.25}$$

bulunur. Buradan sonra (3.25) denkleminde yer alan f fonksiyonunun seçimi bizlere soliton çözümlerinin nasıl olacağını belirler. Soliton çözümlerini elde edebilmek için ε küçük bir parametre değeri olmak üzere, pertürbasyon yöntemi kullanılarak

$$f = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} f_i \varepsilon^i \tag{3.26}$$

fonksiyonu seçilir. (3.25) denklemin çoklu soliton çözümlerini elde etmek için pertürbasyon açılımını kullanılır (Kaplan, 2018). Burada f_i fonksiyonları genellikle üstel

fonksiyon seçilir. Örneğin 1-soliton çözüm elde edilmek istendiğinde $\lambda_1 = \alpha_1 x + \beta_1 t$ olmak üzere $f = 1 + e^{\lambda_1}$ şeklinde seçime tabidir. Aynı şekilde 2- soliton çözüm elde edilmek istendiğinde $\lambda_i = \alpha_i x + \beta_i t,\ (i = 1,2)$ olmak üzere pertürbasyon yöntemi yardımıyla $f = 1 + e^{\lambda_1} + e^{\lambda_2}$ şeklinde seçilebilir. Buradaki f fonksiyonunun seçimi bize çoklu solitonların elde etmemize yardımcı olmaktadır.

3.2. Hirota-Bilineer Yönteminin Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması

Hirota bilineer yönteminin önerildiği zamandan günümüze kadar geliştirilerek farklı versiyonları literatüre sunulmuştur. Ancak Hirota bilineer yönteminin hala direkt olarak lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin soliton çözümlerinin bulan güçlü ve etkin bir yöntem olduğu görülmektedir. Bu kısımda yöntemin avantajları ve diğer yöntemler karşılaştırılması ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir.

Hirota bilineer yöntemin uygulamasında bilineer formların bulunması çok kolay olmadığından, bilim insanları yöntemin farklı versiyonlarını araştırmaya başladılar. Bu yöntem kullanışlı bir yöntem olmasına rağmen, 1997 yılında Hereman ve Nuseir yaptıkları çalışmada daha sade getirdikleri Hirota yöntemini bilineer formlarını elde etmeden kullanılabileceğini ifade ettiler. Böylece bilineer formlar elde edilmeden denklemlerin çözülebileceğini ve çoklu soliton ile hareketli dalga çözümlerinin bulunabileceğini gösterdiler (Hereman ve Nuseir, 1997). Bu önerilen yöntem ile bilineer hale getirilemeyen veya bilineer halleri bilinmeyen diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulmak için yardımcı denklemlerden meydana gelen bir yöntem oluşturulmuştur. Bu çalışmada integrallenemeyen, konveksiyon terimini bulunduran ve bulundurmayan Fisher denklemlerinin önerilen sadeleştirilmiş Hirota yöntemine göre çözülebileceğini ifade etmişlerdir. Burada uygulanan denklemler için bulunan çözümler hareketli dalga çözümleri olup, soliton çözümler değildir.

Ayrıca Hirota'nın önerdiği yöntemden bilineer formun bilinmeyebileceği denklemlere kendi yöntemlerinin uygulanabilir olduğunu göstermek için bilerek Hirota'nın bilineer operatörlerini kullanmadılar. Hirota yönteminin basitleştirilmiş versiyonunun ana avantajı, uygulanacak denklem için bilineer gösterimi gereksiz hale gelmektedir. Diğer bir avantajı ise çoklu soliton çözümlerinin bulunmasında üstel fonksiyonların polinom şekillerinin kabul edilebileceğini varsayar. Bu nedenle önerilen yöntem, bilineer formun

bilinmediği veya mevcut olmadığı integrallenemeyen diferansiyel denklemlere uygulanabilmektedir.

KdV denkleminin ilk çoklu soliton çözümleri ters saçılma yöntemiyle bulundu (Gardner vd., 1967). Soliton çözümleri elde etmeye yarayan ters saçılma yöntemini içeren entegrasyon şeması, daha sonra geniş bir denklem sınıfına genelleştirildi (Ablowitz vd., 1973). Başlangıç değer problemlerinin ters saçılma yöntemiyle çözülmesi, yalnızca özel çözümler üreten Hirota bilineer yaklaşımından daha genel bir yöntemdir. Hirota bilineer yönteminin diğerine göre birkaç avantajı vardır. İlk olarak, ters saçılma yöntemi çok daha karmaşık, matematiksel olarak zorlu ve zaman alıcıdır. Hirota bilineer yöntemi ise esas olarak cebirseldir ve bu nedenle neredeyse daha basittir. İkinci olarak, iki solitonlu çözümlerin varlığı, ters saçılım yöntemiyle integrallenebilirlikten daha zayıf bir gerekliliktir. Bu nedenle Hirota bilineer yöntemi, integrallenemeyen birçok denklem de dâhil olmak üzere daha geniş bir denklem sınıfını uygulanır.

Hirota'ın önerdiği bilineer yöntemin bir genelleştirilmesi 2010 yılında Ma tarafından tanıtıldı (Ma vd., 2010). Çoklu üstel fonksiyon yöntemi olarak adlandırılan yöntem, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin farklı çoklu dalga çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Bu yöntemin uygulanmasıyla Darboux dönüşümleri (Ma, 1997) ve sadeleştirilmiş Hirota yöntemiyle (Hereman ve Nuseir, 1997) bulunan çözümleri kapsayan farklı çoklu dalga çözümleri bulunmuştur.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri üç farklı tipe sınıflandırmak mümkündür. Birinci tip; tüm integrallenebilir denklemler, tam çözümleri olmayan ikinci tip ve bazı tam çözümleri bulunan ancak tüm integrallenemeyen üçüncü tip olarak sınıflandırılır. Birinci tipteki denklemlerin sonsuz sayıda tam çözümü bulunur. Bu denklemler için Hirota yöntemi dikkate alındığında tekil(soliton) dalga çözümleri bulunabilir. Ayrıca bu tarz denklemlere üstel fonksiyon yöntemi de uygulanabilir ancak üstel fonksiyon yönteminden elde edilen sonuçların Hirota bilineer yönteminden elde edilen sonuçlardan daha iyi olmadığı görülmektedir (Kudryashov ve Loguinova, 2009).

Son yıllarda, Riemann teta fonksiyonları kullanılarak Wronskian çözümleri, Pfafiyan çözümleri ve periyodik dalga çözümlerini oluşturmak için Hirota bilineer yöntemi geliştirilmiştir (Cai vd., 2009). Bu yöntem ile Tian ve Zhang (1+1)-boyutlu ve (2+1)-boyutlu Ito denklemlerini (Tian ve Zhang, 2013) ve Ma ve Zhou (2+1) boyutlu Hirota bilineer denklemlerinin (Ma ve Zhou, 2009) çözümlerini araştırmışlardır. Bu yöntemin

Hirota bilineer yöntemine göre avantajı, periyodik dalga çözümlerini cebirsel-geometrik teori olmadan doğrudan elde etmemizde yaramasıdır. Ayrıca, asimptotik analiz yardımıyla periyodik dalga çözümlerinden soliton çözümler elde edilebilir.

Görüldüğü gibi Hirota bilineer yöntemi temel alan ve sürekli geliştirilen yöntemler ile lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırmacıların ilgisi çekmeye devam etmektedir.

4. BULGULAR

Bu bölümde (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş KP denklemi ile (3+1)-boyutlu soliton denklemi ayrıntılı olarak verilmiş, bu denklemlere Hirota bilineer yönteminin uygulaması yapılmıştır. Ayrıca ele alınan denklemlerin diğer yöntemlerle bulunan çözümleri ile Hirota bilineer yöntemiyle elde edilen 1- soliton, 2-soliton ve çoklu soliton çözümlerinin karşılaştırılması yapılmıştır. Elde edilen 1- soliton, 2-soliton ve çoklu soliton çözümlerinin iki ve üç boyutlu grafikleri verilmiştir.

4.1. (3+1)-Boyutlu Genelleştirilmiş KP Denklemine Hirota Bilineer Yönteminin Uygulaması

Plazma fiziğinde geniş bir uygulama alanı olan (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş KP denkleminin en genel gösterimi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}+\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}-\frac{2}{3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0 \tag{4.1}$$

şeklindedir (Liu vd., 2019; Zhang vd. 2018). Burada φ fonksiyonu x, y, z ve t değişkenlerine bağlı ve üç ölçekli uzay koordinatına bu değişkenlerin kısmi türevleri mevcuttur. (4.1) denklemine Hirota bilineer yöntemini uygulamak için ilk önce logaritmik dönüşümü

$$\varphi = R\left(\ln f\right)_{xx} \tag{4.2}$$

olarak seçelim. $\phi = R\frac{f_x}{f}$ olmak üzere $\varphi = \phi_x$ şeklinde yazılabilir. (4.2) ifadesindeki R değerinin belirlenmesi gerekir. İlk önce (4.1) denkleminde $z = x$ ve $\alpha = \frac{2}{3}$ olarak alalım ve (4.1) denklemini

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)-\frac{1}{3}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}=0 \tag{4.3}$$

şeklinde dönüştürelim. Cole-Hopf dönüşümünden yararlanılarak, (4.2) dönüşümünü dikkate alırsak, $\phi = R\left(\ln f\right)$ olarak alındığında $\varphi = \phi_{xx}$ dönüşümünü (4.3) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^3 \partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)-\frac{1}{3}\frac{\partial^6 \phi}{\partial x^6}+\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2}=0 \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.4) denklemini x'e göre iki kez integre edip, integrasyon sabitini sıfır olarak seçersek,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{3}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \tag{4.5}$$

bulunur. Bulunan (4.5) ifadesine dönüşüm altında Hirota D-operatör karşılıklarını sırasıyla yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}&R\left(\frac{f_{xt}}{f}-\frac{f_x f}{f^2}\right)-\frac{R^2}{2}\left(\frac{f_{xx}^2}{f^2}-\frac{2f_x^2 f_{xx}}{f^3}+\frac{f_x^4}{f^4}\right)+R\left(\frac{f_{yy}}{f}-\frac{f_y^2}{f^2}\right)\\&-\frac{R}{3}\left(\frac{f_{xxxx}}{f}-\frac{4f_x f_{xxx}+3f_{xx}^2}{f^2}+\frac{12f_x^2 f_{xx}}{f^3}-\frac{6f_x^4}{f^4}\right)=0\end{aligned} \tag{4.6}$$

bulunur. Dispersiyon bağıntısını bulabilmek için (4.3) denkleminin lineer terimleri dikkate alınır. Soliton çözümü veren f fonksiyonu $\theta_1=\alpha_1 x+\gamma_1 y+\beta_1 t$ olmak üzere

$$f=1+\sum_{i=1}^{N}e^{\theta_i} \tag{4.7}$$

seçilir. Burada $N=1$ alınırsa, 1-soliton çözümü için belirlenen $f=1+e^{\alpha_1 x+\gamma_1 y+\beta_1 t}$ olur. (4.3) denklemindeki lineer terimlere göre gerekli işlemler yapıldığında

$$f=1+e^{\alpha_1 x+\gamma_1 y+\frac{\frac{1}{3}\alpha_1^4-\gamma_1^2}{\alpha_1}t} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.6) denklemindeki R'ler sadeleşir ve f fonksiyonuna göre ilgili türevler yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}&\frac{\frac{1}{3}\alpha_1^4-\gamma_1^2}{1+e^{\theta_1}}e^{\theta_1}-\frac{\frac{1}{3}\alpha_1^4-\gamma_1^2}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^2}e^{2\theta_1}-\frac{R}{2}\left(\frac{\alpha_1^4e^{2\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^2}-\frac{2\alpha_1^4e^{3\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^3}-\frac{\alpha_1^4e^{4\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^4}\right)+\frac{\gamma_1^2e^{\theta_1}}{1+e^{\theta_1}}\\&-\frac{\gamma_1^2e^{2\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_1^4e^{2\theta_1}}{1+e^{\theta_1}}-\frac{7\alpha_1^4e^{2\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^2}+\frac{12\alpha_1^4e^{3\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^3}-\frac{6\alpha_1^4e^{4\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^4}\right)=0\end{aligned} \tag{4.9}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\frac{R}{2}\left(\frac{\alpha_1^4e^{2\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^2}-\frac{2\alpha_1^4e^{3\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^3}+\frac{\alpha_1^4e^{4\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^4}\right)=2\left(\frac{\alpha_1^4e^{2\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^2}-\frac{2\alpha_1^4e^{3\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^3}+\frac{\alpha_1^4e^{4\theta_1}}{\left(1+e^{\theta_1}\right)^4}\right) \tag{4.10}$$

ve buradan $R=4$ elde edilir. O halde logaritmik dönüşüm

$$\varphi=4\left(\ln f\right)_{xx} \tag{4.11}$$

şeklindedir. (4.1) denkleminde $\alpha=1$ alınıp, $\phi=R(\ln f)$ olmak üzere $\varphi=\phi_{xx}$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^3\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right)-\frac{1}{3}\frac{\partial^6\phi}{\partial x^6}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial z^2}=0 \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12) denklemini iki kez x'e göre integre edip, integrasyon sabitini sıfır olarak alırsak,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{3}\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}-\frac{1}{3}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{4.13}$$

bulunur. Bulunan (4.13) ifadesindeki türevlerin Hirota D-operatör karşılıklarını sırasıyla

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}=4\left(\frac{f_{xt}}{f}-\frac{f_xf}{f^2}\right),\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=4\left(\frac{f_{xx}}{f}-\frac{f_x^2}{f^2}\right),\ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=4\left(\frac{f_{yy}}{f}-\frac{f_y^2}{f^2}\right),\ \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=4\left(\frac{f_{zz}}{f}-\frac{f_z^2}{f^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2=16\left(\frac{f_{xx}^2}{f^2}-\frac{2f_x^2f_{xx}}{f^3}+\frac{f_x^4}{f^4}\right),\ \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}=4\left(\frac{f_{xxxx}}{f}-\frac{4f_xf_{xxx}+3f_{xx}^2}{f^2}+\frac{12f_x^2f_{xx}}{f^3}-\frac{6f_x^4}{f^4}\right) \tag{4.14}$$

elde edilir. Bu hesaplanan Hirota D-operatör karşılıkları (4.13)'de yerine yazılıp, gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\frac{f_{xt}f-f_xf_t}{f^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{f_{xxxx}f-4f_xf_{xxx}+3f_{xx}^2}{f^2}\right)+\frac{f_{xx}f-f_x^2}{f^2}+\frac{f_{yy}f-f_y^2}{f^2}-\frac{2}{3}\left(\frac{f_{zz}f-f_z^2}{f^2}\right)=0 \tag{4.15}$$

bulunur. (4.15) ifadesi $2f^2$ ile çarpılır ve (4.1) denklemin lineerleşmiş hali

$$\left(D_xD_t-\tfrac{1}{3}D_x^4+D_x^2+D_y^2-\tfrac{2}{3}D_z^2\right)f\cdot f=0 \tag{4.16}$$

olarak elde edilir. İlk önce 1- soliton çözümleri elde etmek için aşağıdaki çözüm fonksiyonunu $\eta_4=p_4x+q_4y+r_4z+s_4t$ olmak üzere

$$f=1+e^{-\eta_4}+a_4e^{\eta_4} \tag{4.17}$$

şeklindeki gibi ele alalım. (4.17) çözümü (4.11)'de yerine yazarsak, (4.1) denklemin genel çözümünü

$$\varphi=4\left(\frac{p_4^2e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4p_4^2e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}}{1+e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}}-\left(\frac{a_4p_4e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}-p_4e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}}{1+e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}}\right)^2\right) \tag{4.18}$$

biçiminde yazılır. (4.18) ve (4.16) denklemleri kullanıldığı zaman a_4, p_4, q_4, r_4, s_4 katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Mathematica paket programı yardımıyla çözüldüğünde sırasıyla aşağıdaki çözüm bulunur.

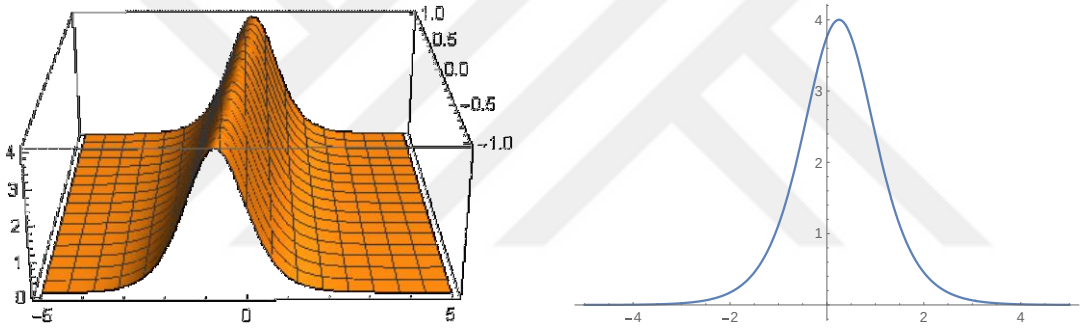
$$a_4 = 0, \quad s_4 = \frac{p_4^4 - 3p_4^2 - 3q_4^2 + 2r_4^2}{3p_4} \tag{4.19}$$

elde edilen katsayılar için (4.17) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm ele alındığında, (4.12) denklemi için $\theta_1 = p_4 x + q_4 y + r_4 z + \frac{p_4^4 - 3p_4^2 - 3q_4^2 + 2r_4^2}{3p_4} t$ olmak üzere

1- soliton çözümü

$$\varphi_1(x, y, z, t) = p_4^2 \,\mathrm{Sech}^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \tag{4.20}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.1. (4.20) denklemindeki çözümün $p_4 = -2,\ q_4 = 1,\ r_4 = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

2. Durum:

(4.1) denkleminin 2- soliton çözümleri elde etmek için $\eta_3 = p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t$ ve $\eta_4 = p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t$ olmak üzere aşağıdaki çözüm fonksiyonunu

$$f = a_3 \cosh(\eta_3) + e^{-\eta_4} + a_4 e^{\eta_4} \tag{4.21}$$

kabul edelim. (4.21) çözümü (4.11)'de yerine yazarsak, (4.1) denklemin genel çözümünü

$$\varphi = 4\left(\frac{a_3 p_3^2 \cosh(p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t) + p_4^2 e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 p_4^2 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}}{a_3 \cosh(p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t) + e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}} - \left(\frac{a_3 p_3 \sinh(p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t) - p_4 e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 p_4 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}}{a_3 \cosh(p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t) + e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}}\right)^2\right) \tag{4.22}$$

şeklindedir. (4.22) ve (4.16) beraber dikkate alınıp işlemler yapıldığı zaman $a_3, a_4, p_3, q_3, r_3, s_3, p_4, q_4, r_4, s_4$ katsayılarından meydana gelen bir cebirsel denklem sistemi oluşur. Bu elde edilen denklem sistemi paket programı yardımı ile ilgili algoritmaya göre çözüldüğünde sırasıyla aşağıdaki çözümler elde edilir.

i.

$$p_3 = p_4,\ q_3 = q_4 - \frac{\sqrt{2}\left(r_3 - r_4\right)}{\sqrt{3}},\ s_3 = \frac{4p_4^4 - 3p_4^2 - 3q_4^2 + 2\sqrt{6}q_4\left(r_3 - r_4\right) + 4r_3r_4 - 2r_4^2}{3p_4},$$
$$a_3 = a_3,\ a_4 = a_4,\ \ s_4 = \frac{4p_4^4 - 3p_4^2 - 3q_4^2 + 2r_4^2}{3p_4} \tag{4.23}$$

elde edilen katsayılar için (4.21) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin $\theta_3 = p_4x + q_4y + r_4z + \frac{4p_4^4 - 3p_4^2 - 3q_4^2 + 2r_4^2}{3p_4}t$ ve $\theta_2 = p_4x - \frac{\sqrt{2}\left(r_3 - r_4\right)}{\sqrt{3}}y + r_3z + \frac{4p_4^4 - 3p_4^2 - 3q_4^2 + 2\sqrt{6}q_4\left(r_3 - r_4\right) + 4r_3r_4 - 2r_4^2}{3p_4}t$ olmak üzere 2- soliton çözümü

$$\varphi_2\left(x,y,z,t\right) = 4\left(\frac{a_3p_4^2\cosh\left(\theta_2\right) + p_4^2e^{-\theta_3} + a_4p_4^2e^{\theta_3}}{a_3\cosh\left(\theta_2\right) + e^{-\theta_3} + a_4e^{\theta_3}} - \left(\frac{a_3p_4\sinh\left(\theta_2\right) + a_4p_4e^{\theta_3} - p_4e^{-\theta_3}}{a_3\cosh\left(\theta_2\right) + e^{-\theta_3} + a_4e^{\theta_3}}\right)^2\right) \tag{4.24}$$

olarak elde edilir.

ii.

$$a_4 = 0,\ a_3 = a_3,\ s_3 = \frac{4p_3^4 - 3p_3^2 - 3q_3^2 + 2r_3^2}{3p_3},\ r_4 = \frac{2p_4r_3 - \sqrt{6p_3^6 - 12p_3^4p_4^2 + 6p_4^2q_3^2 - 12p_3p_4q_3q_4 + 6p_3^2\left(p_4^4 + q_4^2\right)}}{2p_3}$$
$$s_4 = \frac{p_3^2p_4\left(4p_4^2 - 3\right) - 6p_3q_3q_4 - 2r_3\sqrt{6p_3^6 - 12p_3^4p_4^2 + 6p_4^2q_3^2 - 12p_3p_4q_3q_4 + 6p_3^2\left(p_4^4 + q_4^2\right)} + p_4\left(3q_3^2 + 2r_3^2\right)}{3p_3^2} \tag{4.25}$$

bulunan katsayılar için (4.21) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin $\theta_4 = p_4x + q_4y + r_4z + \frac{4p_3^4 - 3p_3^2 - 3q_3^2 + 2r_3^2}{3p_3}t$ ve

$$\theta_5 = p_4x + q_4y + \frac{2p_4r_3 - \sqrt{6p_3^6 - 12p_3^4p_4^2 + 6p_4^2q_3^2 - 12p_3p_4q_3q_4 + 6p_3^2\left(p_4^4 + q_4^2\right)}}{2p_3}z$$
$$+ \frac{p_3^2p_4\left(4p_4^2 - 3\right) - 6p_3q_3q_4 - 2r_3\sqrt{6p_3^6 - 12p_3^4p_4^2 + 6p_4^2q_3^2 - 12p_3p_4q_3q_4 + 6p_3^2\left(p_4^4 + q_4^2\right)} + p_4\left(3q_3^2 + 2r_3^2\right)}{3p_3^2}t$$

olmak üzere 2- soliton çözümü

$$\varphi_3(x,y,z,t)=4\left(\frac{a_3p_3^2\cosh(\theta_4)+p_4^2e^{-\theta_5}}{a_3\cosh(\theta_4)+e^{-\theta_5}}-\left(\frac{a_3p_3\sinh(\theta_4)-p_4e^{-\theta_5}}{a_3\cosh(\theta_4)+e^{-\theta_5}}\right)^2\right) \tag{4.26}$$

olarak elde edilir.

iii.

$$a_4=p_3=q_3=r_3=s_3=0,\ a_3=a_3,\ s_4=\frac{p_4^4-3p_4^2-3q_4^2+2r_4^2}{3p_4} \tag{4.27}$$

elde edilen katsayılar için (4.21) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin çözümü

$$\varphi_4(x,y,z,t)=\frac{4a_3p_4^2e^{-\theta_1}}{\left(a_3+e^{-\theta_1}\right)^2} \tag{4.28}$$

şeklinde hesaplanır.

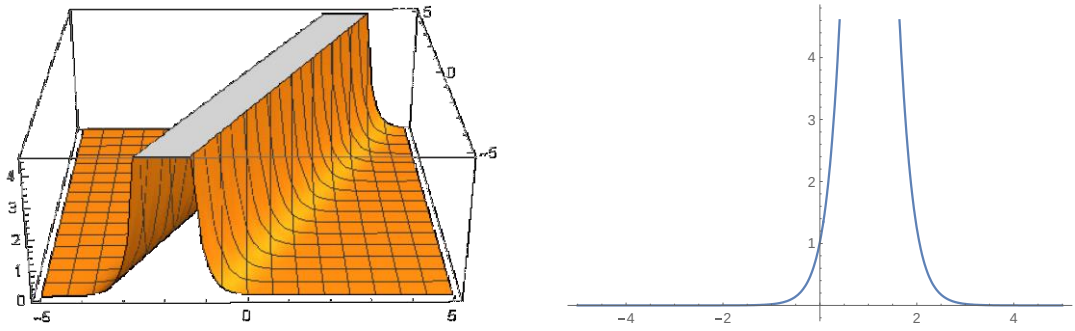
iv.

$$a_3=0,\ \ a_4=a_4,\ \ s_4=\frac{4p_4^4-3p_4^2-3q_4^2+2r_4^2}{3p_4} \tag{4.29}$$

hesaplanan katsayılar için (4.21) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin çözümü

$$\varphi_5(x,y,z,t)=4\left(\frac{a_4p_4^2e^{\theta_3}+p_4^2e^{-\theta_3}}{a_4e^{\theta_3}+e^{-\theta_3}}-\left(\frac{a_4p_4e^{\theta_3}-p_4e^{-\theta_3}}{a_4e^{\theta_3}+e^{-\theta_3}}\right)^2\right) \tag{4.30}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 4.2. (4.30) denklemindeki çözümün $a_4=3,\ p_4=-2,\ q_4=1,\ r_4=1$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

3. Durum:

(4.1) denkleminin soliton çözümleri elde etmek için $\eta_1 = p_1x+q_1y+r_1z+s_1t$ ve $\eta_4 = p_4x+q_4y+r_4z+s_4t$ olmak üzere aşağıdaki çözüm fonksiyonunu

$$f = a_1\cos(\eta_1)+e^{-\eta_4}+a_4e^{\eta_4} \tag{4.31}$$

kabul edelim. (4.31) çözümü (4.11)'de yerine yazarsak, (4.1) denklemin genel çözümünü

$$\varphi = 4\left(\begin{array}{l}\dfrac{-a_1p_1^2\cos(p_1x+q_1y+r_1z+s_1t)+p_4^2e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4p_4^2e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}}{a_1\cos(p_1x+q_1y+r_1z+s_1t)+e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}} \\ -\left(\dfrac{a_1p_1\sin(p_1x+q_1y+r_1z+s_1t)-p_4e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4p_4e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}}{a_1\cos(p_1x+q_1y+r_1z+s_1t)+e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}}\right)^2\end{array}\right) \tag{4.32}$$

şeklindedir. (4.32) ve (4.16) ifadeleri alınıp, gerekli işlemler yapıldığı zaman $a_1, a_4, p_1, q_1, r_1, s_1, p_4, q_4, r_4, s_4$ katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu elde edilen denklem sistemi ilgili algoritmaya göre çözüldüğünde sırasıyla aşağıdaki çözümler elde edilir.

i.

$$\begin{gathered}p_1 = ip_4,\ s_1 = \frac{i\left(4p_4^4-3p_4^2+3q_1^2-2r_1^2\right)}{3p_4},\ r_4 = \sqrt{\frac{3}{2}}(q_4-iq_1)-ir_1, \\ s_4 = \frac{4p_4^4-3p_4^2-3q_1^2+6iq_1q_4-2\sqrt{6}r_1(q_1-iq_4)-2r_1^2}{3p_4}\end{gathered} \tag{4.33}$$

hesaplanan katsayılar için (4.31) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin çözümü

$$\theta_8 = p_4x+q_4y+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}(q_4-iq_1)-ir_1\right)z+\frac{4p_4^4-3p_4^2-3q_1^2+6iq_1q_4-2\sqrt{6}r_1(q_1-iq_4)-2r_1^2}{3p_4}t$$

$\theta_7 = p_4x+iq_1y+ir_1z+\dfrac{\left(4p_4^4-3p_4^2+3q_1^2-2r_1^2\right)}{3p_4}t$ ve olmak üzere

$$\varphi_6(x,y,z,t) = 4\left(\frac{a_1p_4^2\cosh(\theta_7)+p_4^2e^{-\theta_8}+a_4p_4^2e^{\theta_8}}{a_1\cosh(\theta_7)+e^{-\theta_8}+a_4e^{\theta_8}}-\left(\frac{a_1p_4\sinh(\theta_7)-p_4e^{-\theta_8}+a_4p_4e^{\theta_8}}{a_1\cosh(\theta_7)+e^{-\theta_8}+a_4e^{\theta_8}}\right)^2\right) \tag{4.34}$$

olarak bulunur.

ii.

$$a_1 = 0,\ \ a_4 = a_4,\ \ s_4 = \frac{4p_4^4 - 3p_4^2 - 3q_4^2 + 2r_4^2}{3p_4} \tag{4.35}$$

elde edilen katsayılar için (4.31) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin çözümü (4.30) çözümü ile aynı olarak bulunur.

iii.

$$a_4 = 0,\ a_3 = a_3,\ s_1 = \frac{4p_1^4 - 3p_1^2 + 3q_1^2 - 2r_1^2}{3p_1},\ r_4 = \frac{2p_4r_1 + \sqrt{6p_1^6 + 12p_1^4p_4^2 + 6p_4^2q_1^2 - 12p_1p_4q_1q_4 + 6p_1^2\left(p_4^4 + q_4^2\right)}}{2p_1}$$

$$s_4 = \frac{p_1^2p_4\left(4p_4^2 - 3\right) - 6p_1q_1q_4 - 2r_1\sqrt{6p_1^6 + 12p_1^4p_4^2 + 6p_4^2q_1^2 - 12p_1p_4q_1q_4 + 6p_1^2\left(p_4^4 + q_4^2\right)} + p_4\left(3q_1^2 + 2r_1^2\right)}{3p_1^2} \tag{4.36}$$

elde edilen katsayılar için (4.31) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin ve $\theta_9 = p_1x + q_1y + r_1z + \frac{4p_1^4 - 3p_1^2 + 3q_1^2 - 2r_1^2}{3p_1}t$ ve

$$\theta_{10} = p_4x + q_4y + \frac{2p_4r_1 + \sqrt{6p_1^6 + 12p_1^4p_4^2 + 6p_4^2q_1^2 - 12p_1p_4q_1q_4 + 6p_1^2\left(p_4^4 + q_4^2\right)}}{2p_1}z$$

$$+ \frac{p_1^2p_4\left(4p_4^2 - 3\right) - 6p_1q_1q_4 - 2r_1\sqrt{6p_1^6 + 12p_1^4p_4^2 + 6p_4^2q_1^2 - 12p_1p_4q_1q_4 + 6p_1^2\left(p_4^4 + q_4^2\right)} + p_4\left(3q_1^2 + 2r_1^2\right)}{3p_1^2}t$$

olmak üzere çözümü

$$\varphi_7\left(x, y, z, t\right) = 4\left(\frac{-a_1p_1^2\cos\left(\theta_9\right) + p_4^2e^{-\theta_{10}}}{a_1\cos\left(\theta_9\right) + e^{-\theta_{10}}} - \left(\frac{-a_1p_1\sin\left(\theta_9\right) - p_4e^{-\theta_{10}}}{a_1\cos\left(\theta_9\right) + e^{-\theta_{10}}}\right)^2\right) \tag{4.37}$$

şeklinde hesaplanır.

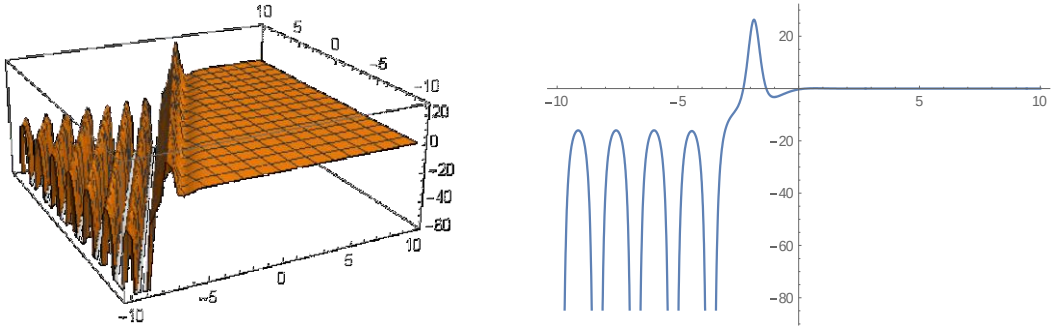
iv.

$$a_4 = p_1 = q_1 = r_1 = s_1 = 0,\ a_1 = a_1,\ \ s_4 = \frac{p_4^4 - 3p_4^2 - 3q_4^2 + 2r_4^2}{3p_4} \tag{4.38}$$

elde edilen katsayılar için (4.31) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin çözümü

$$\varphi_8\left(x, y, z, t\right) = \frac{4a_1p_4^2e^{-\theta_1}}{\left(a_1 + e^{-\theta_1}\right)^2} \tag{4.39}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 4.3. (4.37) denklemindeki çözümün $a_1=-3,\ p_4=-2,\ q_4=r_1=r_4=1,\ q_1=1$ üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

4. Durum:

(4.1) denkleminin soliton çözümleri elde etmek için $\eta_1=p_1x+q_1y+r_1z+s_1t$ ve $\eta_2=p_2x+q_2y+r_2z+s_2t$ olmak üzere aşağıdaki çözüm fonksiyonunu

$$f=a_1\cos(\eta_1)+a_2\sin(\eta_2) \tag{4.40}$$

olarak seçelim. (4.40) çözümü (4.11)'de yerine yazarsak, (4.1) denklemin genel çözümünü

$$\varphi=4\left(\begin{array}{l}\dfrac{-a_1p_1^2\cos(p_1x+q_1y+r_1z+s_1t)-a_2p_2^2\sin(p_2x+q_2y+r_2z+s_2t)}{a_1\cos(p_1x+q_1y+r_1z+s_1t)+a_2\sin(p_2x+q_2y+r_2z+s_2t)}\\ -\left(\dfrac{-a_1p_1\sin(p_1x+q_1y+r_1z+s_1t)+a_2p_2\cos(p_2x+q_2y+r_2z+s_2t)}{a_1\cos(p_1x+q_1y+r_1z+s_1t)+a_2\sin(p_2x+q_2y+r_2z+s_2t)}\right)^2\end{array}\right) \tag{4.41}$$

şeklindedir. (4.41) ve (4.16) ifadeleri işleme alındığında ve gerekli prosedürler uygulandığında $a_1,a_2,p_1,q_1,r_1,s_1,p_2,q_2,r_2,s_2$ katsayılarından meydana gelen denklem sistemi oluşur. Bu oluşan denklem sistemi ilgili algoritmaya göre paket program yardımıyla çözüldüğünde sırasıyla aşağıdaki çözümler elde edilir.

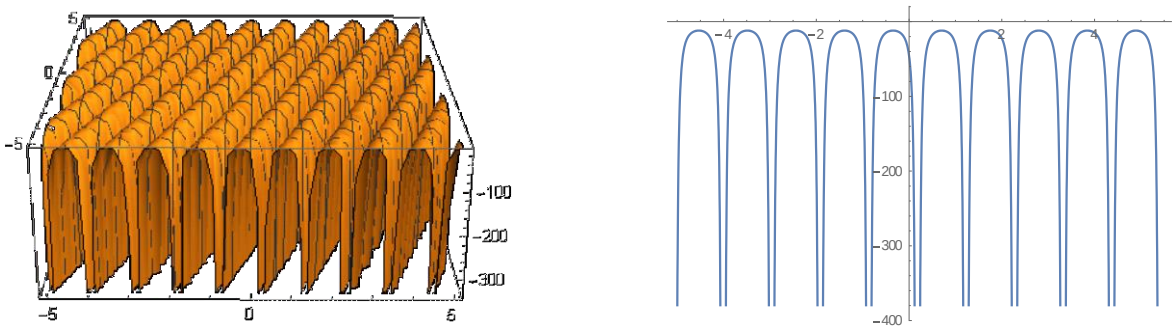
i.

$$a_1=a_1,\ \ a_2=0,\ \ s_1=-\frac{4p_1^4+3p_1^2+3q_1^2-2r_1^2}{3p_1}, \tag{4.42}$$

hesaplanan katsayılar için (4.40) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin çözümü $\theta_{11}=p_1x+q_1y+r_1z-\dfrac{4p_1^4+3p_1^2+3q_1^2-2r_1^2}{3p_1}t$ olmak üzere

$$\varphi_9(x,y,z,t)=-4p_1^2\sec^2(\theta_{11}) \tag{4.43}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.4. (4.43) denkleminde $p_1 = 3,\ q_1 = -1,\ r_1 = 3$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

ii.

$$a_1 = 0,\ a_2 = a_2,\ s_2 = -\frac{4p_2^4 + 3p_2^2 + 3q_2^2 - 2r_2^2}{3p_2}, \tag{4.44}$$

elde edilen katsayılar için (4.40) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin çözümü $\theta_{12} = p_2 x + q_2 y + r_2 z - \frac{4p_2^4 + 3p_2^2 + 3q_2^2 - 2r_2^2}{3p_2} t$ olmak üzere

$$\varphi_{10}(x, y, z, t) = -4p_2^2 \operatorname{cosec}^2(\theta_{12}) \tag{4.45}$$

olarak bulunur.

iii.

$$a_1 = a_1,\ a_2 = a_2,\ p_1 = -p_2,\ s_1 = \frac{4p_2^4 + 3p_2^2 + 3q_1^2 - 2r_1^2}{3p_2},\ r_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}(q_1 + q_2) - r_1$$
$$s_2 = \frac{-4p_2^4 - 3p_2^2 + 3q_1(q_1 + 2q_2) + 2r_1\left(\sqrt{6}(q_1 + q_2) + r_1\right)}{3p_2} \tag{4.46}$$

bulunan katsayılar için (4.40) çözüm fonksiyonu ve (4.11) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.12) denkleminin ve $\theta_{13} = -p_2 x + q_1 y + r_1 z + \frac{4p_2^4 + 3p_2^2 + 3q_1^2 - 2r_1^2}{3p_2} t$ ve

$\theta_{14} = p_2 x + q_2 y + \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}(q_1 + q_2) - r_1\right) z + \frac{-4p_2^4 - 3p_2^2 + 3q_1(q_1 + 2q_2) + 2r_1\left(\sqrt{6}(q_1 + q_2) + r_1\right)}{3p_2} t$ olmak üzere çözümü

$$\varphi_{11}(x, y, z, t) = 4\left(\frac{-a_1 p_2^2 \cos(\theta_{13}) - a_2 p_2^2 \sin(\theta_{14})}{a_1 \cos(\theta_{13}) + a_2 \sin(\theta_{14})} - \left(\frac{-a_1 p_2 \sin(\theta_{13}) + a_2 p_2 \cos(\theta_{14})}{a_1 \cos(\theta_{13}) + a_2 \sin(\theta_{14})}\right)^2\right) \tag{4.47}$$

şeklinde bulunur.

(3+1)-boyutlu genelleştirilmiş KP denkleminin uygulanan Hirota bilineer yöntemine göre elde edilen soliton çözümleri incelendiğinde; literatürdeki Liu vd., 2019 ve Zhang vd. 2018 makalelerindeki ele alınan fonksiyon tipleri ile bizim tez çalışmasında aldığımız fonksiyon tiplerinin bir kısmı benzerlik göstermektedir. Buda tez çalışmamızda ele aldığımız farklı fonksiyon tiplerine göre elde edilen soliton çözümlerinin literatürde bulunmayan farklı soliton çözümleri olduğunu göstermektedir. Ayrıca Hirota bilineer yöntemine göre bulunan tüm soliton çözümlerin (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş KP denklemini sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmiştir.

4.2. (3+1)-Boyutlu Soliton Denklemine Hirota-Bilineer Yönteminin Uygulaması

Bu kısımda, optik fiber alanında oldukça fazla kullanım alanı olan lineer olmayan (3+1)-boyutlu soliton denklemi incelenecektir. Bu denklem optikte solitonların yayılımlarının modellenmesine katkı sağlayan bir denklemdir. (3+1)-boyutlu soliton denkleminin en genel hali

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\left(2\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-2u\frac{\partial u}{\partial x}\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\partial_x^{-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (4.48)$$

şeklindedir (Darvishi vd., 2016; Liu vd., 2017; Pu ve Hu, 2018; Sulaiman vd., 2020). Burada u bilinmeyen fonksiyonu x, y, z ve t değişkenlerine bağlıdır. (4.48) denklemine Hirota bilineer yöntemini uygulamak için logaritmik dönüşümü

$$u = R\left(\ln f\right)_{xx} \qquad (4.49)$$

olarak seçelim. $\omega = R\left(\ln f\right)$ olmak üzere $u = \omega_{xx}$ şeklinde yazılabilir. (4.49)'daki dönüşümde R değerinin belirlenmesi gerekmektedir. İlk önce (4.48) denklemine $u = \omega_{xx}$ dönüşümünü uygulayalım. (4.48) denklemini

$$3\omega_{xxxz}-2\omega_{xxty}-\omega_{xxxxxy}+2\left(\omega_{xx}\omega_{xxx}\right)_y+2\left(\omega_{xxx}\partial_x^{-1}\omega_{xxy}\right)_x=0 \qquad (4.50)$$

şeklinde dönüşür. (4.50) denklemini x'e göre integre edip integrasyon sabitini sıfır olarak seçersek ve $\partial_x^{-1}\omega_{xxy}=\omega_{xy}$ olarak yazılırsa

$$3\omega_{xxz}-2\omega_{xty}-\omega_{xxxxy}+2\left(\frac{\omega_{xx}^2}{2}\right)_y+2\omega_{xxx}\omega_{xy}=0 \qquad (4.51)$$

bulunur. Bulunan (4.51) ifadesi düzenlenip tekrardan x'e göre integre edip integrasyon sabitini sıfır olarak seçilirse

$$3\omega_{xz}-2\omega_{ty}-\omega_{xxxy}+2\omega_{xx}\omega_{xy}=0 \tag{4.52}$$

elde edilir. (4.52) denkleminde lineer terimler dikkate alınarak, 1-soliton çözümlerini bulmak için dispersiyon bağıntısını bulalım. Bunun için f fonksiyonu $\xi_1=ax+by+dz+ct$ olmak üzere

$$f=1+\sum_{i=1}^{N}e^{\xi_i} \tag{4.53}$$

olarak seçilir. Burada $N=1$ alındığında, 1-soliton çözümü için belirlenen $f=1+e^{ax+by+dz+ct}$ olur. (4.52) denkleminde yer alan lineer terimlere göre gerekli işlemler yapıldığında

$$f=1+e^{ax+\frac{3ad}{2c+a^3}y+dz+ct} \tag{4.54}$$

bulunur. (4.54) de belirlenen f fonksiyonuna göre (4.52) denkleminin terimleri Hirota D-operatör karşılıklarını sırasıyla yerine yazıldığında

$$3\left(\frac{f_{xz}}{f}-\frac{f_xf_z}{f^2}\right)-2\left(\frac{f_{ty}}{f}-\frac{f_tf_y}{f^2}\right)-\left(\frac{f_{xxxy}}{f}-\frac{f_{xxx}f_y+3f_{xy}f_{xx}+3f_xf_{xxy}}{f^2}+\frac{6f_xf_yf_{xx}+6f_x^2f_{xy}}{f^3}-\frac{6f_x^3f_y}{f^4}\right)$$
$$+2R\left(\frac{f_{xx}f_{xy}}{f^2}-\frac{f_x^2f_{xy}+f_{xx}f_xf_y+3f_{xx}^2}{f^3}+\frac{f_x^3f_y}{f^4}\right)=0 \tag{4.55}$$

elde edilir. (4.54) ifadesindeki f fonksiyonuna göre (4.55) ilgili türevler alınıp, yerine yazıldığında

$$3\left(\frac{ade^{\xi_1}}{1+e^{\xi_1}}-\frac{ade^{2\xi_1}}{\left(1+e^{\xi_1}\right)^2}\right)-2\left(\frac{3adce^{\xi_1}}{\left(2c+a^3\right)\left(1+e^{\xi_1}\right)}-\frac{3adce^{2\xi_1}}{\left(2c+a^3\right)\left(1+e^{\xi_1}\right)^2}\right)$$
$$-\left(\frac{3a^4de^{\xi_1}}{\left(2c+a^3\right)\left(1+e^{\xi_1}\right)}-\frac{21a^4de^{2\xi_1}}{\left(2c+a^3\right)\left(1+e^{\xi_1}\right)^2}+\frac{36a^4de^{3\xi_1}}{\left(2c+a^3\right)\left(1+e^{\xi_1}\right)^3}-\frac{18a^4de^{4\xi_1}}{\left(2c+a^3\right)\left(1+e^{\xi_1}\right)^4}\right) \tag{4.56}$$
$$+2R\left(\frac{3a^4de^{2\xi_1}}{\left(2c+a^3\right)\left(1+e^{\xi_1}\right)^2}-\frac{3a^4de^{3\xi_1}}{\left(2c+a^3\right)\left(1+e^{\xi_1}\right)^3}+\frac{3a^4de^{4\xi_1}}{\left(2c+a^3\right)\left(1+e^{\xi_1}\right)^4}\right)=0$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\frac{18a^4d}{\left(2c+a^3\right)}\left(\frac{e^{2\xi_1}}{\left(1+e^{\xi_1}\right)^2}-\frac{2e^{3\xi_1}}{\left(1+e^{\xi_1}\right)^3}+\frac{e^{4\xi_1}}{\left(1+e^{\xi_1}\right)^4}\right)=-2R\frac{3a^4d}{\left(2c+a^3\right)}\left(\frac{e^{2\xi_1}}{\left(1+e^{\xi_1}\right)^2}-\frac{2e^{3\xi_1}}{\left(1+e^{\xi_1}\right)^3}+\frac{e^{4\xi_1}}{\left(1+e^{\xi_1}\right)^4}\right)$$

(4.57)

elde edilir ve buradan $R=-3$ bulunur. O halde logaritmik dönüşüm

$$u=-3(\ln f)_{xx} \tag{4.58}$$

şekline dönüşür. (4.52) denklemine (4.58) ifadesindeki logaritmik dönüşüm uygulanarak Hirota D-operatör karşılıklarını yerine yazıldığında

$$3\left(\frac{f_{xz}}{f}-\frac{f_x f_z}{f^2}\right)-2\left(\frac{f_{ty}}{f}-\frac{f_t f_y}{f^2}\right)-\left(\frac{f_{xxxy}}{f}-\frac{f_{xxx}f_y+3f_{xy}f_{xx}+3f_x f_{xxy}}{f^2}+\frac{6f_x f_y f_{xx}+6f_x^2 f_{xy}}{f^3}-\frac{6f_x^3 f_y}{f^4}\right)$$
$$-6\left(\frac{f_{xx}f_{xy}}{f^2}-\frac{f_x^2 f_{xy}+f_{xx}f_x f_y+3f_{xx}^2}{f^3}+\frac{f_x^3 f_y}{f^4}\right)=0 \tag{4.59}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler uygulanıp, sadeleştirmeler yapıldığında

$$3\left(\frac{f_{xz}f-f_x f_z}{f^2}\right)-2\left(\frac{f_{ty}f-f_t f_y}{f^2}\right)-\left(\frac{f_{xxxy}f-f_{xxx}f_y-3f_{xy}f_{xx}+3f_x f_{xxy}}{f^2}\right)=0 \tag{4.60}$$

bulunur. (4.60) ifadesi (4.48) denklemin lineerleşmiş hali

$$\left(3D_xD_z-2D_yD_t-D_yD_x^3\right)f\cdot f=0 \tag{4.61}$$

olarak elde edilir. 1- soliton çözümleri elde etmek için aşağıdaki çözüm fonksiyonunu $\xi_4=p_4x+q_4y+r_4z+s_4t$ olmak üzere

$$f=1+e^{-\xi_4}+a_4e^{\xi_4} \tag{4.62}$$

şeklindeki gibi ele alalım. (4.62) çözümü (4.61)'de yerine yazarsak, (4.48) denklemin genel çözümü

$$u=-3\left(\frac{p_4^2e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4p_4^2e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}}{1+e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}}-\left(\frac{a_4p_4e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}-p_4e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}}{1+e^{-p_4x-q_4y-r_4z-s_4t}+a_4e^{p_4x+q_4y+r_4z+s_4t}}\right)^2\right) \tag{4.63}$$

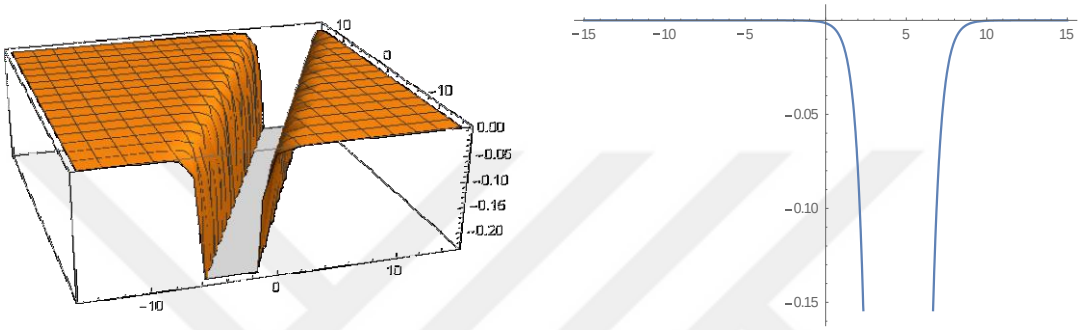
şeklindedir. (4.62) ve (4.61) ifadeleri beraber kullanıldığı zaman a_4,p_4,q_4,r_4,s_4 katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi oluşur. Bu denklem sistemi paket programı yardımıyla çözüldüğünde aşağıdaki çözüm bulunur.

$$a_4=0,\qquad s_4=\frac{3p_4r_4}{2q_4}-\frac{p_4^3}{2} \tag{4.64}$$

bulunan katsayılar için (4.62) çözüm fonksiyonu ve (4.58)'deki logaritmik dönüşüm uygulanırsa, (4.48) denklemi için $\xi_1 = p_4 x + q_4 y + r_4 z + \left(\frac{3p_4 r_4}{2q_4} - \frac{p_4^3}{2} \right) t$ olmak üzere 1-soliton çözümü

$$u_1(x,y,z,t) = \frac{-3p_4^2}{4} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\xi_1}{2}\right) \tag{4.64}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.5. (4.64) denklemindeki çözümün $p_4 = 2,\ q_4 = -1,\ r_4 = 2$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

2. Durum:

(4.48) denkleminin 2- soliton çözümleri elde etmek için $\xi_3 = p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t$ ve $\xi_4 = p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t$ olmak üzere aşağıdaki çözüm fonksiyonunu

$$f = a_3 \cosh(\eta_3) + e^{-\eta_4} + a_4 e^{\eta_4} \tag{4.65}$$

kabul edelim. (4.65) çözümü (4.58)'de yerine yazarsak, (4.48) denklemin genel çözümünü

$$u = -3\left(\begin{array}{l} \dfrac{a_3 p_3^2 \cosh(p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t) + p_4^2 e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 p_4^2 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}}{a_3 \cosh(p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t) + e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}} \\ -\left(\dfrac{a_3 p_3 \sinh(p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t) - p_4 e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 p_4 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}}{a_3 \cosh(p_3 x + q_3 y + r_3 z + s_3 t) + e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}} \right)^2 \end{array} \right) \tag{4.66}$$

şeklindedir. (4.66) denklemi (4.61) denkleminde yerine yazılıp, gerekli türevler hesaplandığında $a_3, a_4, p_3, q_3, r_3, s_3, p_4, q_4, r_4, s_4$ katsayılarından oluşan bir cebirsel denklem sistemi meydana gelir. Bu oluşturulan denklem sistemi paket programı yardımı ile ilgili algoritmaya göre çözüldüğünde sırasıyla aşağıdaki çözümler elde edilir.

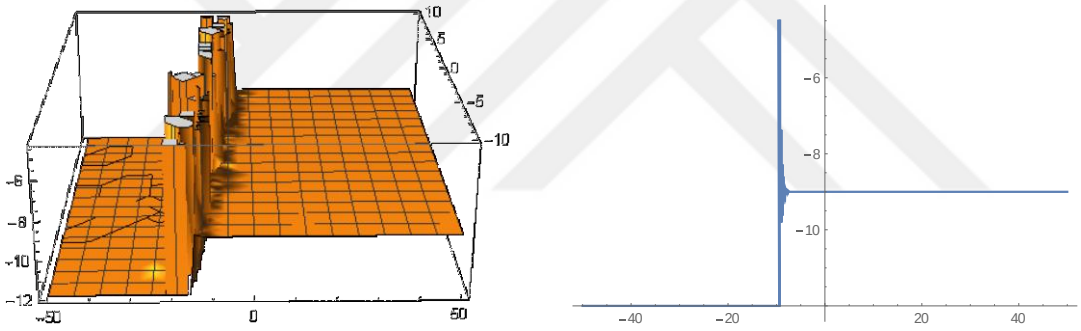
i.

$$a_4 = a_4,\ a_3 = a_3,\ q_3 = \frac{p_4 q_4}{p_3},\ r_3 = \frac{2p_4 q_4\left(s_3 - p_3^3\right)}{3p_3^2},\ s_4 = \frac{p_4\left(p_3^3 - p_3 p_4^2 + 2s_3\right)}{2p_3},\ r_4 = \frac{q_4\left(p_3^3 - 3p_3 p_4^2 + 2s_3\right)}{3p_3} \tag{4.67}$$

elde edilen katsayılar için (4.66) çözüm fonksiyonu ve (4.58) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.48) denkleminin $\xi_2 = p_3 x + \frac{p_4 q_4}{p_3} y + \frac{2p_4 q_4\left(s_3 - p_3^3\right)}{3p_3^2} z + s_3 t$ ve $\xi_3 = p_4 x + q_4 y + \frac{p_4\left(p_3^3 - p_3 p_4^2 + 2s_3\right)}{2p_3} z + \frac{q_4\left(p_3^3 - 3p_3 p_4^2 + 2s_3\right)}{3p_3} t$ olmak üzere 2- soliton çözümü

$$u_2(x,y,z,t) = -3\left(\frac{a_3 p_3^2 \cosh(\xi_2) + p_4^2 e^{-\xi_3} + a_4 p_4^2 e^{\xi_3}}{a_3 \cosh(\xi_2) + e^{-\xi_3} + a_4 e^{\xi_3}} - \left(\frac{a_3 p_3 \sinh(\xi_2) + a_4 p_4 e^{\xi_3} - p_4 e^{-\xi_3}}{a_3 \cosh(\xi_2) + e^{-\xi_3} + a_4 e^{\xi_3}}\right)^2\right) \tag{4.68}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.6. (4.68) denklemindeki çözümün $a_3 = -2,\ a_4 = p_3 = p_4 = 2,\ a_4 = q_4 = -1,\ s_3 = -2$ değerleri için reel kısmın üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

ii.

$$a_4 = 0,\ a_3 = a_3,\ r_3 = \frac{2q_3\left(s_3 - p_3^3\right)}{3p_3},\ r_4 = \frac{\left(p_3^2 - p_4^2\right)\left(q_3\left(3p_3^2 + p_4^2\right) - 4p_3 p_4 q_4\right)}{2p_4 q_3 - 2p_3 q_4} + \frac{2q_4 s_3}{3p_3} \tag{4.69}$$

$$s_4 = \frac{p_3\left(2p_3 p_4 q_3 q_4 + 3p_4^2\left(q_3^2 - q_4^2\right) + p_3^2\left(q_4^2 - 3q_3^2\right)\right)}{3\left(p_3 q_4 - p_4 q_3\right)} + \frac{2q_4 s_3}{3p_3}$$

elde edilen katsayılar için (4.66) çözüm fonksiyonu ve (4.58) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.48) denkleminin $\xi_4 = p_3 x + q_3 y + \dfrac{2q_3\left(s_3 - p_3^3\right)}{3p_3} z + s_3 t$ ve

$\xi_5 = p_4 x + q_4 y + \left(\dfrac{\left(p_3^2 - p_4^2\right)\left(q_3\left(3p_3^2 + p_4^2\right) - 4p_3 p_4 q_4\right)}{2p_4 q_3 - 2p_3 q_4} + \dfrac{2q_4 s_3}{3p_3} \right) z$ olmak üzere 2- soliton çözümü

$+ \left(\dfrac{p_3\left(2p_3 p_4 q_3 q_4 + 3p_4^2\left(q_3^2 - q_4^2\right) + p_3^2\left(q_4^2 - 3q_3^2\right)\right)}{3\left(p_3 q_4 - p_4 q_3\right)} + \dfrac{2q_4 s_3}{3p_3} \right) t$

$$u_3\left(x, y, z, t\right) = -3\left(\frac{a_3 p_3^2 \cosh\left(\xi_4\right) + p_4^2 e^{-\xi_5}}{a_3 \cosh\left(\xi_4\right) + e^{-\xi_5}} - \left(\frac{a_3 p_3 \sinh\left(\xi_4\right) - p_4 e^{-\xi_5}}{a_3 \cosh\left(\xi_4\right) + e^{-\xi_5}} \right)^2 \right) \tag{4.70}$$

olarak bulunur.

iii.

$$a_3 = 0, \quad a_4 = a_4, \quad r_4 = \frac{2q_4\left(s_4 - p_4^3\right)}{3p_4} \tag{4.71}$$

bulunan katsayılar için (4.66) çözüm fonksiyonu ve (4.58) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.48) denkleminin çözümü $\xi_6 = p_4 x + q_4 y + \dfrac{2q_4\left(s_4 - p_4^3\right)}{3p_4} z + s_4 t$

$$u_4\left(x, y, z, t\right) = -3\left(\frac{a_4 p_4^2 e^{\xi_6} + p_4^2 e^{-\xi_6}}{a_4 e^{\xi_6} + e^{-\xi_6}} - \left(\frac{a_4 p_4 e^{\xi_6} - p_4 e^{-\xi_6}}{a_4 e^{\xi_6} + e^{-\xi_6}} \right)^2 \right) \tag{4.72}$$

şeklinde hesaplanır.

3. Durum:

(4.48) denkleminin soliton çözümleri elde etmek için $\xi_1 = p_1 x + q_1 y + r_1 z + s_1 t$ ve $\xi_4 = p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t$ olmak üzere aşağıdaki çözüm fonksiyonunu

$$f = a_1 \cos\left(\eta_1\right) + e^{-\eta_4} + a_4 e^{\eta_4} \tag{4.73}$$

kabul edelim. (4.73) çözümü (4.58)'de yerine yazarsak, (4.48) denklemin genel çözümünü

$$u = -3\left(\begin{array}{l} \dfrac{-a_1 p_1^2 \cos\left(p_1 x + q_1 y + r_1 z + s_1 t\right) + p_4^2 e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 p_4^2 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}}{a_1 \cos\left(p_1 x + q_1 y + r_1 z + s_1 t\right) + e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}} \\ -\left(\dfrac{-a_1 p_1 \sin\left(p_1 x + q_1 y + r_1 z + s_1 t\right) - p_4 e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 p_4 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}}{a_1 \cos\left(p_1 x + q_1 y + r_1 z + s_1 t\right) + e^{-p_4 x - q_4 y - r_4 z - s_4 t} + a_4 e^{p_4 x + q_4 y + r_4 z + s_4 t}} \right)^2 \end{array} \right) \tag{4.74}$$

şeklindedir. (4.74) ve (4.61) ifadeleri için gerekli işlemler yapılırsa $a_1, a_4, p_1, q_1, r_1, s_1, p_4, q_4, r_4, s_4$ katsayılarından oluşan denklem sistemi elde edilir. Bu elde edilen denklem sistemi ilgili algoritmaya göre çözüldüğünde sırasıyla aşağıdaki çözümler elde edilir.

i.

$$q_1 = iq_4,\ p_1 = ip_4,\ s_1 = ip_4^3 + \frac{3p_4r_1}{2q_4},\ s_4 = p_4^3 + \frac{3p_4r_4}{2q_4} \tag{4.75}$$

hesaplanan katsayılar için (4.74) çözüm fonksiyonu ve (4.58) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.48) denkleminin çözümü $\xi_7 = ip_4x + iq_4y + r_1z + \left(ip_4^3 + \frac{3p_4r_1}{2q_4} \right)t$ ve olmak üzere $\xi_8 = p_4x + q_4y + r_4\, z + \left(p_4^3 + \frac{3p_4r_4}{2q_4} \right)t$

$$u_5(x,y,z,t) = -3\left(\frac{a_1p_4^2\cosh(\xi_7) + p_4^2e^{-\xi_8} + a_4p_4^2e^{\xi_8}}{a_1\cosh(\xi_7) + e^{-\xi_8} + a_4e^{\xi_8}} - \left(\frac{a_1p_4\sinh(\xi_7) - p_4e^{-\xi_8} + a_4p_4e^{\xi_8}}{a_1\cosh(\xi_7) + e^{-\xi_8} + a_4e^{\xi_8}} \right)^2 \right) \tag{4.76}$$

olarak bulunur.

ii.

$$q_1 = \frac{-p_4q_4}{p_1},\ r_1 = -\frac{p_4\left(r_4 + q_4\left(p_1^2 + p_4^2\right)\right)}{p_1},\ s_1 = \frac{1}{2}p_1\left(p_1^2 + 3\left(p_4^2 + \frac{r_4}{q_4} \right) \right),\ s_4 = p_4^3 + \frac{3p_4r_4}{2q_4} \tag{4.77}$$

elde edilen katsayılar için (4.74) çözüm fonksiyonu ve (4.58) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.48) denkleminin çözümü $\xi_9 = p_1x - \frac{p_4q_4}{p_1}y - \frac{p_4\left(r_4 + q_4\left(p_1^2 + p_4^2\right)\right)}{p_1}z + \left(\frac{1}{2}p_1\left(p_1^2 + 3\left(p_4^2 + \frac{r_4}{q_4} \right) \right) \right)t$ olmak üzere

$$u_6(x,y,z,t) = -3\left(\frac{-a_1p_1^2\cos(\xi_9) + p_4^2e^{-\xi_8} + a_4p_4^2e^{\xi_8}}{a_1\cos(\xi_9) + e^{-\xi_8} + a_4e^{\xi_8}} - \left(\frac{-a_1p_1\sin(\xi_9) - p_4e^{-\xi_8} + a_4p_4e^{\xi_8}}{a_1\cos(\xi_9) + e^{-\xi_8} + a_4e^{\xi_8}} \right)^2 \right) \tag{4.78}$$

olarak bulunur.

iii.

$$a_4 = 0,\ r_1 = \frac{q_1\left(\frac{p_1\left(p_1^2 + p_4^2\right)\left(q_1^2 + q_4^2\right)}{p_1q_4 - p_4q_1} + r_4 \right)}{q_4},\ s_4 = -\frac{3p_1^3q_1 + 3p_4^2p_1q_1 + 3p_1^2p_4q_4 + p_4^3q_4 - 3p_4r_4}{2q_4} \tag{4.79}$$

$$s_1 = \frac{p_1\left(4p_1^2p_4q_1q_4 + p_1^3\left(3q_1^2 + q_4^2\right) - 3p_4q_1r_4 + 3p_1\left(p_4^2\left(q_1^2 + q_4^2\right) + q_4r_4\right)\right)}{2q_4\left(p_1q_4 - p_4q_1\right)},$$

hesaplanan katsayılar için (4.74) çözüm fonksiyonu ve (4.58) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.48) denkleminin çözümü

$$\xi_{11} = p_4 x + q_4 y + r_4 z - \frac{3p_1^3 q_1 + 3p_4^2 p_1 q_1 + 3p_1^2 p_4 q_4 + p_4^3 q_4 - 3p_4 r_4}{2q_4} t$$ ve

$$\xi_{10} = p_1 x + q_1 y + \frac{q_1\left(\dfrac{p_1\left(p_1^2 + p_4^2\right)\left(q_1^2 + q_4^2\right)}{p_1 q_4 - p_4 q_1} + r_4\right)}{q_4} z$$ olmak üzere

$$+ \frac{p_1\left(4p_1^2 p_4 q_1 q_4 + p_1^3\left(3q_1^2 + q_4^2\right) - 3p_4 q_1 r_4 + 3p_1\left(p_4^2\left(q_1^2 + q_4^2\right) + q_4 r_4\right)\right)}{2q_4\left(p_1 q_4 - p_4 q_1\right)} t$$

$$u_7\left(x, y, z, t\right) = -3\left(\frac{-a_1 p_1^2 \cos\left(\xi_{10}\right) + p_4^2 e^{-\xi_{11}}}{a_1 \cos\left(\xi_{10}\right) + e^{-\xi_{11}}} - \left(\frac{-a_1 p_1 \sin\left(\xi_{10}\right) - p_4 e^{-\xi_{11}}}{a_1 \cos\left(\xi_{10}\right) + e^{-\xi_{11}}}\right)^2\right) \qquad (4.80)$$

şeklinde bulunur.

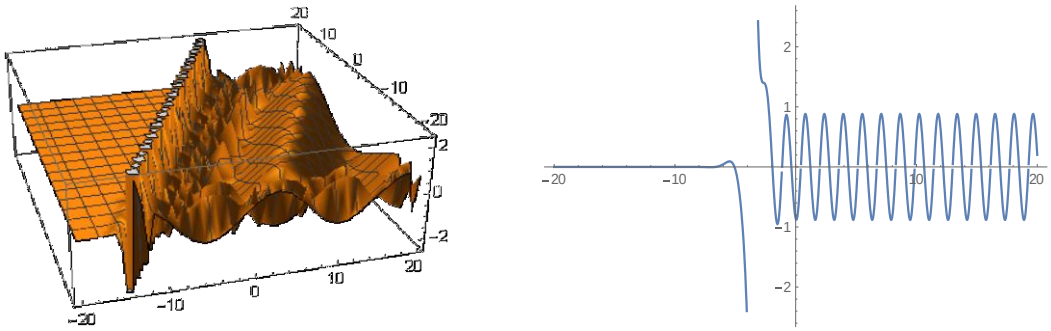
iv.

$$a_4 = 0,\ q_1 = iq_4,\ \ p_1 = ip_4,\ \ s_1 = ip_4^3 + \frac{3p_4 r_1}{2q_4},\ \ s_4 = p_4^3 + \frac{3p_4 r_4}{2q_4} \qquad (4.81)$$

elde edilen katsayılar için (4.74) çözüm fonksiyonu ve (4.58) logaritmik dönüşüm uygulandığında, (4.48) denkleminin çözümü $\xi_{12} = ip_4 x + iq_4 y + r_1 z + \left(ip_4^3 + \dfrac{3p_4 r_1}{2q_4}\right) t$

$$u_3\left(x, y, z, t\right) = -3\left(\frac{a_1 p_4^2 \cosh\left(\xi_{12}\right) + p_4^2 e^{-\xi_8}}{a_1 \cosh\left(\xi_{12}\right) + e^{-\xi_8}} - \left(\frac{a_1 p_4 \sinh\left(\xi_{12}\right) - p_4 e^{-\xi_8}}{a_1 \cosh\left(\xi_{12}\right) + e^{-\xi_8}}\right)^2\right) \qquad (4.82)$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 4.7. (4.82) denklemindeki çözümün $a_1 = -2,\ p_3 = p_4 = 2,\ q_4 = -1,\ r_1 = r_4 = 1$ değerleri için sanal kısmın üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Lineer olmayan (3+1)-boyutlu soliton denkleminin elde edilen farklı fonksiyonlara göre tüm soliton çözümleri için literatür araştırması yapıldığında Sulaiman vd. 2020 makalesindeki (28) nolu soliton çözüm ile bizim elde ettiğimiz (4.78) soliton çözümü, ve (38) nolu soliton çözüm ile bizim elde ettiğimiz (4.76) soliton çözümü benzerlik göstermektedir. Hirota bilineer yöntemiyle farklı fonksiyonlara karşılık gelen diğer soliton çözümler ise literatürde yer almayan soliton çözümler olup, bunların ele alınan denklemin farklı soliton çözümleri olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca elde edilen bütün soliton çözümlerin (3+1)-boyutlu soliton denklemi sağladığı kontrol edilmiştir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kısmi türevli diferansiyel denklemlerin, 1- soliton, 2-soliton ve çoklu soliton çözümlerinin elde edilmesini sağlayan literatürde oldukça fazla uygulaması ve direkt bir yöntem olan Hirota bilineer yöntemi incelenmiştir. Uygulaması yapılan bu yöntemin farklı soliton çözümleri elde edilirken ele alınan fonksiyonun nasıl alınması gerektiğini belirlemek için literatürdeki birçok çalışmanın sonuçları incelenmiştir. Diğer yandan elde edilen soliton çözümlerin sadeleştirilmesi sonucunda başka soliton formlarına dönüşüp dönüşmediği de irdelenmiştir. Elde edilen farklı soliton çözümlerle incelenen denklemlerin fiziksel davranışlarının anlaşılmasının daha kolay olacağı düşünülmektedir. Uygulaması yapılan Hirota bilineer yönteminin literatürde yer alan direkt çözüm yöntemlerine göre oldukça avantajlı olduğu durumlar söz konusudur. Ayrıca yöntemin bazı denklem sınıflarına uygulanırken keyfi uygulamalar yapıldığı ve bunların hatalı sonuçlara sebep olduğu görülmüştür. Yönteme göre farklı çözüm fonksiyonları ele alınarak lineer olmayan diferansiyel denklemlerin farklı soliton çözümlerinin bulunması hedeflenmiş ve bu sayede incelenen denklemlerin 1- soliton, 2- soliton ve çoklu soliton çözümleri elde edilmiştir.

Ele alınan (4.17), (4.21), (4.31) ve (4.40) çözüm fonksiyonları ile lineer hale getirilen, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin Hirota D-operatörleri karşılıkları hesaplanmış ve oluşturulan cebirsel denklem sistemlerinin uygun algoritmaya göre çözülmesiyle çözüm fonksiyonlarındaki yer alan belirlenmesi gereken katsayılar belirlenmiştir. Daha sonra belirlenen değerlere göre çözüm fonksiyonlarının sınıfları oluşturulmuştur. Elde edilen sonuçların denklemleri sağlayıp, sağlamadığı kontrol edilmiştir.

Yöntemin uygulamasına geçmeden önce ele aldığımız her iki denklemin lineer hale getirilmesi için logaritmik dönüşümden faydalanılmıştır. Logaritmik dönüşümde yer alan R değerini yöntem algoritmasına uygun işlemler yaparak tespit edilmiştir. Literatürdeki birçok çalışmada bu R değerinin belirlemesi ayrıntı olarak ifade edilmemiştir.

Hirota bilineer yöntemi sırasıyla (3+1)-boyutlu genelleştirilmiş KP denklemi ve (3+1)-boyutlu soliton denklemlerine uygulanmış ve elde edilen soliton çözümlerin literatürdeki çözümlerden farklı ve yeni soliton çözümler olduğu tespit edilmiştir.

Elde edilen soliton çözümlerin, hareketli dalga çeşitlerine karşılık geldiği bazı durumlar bulunmaktadır. Farklı soliton çeşitlerine karşılık gelen bu çözümlerin doğa bilimlerindeki hangi fiziksel olaylara karşılık geldiğini anlayabilmek için, elde edilen soliton çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri uygun katsayılara göre paket program yardımıyla çizilmiştir. Bu sayede farklı soliton çözümlerin fiziksel davranışlarının hakkında ayrıntılı bilgi sahibi olunmuştur. Farklı bilim insanları kendi çalışma alanlarına göre ele alınan bu katsayıları değiştirerek, farklı fiziksel davranış gösterip göstermediklerini inceleyebilirler. Çizilen grafikler incelendiğinde soliton çözümlerin farklı olduğu görülmüştür. Bunlar karanlık, aydınlık, tekil, düzensiz, kararlı olmayan solitonlar olarak söylenebilir. Literatüre incelendiğinde, daha farklı solitonların örneğin kompakton, nematikon ve oskilon gibi var olduğu ve bunları elde edebilmek için çözüm fonksiyonlarının değiştirilmesi gerektiği anlaşılmaktadır. Biz elde edilen solitonların sadece fiziksel davranışlarını gösterdik. İstenildiği takdirde elde edilen soliton çözümlerin hangi soliton çeşidine ait olduğu belirlenebilir. Bu sayede, anlamlı ve hangi olayların sonuçlarına karşılık geldiği daha iyi açıklanabilir. Eğer ele alınan çözüm fonksiyonlarının daha çeşitli durumları oluşturulabilirse, bu takdirde Hirota bilineer yönteminin uygulanabileceği farklı ve daha genel çözüm fonksiyon sınıfları geliştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

Abbasbandy, S., Shirzadi, A. (2010). The First Integral Method for Modified Benjamin-Bona- Mahony Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15, 1759-1764.

Ablowitz, M. J., Kaup,D. J., Newell, A. C., Segur, H. (1973). Nonlinear-Evolution Equations of Physical Significance. *Physics Review Letters*, 31(2), 125-126.

Akbar, M. A., Ali, N. H. M., Mohyud-Din, S. T. (2013). The Modified Alternative $\left(G'/G\right)$ -Expansion Method to Nonlinear Evolution Equation: Application to the (1+1)-dimensional Drinfel'd-Sokolov-Wilson Equation. *SpringerPlus*, 327, 2-16.

Cai, K.J., Tian, B., Zhang, H., Meng, X. H. (2009). Direct Approach to Construct the Periodic Wave Solutions for Two Nonlinear Evolution Equations. *Communications in Theoretical Physics*, 52, 473-478.

Çağlayan, M., Çelebi, O. (2010). *Kısmi Diferansiyel Denklemler*. Bursa: Dora Yayın.

Darvishi, M. T.,·Kavitha L., Najafi, M., Kumar, V. S. (2016). Elastic Collision of Mobile Solitons of a (3+1)-Dimensional Soliton Equation. *Nonlinear Dynamics*, 86,765-778.

Dönmez, H. İ. (2020). *Kısmi Türevli Denklemlerin Sonlu Fark Metodu ile Nümerik Çözümleri*, 3-11, (Yüksek Lisans Tezi), Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Rize.

Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q. (2001). New Jacobi Elliptic Function Expansion and New Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations. *Physics Letters A*, 290, 72-76.

Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M, D., Miura, R. M. (1967). Method for Solving the Korteweg-deVries Equation. *Physics Review Letters*, 19, 1095-1096.

Guo, S., Zhou, Y. (2010). The Extended $\left(G'/G\right)$-Expansion Method and its Applications to the Whitham-Broer-Kaup-Like Equations and Coupled Hirota-Satsuma KdV Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 215, 3214-3221.

Gürefe, Y., Sönmezoglu, A., Mısırlı, E. (2011). Application of Trial Equation Method to the Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics. *Pramana Journal of Physics*, 77(6), 1023-1029.

Gürefe, Y., Mısırlı, E., Sönmezoğlu, A., Ekici, M. (2013). Extended Trial Equation Method to Generalized Nonlinear Partial Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 219(10), 5253-5260.

He, J. H., Wu, X. H. (2006). Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations. *Chaos, Soliton & Fractals*, 30, 700-708.

Hereman, W., Banerjee, P. P., Korpel, A., Assanto, G., Immerzeele, A. V., Meerpoel, A. (1986). Exact Solitary Wave Solutions of Non-Linear Evolution and Wave Equations Using a Direct Algebraic Method. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 19, 607-628.

Hereman, W., Nuseir, A. (1997). Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 43(1), 13-27.

Hietarinta, J. (1987). A Search for Bilinear Equations Passing Hirota's Three-solition Condition. I.KdV-type Bilinear Equations. *Journal of Mathematical Physics*, 28, 1732-1742.

Hietarinta, J. (1997). Hirota's Bilinear Method and its Generalization. *International Journal of Modern Physics A*, 12(1), 43-51.

Hietarinta, J. (2005). Hirota's Bilinear Method and Soliton Solutions. *Physics AUC*, 15(1), 31-37.

Hirota, R. (1971). Exact Solution of the Korteweg-de Vries Equation for Multiple Collisions of Solitons. *Physical Review Letters*, 27, 1192-1194

Hirota, R. (1973). Exact Envelope-Soliton Solutions of a Nonlinear Wave Equation. *Journal of Mathematical Physics*, 14, 805-809.

Hirota, R. (1982). Bilinearization of Soliton Equations. *Journal of the Physical Society of Japan*, 51, 323-331.

Hirota, R. (2004). *The Direct Method In Soliton Theory*. 180-200, Cambridge: Cambridge University Press.

Kalman, R. E., Bertram, J. E. (1960). Control Analysis and Design via the Second Method of Liapunov: I-Continuous-Time Systems. *Journal of Basic Engineering*, 82(2), 371-393.

Kangalgil, F. (2008). *Painleve Analizi ile Bazı Lineer Olmayan Kismi Türevli Denklemlerin İntegrallenebilirliği ve Soliton Çözümleri Üzerine*, (Doktora Tezi), Gazi Üniversitesi, Ankara.

Kaplan, M. (2018). *Hirota Bilineer Metot ve Uygulamaları*, (Doktora Tezi), Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir.

Kudryashov, N. A., Loguinova, N. B. (2009). Be Careful with Exp-Function Method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 1881-1890.

Kudryashov, N. A. (2012). One Method for Finding Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 2248-2253.

Laia, X. J., Zhang, J. F., Meia, S. H. (2008). Application of the Weierstrass Elliptic Expansion Method to the Long-Wave and Short-Wave Resonance Interaction System. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 63a, 273-279.

Lee, J., Sakthivel, R. (2013). Exact Travelling Wave Solutions for Some Important Nonlinear Physical Models. *Pramana Journal of Physics*, 80, 757-769.

Liu, C.S. (2006). Trial Equation Method for Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous: Mathematical Discussions and Applications. *Communications in Theoretical Physics*, 45(2), 219-223.

Liu, J., Wu, P., Zhang, Y., Feng, L. (2017). New Periodic Wave Solutions of (3+1)-dimensional Soliton Equation. *Thermal Science*, 21(1), 169-176.

Liu Y., Wen, X. Y., Wang, D. S. (2019). Novel Interaction Phenomena of Localized Waves in the Generalized (3+1)-dimensional KP Equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 78, 1-19.

Ma, W. X. (1997). Darboux Transformations for a Lax Integrable System in 2n Dimensions. *Letters in Mathematical Physics*, 39, 33-49.

Ma, W. X., Wu, H. He, J. (2007). Partial Differential Equations Possesing Frobenius Integrable Decompositions. *Physics Letters A*, 364(1), 29-32.

Ma, W. X., Zhou, R. G. (2009). Exact One-Periodic and Two-Periodic Wave Solutions to Hirota bilinear equations in (2+1) dimensions. *Modern Physics Letters A*, 24(21), 1677-1688.

Ma, W. X., Huang, T., Zhang, Y. (2010). A Multiple Exp-Function Method for Nonlinear Differential Equations and Its Application. *Physica Scripta*, 82(6), 69-74.

Ma, W. X., Zhu, Z. (2012). Solving the (3+1)-dimensional Generalized KP and BKP by the Multiple Exp-Function Algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 11871-11879.

Malfliet, W. (2004). The Tanh Method: a Tool for Solving Certain Classes of Nonlinear Evolution and Wave Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 164-165, 529-541.

Malfliet, W., Hereman, W. (1996). The Tanh method: I Exact Solutions of Nonlinear Evolution and Wave Equations. *Physica Scripta*, 54, 563-568.

Pandır, Y., Gürefe, Y., Kadak, U., Mısırlı, E. (2012). Classifications of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, Article ID 478531, 1-16.

Pandır, Y., Sonmezoglu, A., Duzgun, H. H., Turhan, N. (2015). Exact Solutions of Nonlinear Schrödinger's Equation by using Generalized Kudryashov Method. *AIP Conference Proceedings*, 1648, 370004.

Pandır, Y., Demiray, S. T., Bulut, H. (2016). A New Approach for Some NLDEs with Variable Coefficients. *Optik*, 127, 11183-11190.

Pandır Y., Turhan, N. (2017). A New Version of the Generalized F-Expansion Method and its Applications. *AIP Conference Proceedings*, 1798, 020122.

Pandır Y. (2017). A New Type of the Generalized F-Expansion Method and its Application to Sine-Gordon Equation. *Celal Bayar University Journal of Science*, 13(3), 647-650.

Pandır, Y., Ulusoy, H. (2017), The multi wave method for exact solutions of nonlinear partial differential equations, *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences*, 2(1), 13-26.

Pu J. C., Hu, H. C. (2018). Mixed lump-soliton solutions of the (3+1)-dimensional soliton equation. *Applied Mathematics Letters*, 85, 77-81.

Rosales, R. R. (1978). Exact solutionsof some nonlinear evolution equations. *Studies in Applied Mathematics*, 59, 117-151.

Shen, S., Pan, Z. (2003). A Note on the Jacobi Elliptic Function Expansion Method, *Physics Letters A*, 308, 143-148.

Sulaiman, T. A., Yusuf, A., Atangana, A. (2020). New Lump, Lump-kink, Breather Waves and Other Interaction Solutions to the (3+1)-dimensional Soliton Equation. Communications in Theoretical Physics, 72(8), 1-7.

Tandoğan, Y. A., Pandır, Y., Gürefe, Y. (2013). Solutions of the Nonlinear Differential Equations by use of Modified Kudryashov Method. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, Article ID 20130021, 1-7.

Tian, S. F., Zhang, H. Q. (2013). Riemann Theta Functions Periodic Wave Solutions and Rational Characteristics for the (1+1)-dimensional and (2+1)-dimensional Ito Equation. *Chaos Solitons and Fractals*, 47, 27-41.

Wan P., Manafian J., Ismael H. F., Mohammed S. A. (2020). Investigating One-, Two-, and Triple-Wave Solutions via Multiple Exp-Function Method Arising in Engineering Sciences. *Advances in Mathematical Physics*, 2020, Article ID 8018064, 1-18.

Zhang, S. (2007). Exp-Function Method for Solving Maccari's System. *Physics Letters A*, 371, 65-71.

Zhang, X., Chen, Y., Tang, X. (2018). Rogue Wave and a Pair of Resonance Stripe Solitons to KP Equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 76, 1938-1949.

Zhu, S. D. (2007). Exp-Function Method for the Hybrid-Lattice System. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8(3), 461-464.