T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK VE NÜMERİK YÖNTEMLER İLE ÇÖZÜMLERİ

Hasan Hüseyin DÜZGÜN

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2017

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK VE NUMERİK YÖNTEMLER İLE ÇÖZÜMLERİ

Hasan Hüseyin DÜZGÜN

Tez Danışmanı
Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2017

T.C.
BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111313003 numaralı öğrencisi Hasan Hüseyin Düzgün'ün hazırladığı "**Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik yöntemler ile çözümleri**" başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 27/03/2017 Pazartesi günü saat 10:00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Yusuf Ali TANDOĞAN

Jüri Üyesi (Danışman) : Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Yusuf GÜREFE

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ..27.../03..../2017 tarih ve ..09.. sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

..27.../03.../..2017

Doç. Dr. Fuat KÖKSAL
Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **iii**

ABSTRACT ..... **iv**

TEŞEKKÜR ..... **v**

ŞEKİLLER LİSTESİ ..... **vi**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Temel Tanımlar 4

1.2. Jakobi Eliptik Fonksiyonlar 5

2. ANALİTİK ve NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ **7**

2.1. Geliştirilmiş F-Açılım Yöntemi 7

2.2. Yeni Versiyon Geliştirilmiş F-Açılım Yöntemi 9

2.3. Yeni Tip Geliştirilmiş F-Açılım Yöntemi 11

2.4. Varyasyonel İterasyon Yöntemi 11

3. ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYGULAMALARI **14**

3.1. Zaman Kesirli Gardner Denklemi 14

3.1.1. Geliştirilmiş F-Açılım Yönteminin Uygulaması 15

3.1.2. Yeni Versiyon Geliştirilmiş F-Açılım Yönteminin Uygulaması 19

3.1.3. Yeni Tip Geliştirilmiş F-Açılım Yönteminin Uygulaması 21

3.2. Uzay ve Zaman Kesirli Sine Gordon Denklemi 24

3.2.1. Geliştirilmiş F-Açılım Yönteminin Uygulaması 24

3.2.2. Yeni Versiyon Geliştirilmiş F-Açılım Yönteminin Uygulaması 29

3.2.3. Yeni Tip Geliştirilmiş F-Açılım Yönteminin Uygulaması 31

3.3. Uzay ve Zaman Kesirli Kübik Schrödinger Denklemi 33
3.3.1. Geliştirilmiş F-Açılım Yönteminin Uygulaması 34
3.3.2. Yeni Versiyon Geliştirilmiş F-Açılım Yönteminin Uygulaması 38
3.3.3. Yeni Tip Geliştirilmiş F-Açılım Yönteminin Uygulaması 40
4. NÜMERİK YÖNTEMİN UYGULAMASI 43
4.1. Zaman Kesirli Gardner Denklemi 43
5. SONUÇ 47
KAYNAKLAR 48
ÖZGEÇMİŞ 51

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ANALİTİK VE NÜMERİK YÖNTEMLER İLE ÇÖZÜMLERİ

Hasan Hüseyin DÜZGÜN

Bozok Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

2017; Sayfa: 51

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ÖZET

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin belirlenmesine olanak sağlayan geliştirilmiş F-açılım yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntem geliştirilerek yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yöntemi ile yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemi önerilmiştir. Ayrıca nümerik bir yöntem olan varyasyonel iterasyon yöntemi ele alınmıştır. Bu yöntemler, lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanmış ve literatürde yer almayan yeni ve farklı yürüyen dalga çözümleri bulunmuştur. Elde edilen yeni çözüm fonksiyonlarının iki ve üç boyutlu grafikleri ile davranışları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Geliştirilmiş F-açılım yöntemi, Yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yöntemi, Yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemi, Varyasyonel iterasyon yöntemi, Lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri.

SOLUTIONS OF FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WİTH ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS

Hasan Hüseyin DÜZGÜN

Bozok University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master of Science Thesis

2017; Page: 51

Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yusuf PANDIR

ABSTRACT

In this thesis, an improved F-expansion method which allows the analytical solution of nonlinear fractional order differential equations to be determined is discussed. By developing this method a new version of improved F-expansion and a new type of improved F-expansion method are proposed. In addition, variational iteration method, which is a numerical technique, is considered. These methods have been applied to nonlinear fractional differential equations and new and different travelling wave solutions which are not shown in the literature have been found. Furthermore, two and three dimensional graphics of the obtained new solution functions is examined.

Keywords: Improved F-expansion method, A new version of improved F-expansion, A new type of improved F-expansion method, Variational iteration method, Nonlinear differential equations of fractional order, Jacobi elliptic function solutions.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının her evresinde benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf PANDIR' a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yüksek lisans yapmamı teşvik eden, maddi ve manevi desteğini daima yanımda hissettiğim babam Hayri DÜZGÜN ve annem Nurhan DÜZGÜN'e çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1: (3.1.8) çözüm fonksiyonunun $m = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ ile $\alpha = 0.01, 0.5, 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi……. 16

Şekil 3.2: (3.1.17) çözüm fonksiyonunun $m = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ ile $\alpha = 0.01, 0.5, 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi…… 18

Şekil 3.3: (3.1.31) çözüm fonksiyonunun $m = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ ile $\alpha = 0.01, 0.5, 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi…..... 22

Şekil 3.4: (3.1.37) çözüm fonksiyonunun $m = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ ile $\alpha = 0.01, 0.5, 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi…… 23

Şekil 3.5: (3.2.13) çözüm fonksiyonunun $m = S = 0.5$ ile $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi..... 27

Şekil 3.6: (3.2.16) çözüm fonksiyonunun $m = S = 0.5$ ile $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi ….. 28

Şekil 3.7: (3.2.26) çözüm fonksiyonunun $m = S = 0.5$ ile $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi ….. 31

Şekil 3.8: (3.2.30) çözüm fonksiyonunun $m = S = 0.5$ ile $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi ….. 32

Şekil 3.9: (3.3.17) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1, 0.55, 0.99$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi …… 37

Şekil 3.10: (3.3.20) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1, 0.55, 0.99$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi …… 38

Şekil 3.11: (3.3.27) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1, 0.55, 0.99$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi……. 40

Şekil 3.12: (3.3.31) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1, 0.55, 0.99$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi……. 41

Şekil 3.13: (3.3.34) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1,\ 0.55,\ 0.99$ değerleri üç ve iki boyutlu grafik gösterimi 42

1. GİRİŞ

Leibniz ve L'Hospital tarafından ilk kez 1695 yılında kesirli mertebe türev kavramı ortaya atılmıştır [1]. Daha sonra Liouville, Riemann, Abel ve diğer matematikçiler kesirli mertebe kavramı üzerine çalışmalar yapmışlardır. 1772 yılında J. L. Lagrange tam sayı mertebeli diferansiyel operatörler için üstlerin bir kuralını geliştirerek, belirli şartlar altında bu tamsayı mertebeli diferansiyel operatörler için bulunan sonucun keyfi seçimlere dönüşebileceğini söylemiştir [2]. İlk olarak P. S. Laplace 1812 yılında kesirli türevin tanımını detaylı ortaya koymuştur [3]. S. F. Lacroix 1819 yılında Gama fonksiyonunun genelleştirilmiş halini kullanarak, tamsayı olmayan mertebeden türevi formüle etmiştir [4]. Lacroix'in elde ettiği bu sonuçlar bugün hala kullanılan Riemann-Liouville kesirli türev gösterimiyle aynıdır. Liouville kesirli mertebeden türevin iki değişik tanımını ortaya koymuştur. [5]. Daha sonra M. Caputo "Caputo kesirli türevi" olarak bilinen farklı bir kesirli mertebeden türev tanımını ifade etmiştir. [6]. Aslında bu türev tanımı Riemann-Liouville kesirli türeviyle bağlantı kurarak klasik anlamda kesirli mertebeden türevlerin başlangıç şartlarını ifade eder. Kesirli mertebeden türev ve integral kavramları, klasik türev ve integral kavramlarının genelleştirilmesidir. Aslında kesirli mertebeden türev ile ifade edilmek istenen aslında herhangi bir mertebeden türevdir.

Son zamanlarda ise kesirli mertebeden türev hesaplamaları birçok alanda ortaya çıkan problemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Yapılan çalışmalarda kesirli mertebeden problemlerin oluşturulması, oluşturulan problemlerin analitik ve yarı analitik çözümleri ile sayısal çözümlerinin elde edilmesi bilim insanları arasında büyük bir ilgi uyandırmıştır. Bu çözümlerin elde edilmesi için farklı yöntemlerin geliştirilmesi ve uygulanması büyük önem arz etmektedir. En son yapılan araştırmalar incelendiğinde, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunması üzerine olduğu gözlenmiştir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler; fizik, kimya, biyoloji, uygulamalı bilimler, kontrol teorisi, finans, sinyal işleme, sistem tanımlama, sürekli ortamlar mekaniği, viskoelastisite, elektromanyetik, elektrik kontrol teorisi, olasılık ve istatistik, optik fiber, mekanik mühendisliği, hidrodinamik, termodinamik, ısı

transferi, katı hal fiziği, kesirli dinamik gibi birçok alanda karşılaşılan problemleri oluşturan olayları ifade etmek için kullanılır. Aynı zamanda bu tarz denklemler fiziksel olayların yorumlanması ve aydınlatılmasına katkı sağlamaktadır.

Genel olarak, bir kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem için kesin (tam) bir çözüm elde edilebilmesini sağlayan herhangi bir yöntem mevcut değildir. Bu tarz denklemler için yaklaşık çözüm yöntemlerinden bazıları sonlu farklar yöntemi [7], sonlu elemanlar yöntemi [8], diferansiyel dönüşüm yöntemi [9], Adomian ayrıştırma yöntemi [10], değişim iterasyon yöntemi [11], Homotopy pertürbasyon yöntemi [12] ve lineerleştirme yöntemi şeklindedir.

Son zamanlarda, Zhang lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin yürüyen dalga çözümlerini aramak için kesirsel alt denklemi adı verilen yeni bir yöntemi tanıttı [13]. Bu yöntem homojen denge prensibine [14] ve Jumarie tarafından önerilen modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevine dayanır [15, 16]. Zhang ve arkadaşları bu kesirsel alt denklem yöntemini kullanarak, lineer olmayan zaman kesirli biyolojik nüfus modeli ve (4 + 1)-boyutlu uzay-zaman kesirli Fokas denkleminin yürüyen dalga çözümlerini başarılı bir şekilde elde ettiler. Daha sonra, Guo ve ark. [17] ve Lu [18] Zhang'ın geliştirdiği yöntemi kullanarak bazı lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde ettiler. Zhenya, jakobi eliptik fonksiyonları kullanarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini bulmuştur [19]. Pandir ve ark. [20] genişletilmiş deneme denklem yöntemini kullanarak, bazı kesirli mertebeden genelleştirilmiş diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerini buldular. Pandir ve Gurefe [21] genişletilmiş deneme yönteminin yeni bir versiyonunu önererek, genelleştirilmiş Zakharov-Kuznetsov denkleminin yeni tam çözümlerini belirlediler.

Literatürde var olan F-açılım yöntemi [22, 23], geliştirilmiş F-açılım yöntemi [24-26], modifiye edilmiş F-açılım yöntemi [27], genişletilmiş F-açılım yöntemi [28-30] ve genelleştirilmiş F-açılım yöntemi [31] gibi yöntemler incelenmiştir. Bu yöntemlerin daha da geliştirilerek, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerinin daha genel bir halinin bulunacağı kanaatine varılmıştır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, F-açılım yönteminden hareketle kesirli mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için farklı yöntemler geliştirilmiştir. İlk önce geliştirilmiş F-açılım yöntemi incelenmiştir. Daha sonra bu yöntemden yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yöntemi ile yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemi geliştirilmiştir. Geliştirilen bu yeni yöntemler daha önce literatüre sunulan yöntemlere kıyasla farklı ve yeni çözümler elde edilmesine olanak sağlamıştır. Ayrıca bu bölümde nümerik yöntemlerden olan Varyasyonel iterasyon yöntemi de verilmiştir. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere varyasyonel iterasyon yöntemini ilk kez J. H. He uygulamıştır [32].

Bu tez çalışmasının üçüncü bölümünde; geliştirilmiş F-açılım, yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım ve yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemleri< sırasıyla zaman kesirli Gardner [33], uzay ve zaman kesirli sine-Gordon [34] ve uzay ve zaman kesirli kübik Schrödinger denklemlerine [35] uygulanmıştır. Bu problemler için farklı tekli ve birleşik dejenere olmayan Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri bulunmuştur. Yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yönteminden elde edilen sonuçlar geliştirilmiş F-açılım yöntemine göre daha genel ve farklı çözümler elde edilmesini sağlamıştır. Yeni tip geliştirilmiş F-açılım yönteminden bulunan sonuçlar ise hem geliştirilmiş F-açılım yönteminden hem de yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yönteminden elde edilen sonuçlardan farklı ve yeni çözümler bulunmasını sağlamıştır. Ayrıca elde edilen bu farklı çözüm fonksiyonlarının davranışlarını anlayabilmek için Mathematica paket programı yardımıyla üç ve iki boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Bu tez çalışmasının dördüncü bölümünde ise varyasyonel iterasyon yöntemi lineer olmayan zaman kesirli Gardner denklemine uygulanmıştır. Bu denklemin yaklaşık çözümü elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasının sonuç bölümünde geliştirilmiş F-açılım, yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım ve yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemleri yardımıyla bazı lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yeni ve farklı yürüyen dalga çözümlerinin elde edildiği ve bu çözümler incelendiğinde ise geliştirilen yöntemlerin lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin dalga çözümlerini bulmak için kararlı ve etkin oldukları beyan edilmiştir. Ayrıca ele alınan

nümerik yöntemin de yaklaşık çözümlerin bulunmasında etkin olduğu ifade edilmiştir.

1.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde kesirli mertebeden türev, integral ve kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin tanımları ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca, Jakobi eliptik fonksiyonlarla ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.1: $s>0,\ n-1<s<n,\ n\in\mathbb{Z},\ p,s\in\Re^{+}$ ve $x>c$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun s kesirli mertebeden Riemann-Liouville anlamında türevi

$$ {}_{c}D_{x}^{s}\ f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-s)}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\int_{c}^{x}(x-t)^{n-s-1}f(t)\,dt, \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilir [36].

Tanım 1.2: $s>0,\ n-1<s<n,\ n\in\mathbb{Z},\ s\in\Re^{+}$ ve $x>c$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun s kesirli mertebeden Riemann-Liouville anlamında integrali

$$ J^{s}\left[f(x)\right]={}_{c}D_{x}^{-s}\left[f(x)\right]=\frac{d^{-s}f}{dx^{-s}}=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{c}^{x}(x-t)^{s-1}f(t)\,dt, \tag{1.2}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 1.3: $n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{Z},\ \alpha\in\Re^{+}$ olmak üzere

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left[f(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(\omega)}{(t-\omega)^{\alpha+1-n}}d\omega, \tag{1.3}$$

şeklinde tanımlanan türeve α kesirli mertebeden Caputo türevi denir.

Tanım 1.4: α kesirli mertebeden modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevi

$$D_t^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{d}{dt} \displaystyle\int_0^t (t-\zeta)^{-\alpha} \left(f(\zeta) - f(0) \right) d\zeta, & 0 < \alpha < 1 \\ \left(f^{(n)}(t) \right)^{(\alpha-n)} & , \quad n \le \alpha \le n+1 \end{cases} \tag{1.4}$$

şeklinde tanımlanır [15,16].

Tanım 1.5: α kesirli mertebeden modifiye edilmiş Riemann-Liouville türevi ile ilgili bazı özellikler aşağıdaki gibidir. c, c_1, c_2 ler keyfi sabit olmak üzere

$$\text{a) } D_t^{\alpha} t^r = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-\alpha)} t^{r-\alpha}, \quad r > 0 \tag{1.5}$$

$$\text{b) } D_t^{\alpha} \left(c\, f(t) \right) = c.D_t^{\alpha} \left(f(t) \right), \tag{1.6}$$

$$\text{c) } D_t^{\alpha} \left\{ c_1 f(t) + c_2 g(t) \right\} = c_1.D_t^{\alpha} f(t) + c_2.D_t^{\alpha} g(t), \tag{1.7}$$

Tanım 1.6: u bilinmeyen bir fonksiyon, D^{α} u'nun kesirli mertebeden kısmi türevi ve Φ u'nun bir polinom ifadesi olmak üzere en genel lineer olmayan kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem

$$\Phi\left(u,\, D_t^{\alpha} u,\, D_x^{\beta} u,\, D_t^{2\alpha} u,\, D_t^{\alpha} D_x^{\beta} u,\, D_x^{2\beta} u, \cdots \right) = 0, \quad 0 < \alpha,\, \beta \le 1 \tag{1.8}$$

şeklinde tanımlanır.

1.2. Jakobi Eliptik Fonksiyonlar

Birinci tip eliptik integral

$$\omega = \Psi(m, \tau) = \int_0^{\tau} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad 0 < m < 1 \tag{1.9}$$

şeklinde tanımlanan integrale denir. Bu gösterime integralin Legendre formu da denir. Burada τ, ω'nun genliğidir ve $\tau = am(\omega)$ ile gösterilir. m ise ω'nun modülü olarak isimlendirilir. Gerekli dönüşümler altında, birinci tip eliptik integralin

$$\Psi(m,x)=\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-m^2v^2)}}, \tag{1.10}$$

şeklinde Jakobi biçimi elde edilir. $\tau = am(\omega)$ olduğundan, bu takdirde $x=\sin(am\,\omega)$ olarak ifade edilir. Buradan Jakobi eliptik fonksiyonların tanımı aşağıdaki gibi verilir.

$$sn(\omega,m)=sn(\omega),\ cn(\omega,m)=cn(\omega),\ dn(\omega,m)=dn(\omega).$$

Diğer Jakobi eliptik fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$ns(\omega)=\frac{1}{sn(\omega)},\qquad nc(\omega)=\frac{1}{cn(\omega)},\qquad nd(\omega)=\frac{1}{dn(\omega)},\qquad sc(\omega)=\frac{sn(\omega)}{cn(\omega)},$$

$$cs(\omega)=\frac{cn(\omega)}{sn(\omega)},\qquad sd(\omega)=\frac{sn(\omega)}{dn(\omega)},\qquad ds(\omega)=\frac{dn(\omega)}{sn(\omega)},\qquad cd(\omega)=\frac{cn(\omega)}{dn(\omega)},$$

$$dc(\omega)=\frac{dn(\omega)}{cn(\omega)}.$$

Jakobi eliptik fonksiyonların bazı önemli özdeşlikleri aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$sn^2(\omega)+cn^2(\omega)=1,\ m^2sn^2(\omega)+dn^2(\omega)=1,$$

$$sn^2(\omega)=\frac{1-cn(2\omega)}{1+dn(2\omega)},\quad \frac{sn(\omega)\,dn(\omega)}{cn(\omega)}=\sqrt{\frac{1-cn(2\omega)}{1+cn(2\omega)}}, \tag{1.11}$$

$$cn(-\omega)=cn(\omega),\quad sn(-\omega)=-sn(\omega),\quad dn(-\omega)=dn(\omega).$$

Jakobi eliptik fonksiyonların türevleri ω değişkenine göre aşağıdaki şeklinde yazılır.

$$\big(sn(\omega)\big)'=cn(\omega)dn(\omega),$$

$$\big(cn(\omega)\big)'=-sn(\omega)dn(\omega), \tag{1.12}$$

$$\big(dn(\omega)\big)'=-m^2sn(\omega)cn(\omega).$$

2. KULLANILAN ANALİTİK VE NÜMERİK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde ilk önce literatürde var olan geliştirilmiş F-açılım yöntemi tanıtılmıştır. Bu yöntemin yeni bir versiyonu olan yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yöntemi ifade edilmiştir. Daha sonra önerilen bu yöntemin geliştirilmesiyle yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemi verilmiştir.

Ayrıca bu bölümde nümerik bir yöntem olan Varyasyon iterasyon yöntemi ifade edilmiştir. Bu yöntemin ifade edilmesiyle analitik yöntem ile nümerik yöntem karşılaştırılması yapılmıştır.

2.1. Geliştirilmiş F-Açılım Yöntemi

Bu bölümde, literatürde tanımlı olan geliştirilmiş F-açılım yönteminin ana hatları tanıtılmıştır. $x, y, z, \cdots, t$ (zaman) bağımsız değişkenler olmak üzere bir lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denkleminin en genel halini

$$\phi\left(u, D_t^{\alpha}u, D_x^{\beta}u, D_t^{\alpha}D_t^{\alpha}u, D_t^{\alpha}D_x^{\beta}u, D_x^{\beta}D_x^{\beta}u, \cdots\right) = 0, \quad 0 < \alpha,\ \beta < 1 \qquad (2.1)$$

şeklinde ele alalım. Burada K, L sabitler, u bilinmeyen fonksiyon ve ϕ ise u' nun polinomu ve onun kesirli mertebeden diferansiyel denklemidir. Yürüyen dalga dönüşümü

$$\omega = \frac{Kx^{\beta}}{\Gamma\left(1+\beta\right)} + \frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}, \qquad (2.2)$$

için $u\left(x,t\right) = u\left(\omega\right)$ bağıntısı kullanılmıştır. (2.1) denklemine bu tanımlanan yürüyen dalga dönüşümü uygulanıp gerekli kısmi türevler denklemde yerine yazıldığında

$$\psi\left(u, u', u'', u''', \cdots\right) = 0, \qquad (2.3)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (2.3) denklemindeki $u(\omega)$ çözüm fonksiyonu

$$u(\omega)=a_0+\sum_{i=1}^{N}\left\{a_iF^i(\omega)+b_iF^{-i}(\omega)+c_i\frac{F'(\omega)}{F^i(\omega)}\right\}, \tag{2.4}$$

şeklindedir. Buradaki $a_0,a_i,b_i,c_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ katsayıları daha sonra belirlenecek katsayılardır. Ayrıca F fonksiyonunu

$$F'^2(\omega)=PF^4(\omega)+QF^2(\omega)+R, \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlı birinci mertebeden adi diferansiyel denklemin uygun P,Q ve R sabitlerine göre elde edilen bir Jakobi eliptik fonksiyon çözümü olarak alalım. (2.4) denkleminde bulunan N sayısı (2.3) ifadesinde bulunan lineer olmayan yüksek dereceden terim ile en yüksek mertebeden türev içeren terim arasında kurulan denge (balans) ile belirlenir. (2.3) denkleminde bulunan ilgili terimler; (2.4) ve (2.5) denklemleri yardımıyla F ve F' türünden ifade edilen

$$\begin{cases} F''(\omega)=2PF^3(\omega)+QF(\omega), \\ F'''(\omega)=\left(6PF^2(\omega)+Q\right)F'(\omega), \\ F^{(4)}(\omega)=24P^2F^5(\omega)+20PQF^3(\omega)\left(Q^2+12PR\right)F(\omega), \\ F^{(5)}(\omega)=\left(120P^2F^4(\omega)+60PQF^2(\omega)+Q^2+12PR\right)F'(\omega), \\ \qquad\qquad \cdots \end{cases} \tag{2.6}$$

eşitlikleri hesaplanır. Hesaplanan ilgili terimler (2.3) denkleminde yerlerine yazılır. Ortaya çıkan polinom F ve F' fonksiyonlarına bağlıdır. Bu ifadeyi bir sıfır polinomu olarak düşünüp, bu polinomdaki F veya F' fonksiyonlarının oluşturduğu terimlerin katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Mathematica paket programı yardımıyla elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülüp, belirlenmesi gereken $a_0,a_i,b_i,c_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ ve K, L katsayıları bulunur.

Elde edilen bu katsayılar (2.4) çözümünde yerlerine yazılarak $u(\omega)$ şeklinde Jakobi eliptik fonksiyon içeren periyodik ve dejenere olmayan soliton çözümler elde edilir.

2.2. Yeni Versiyon Geliştirilmiş F-Açılım Yöntemi

Bu bölümde (2.1) de belirtilen geliştirilmiş F-açılım yöntemindeki çözüm fonksiyonuna ilave bir terim ekleyerek, çözüm fonksiyonunu genişletmeyi amaçladık. Bu yöntemin adını da yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yöntemi olarak adlandırdık. (2.4) denklemine $d_i \dfrac{F^i(\omega)}{F'(\omega)}$ terimini ekleyerek aşağıdaki çözüm fonksiyonunu yazabiliriz.

$$u(\omega) = a_0 + \sum_{i=1}^{N} \left\{ a_i F^i(\omega) + b_i F^{-i}(\omega) + c_i \frac{F'(\omega)}{F^i(\omega)} + d_i \frac{F^i(\omega)}{F'(\omega)} \right\}, \qquad (2.7)$$

$a_0, a_i, b_i, c_i, d_i \, (i = 1, 2, \cdots, N)$ katsayıları daha sonra belirlenecektir. Ayrıca F fonksiyonunu (2.5) denklemindeki uygun P, Q ve R sabitlerine göre elde edilen bir Jakobi eliptik fonksiyonunu ifade etmektedir. (2.7) denkleminde bulunan N sayısı bir önceki bölümde ifade edildiği gibi (2.3) ifadesinde bulunan lineer olmayan yüksek dereceden terimle en yüksek mertebeden türev içeren terim arasında kurulan denge (balans) ile belirlenir. (2.3) denkleminde lineer olmayan en yüksek dereceden terimi $u(\omega)^r \left(\dfrac{d^k u(\omega)}{d\omega^k} \right)^p$ ve en yüksek mertebeden türev içeren terimi $u(\omega)^m \dfrac{d^n u(\omega)}{d\omega^n}$ olarak alalım. $(n > k)$ olmak üzere $u = u(\omega)$ çözümü

$$u(\omega) = B_N F(\omega)^N + \cdots \qquad (2.8)$$

şeklinde kabul edildiğinde, $F(\omega)$ fonksiyonun türevi

$$F'(\omega) = C_q F(\omega)^q + \cdots \qquad (2.9)$$

olarak verilmiş olsun. Dengelenen terimleri

$$u(\omega)^r \left(\frac{d^k u(\omega)}{d\omega^k} \right)^p \approx u(\omega)^m \frac{d^n u(\omega)}{d\omega^n}, \tag{2.10}$$

şeklinde gösterirsek,

$$u(\omega)^m \frac{d^n u(\omega)}{d\omega^n} = B_N^r F(\omega)^{Nm} C_q^n N(N+q-1)(N+2q-2)\cdots(N+nq-n) F(\omega)^{N+nq-n} + \cdots$$

$$= B_N^m C_q^n N(N+q-1)(N+2q-2)\cdots(N+nq-n) F(\omega)^{Nm+N+nq-n} + \cdots$$

$$u(\omega)^r \left(\frac{d^k u(\omega)}{d\omega^k} \right)^p = B_N^r F(\omega)^{Nr} C_q^{kp} \left(N(N+q-1)(N+2q-2)\cdots(N+kq-k) F(\omega)^{N+kq-k} \right)^p + \cdots$$

$$= B_N^r C_q^{kp} \left(N(N+q-1)(N+2q-2)\cdots(N+kq-k) \right)^p F(\omega)^{Nr+Np+kqp-kp} + \cdots$$

işlemlerinden sonra dengeleme bağıntısı

$$Nm + N + nq - n = Nr + Np + kqp - kp, \tag{2.11}$$

olarak elde edilir. Bu bağıntıdan ilgili parametreler (k, m, n, p, q, r) yerine yazıldığında balans için gerekli olan N sayısı belirlenmiş olur.

Bulunan N sayısı (2.7) de yerine yazılıp, elde edilen fonksiyon ve bu fonksiyonun ilgili türevleri (2.3) denkleminde yerine yazılır. F ve F' fonksiyonlarına bağlı olan polinomun sıfıra eşitlenmesi ile bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Mathematica programında yazılan koda istinaden bu cebirsel denklem sistemi uygun yöntemler kullanılarak çözülüp, $a_0, a_i, b_i, c_i, d_i \, (i = 1, 2, \cdots, N)$ ve K, L katsayıları elde edilir. Elde edilen bu katsayılar (2.7) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılarak $u(\omega)$ şeklinde Jakobi eliptik fonksiyon içeren tek ve birleştirilmiş dejenere olmayan yeni jakobi eliptik fonksiyon çözümleri bulunur.

2.3. Yeni Tip Geliştirilmiş F-Açılım Yöntemi

Bu bölümde yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yönteminde belirtilen (2.7) denklemindeki yeni çözüm fonksiyonunun daha geniş çözümlerin elde edilebilmesi için çözüm fonksiyonuna ilave terim eklenilmesi düşünülmüştür. Çözüm fonksiyonuna ilave terimin eklenmesiyle oluşan yeni yöntemin adına "yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemi" denilmiştir. (2.7) denklemine $\frac{e_i}{F'(\omega)F^i(\omega)}$ terimini ekleyerek aşağıdaki çözüm fonksiyonunu

$$u(\omega)=a_0+\sum_{i=1}^{N}\left\{a_iF^i(\omega)+b_iF^{-i}(\omega)+c_i\frac{F'(\omega)}{F^i(\omega)}+d_i\frac{F^i(\omega)}{F'(\omega)}+\frac{e_i}{F'(\omega)F^i(\omega)}\right\}, \quad (2.12)$$

yazabiliriz. Yeni çözüm fonksiyonunda yer alan $a_0,a_i,b_i,c_i,d_i,e_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ katsayıları sonra belirlenecektir. Yine F fonksiyonu (2.5) denklemindeki uygun P,Q ve R sabitlerine göre elde edilen bir Jakobi eliptik fonksiyonu olarak kabul edilmektedir. (2.12) denkleminde bulunan N sayısı balans prosedürü ile belirlenir. Balans prosedürü bölüm 2.2'de ifade edildiği gibi aynı bağıntı kullanılarak hesaplanır. Hesaplanan N sayısı (2.7) de yerine yazılıp elde edilen yeni çözüm fonksiyonu ve bu fonksiyonun ilgili türevleri hesaplandığında F ve F' fonksiyonlarına bağlı olan bir cebirsel denklem sistemi meydana getirilir. Mathematica programında oluşturulan kodlar ile bu cebirsel denklem sistemi uygun yöntemler kullanılarak çözülür ve $a_0,a_i,b_i,c_i,d_i,e_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ ile K, L katsayıları belirlenmeye çalışılır. Belirlenen bu katsayılar (2.12) çözüm fonksiyonunda yerlerine yazılarak $u(\omega)$ şeklindeki Jakobi eliptik fonksiyon içeren çoklu dejenere olmayan yeni jakobi eliptik fonksiyon çözümleri bulunur.

2.4. Varyasonel İterasyon Yöntemi

Bu bölümde nümerik bir yöntem olan varyasyonel iterasyon yöntemini tanıtacağız. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere varyasyonel iterasyon yönteminin uygulanmasını aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz. L herhangi bir

diferansiyel denklemde bulunan en yüksek mertebeden türev operatörünü, N lineer olmayan operatörü ve $g(x,t)$ sürekli bir fonksiyonu temsil etmek üzere,

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} + Lu(x,t) + Nu(x,t) = g(x,t), \qquad t > 0 \tag{2.13}$$

kesirli mertebeden bir diferansiyel denklemi ele alalım. c_j ler sabitler ve $m-1 < \alpha < m$ kesirli mertebeden türevi göstermek üzere bu denklemin başlangıç şartlarını

$$u^{j}(x,0) = c_j, \qquad j = 0,1,\cdots,m-1 \tag{2.14}$$

şeklinde ifade edelim. Bu nümerik yöntemin işleyişi, verilen (2.13) denklemine ait bir düzeltme fonksiyoneli oluşturmaktır. Varyasyon teorisi gereğince, λ Lagrange çarpanı ve $\tilde{u}_k$ kısıtlanmış varyasyon olmak üzere, bu düzeltme fonksiyoneli

$$u_{k+1}(x,t) = u_k(x,t) + \int_0^t \left[\lambda(\tau) \left(\frac{\partial^m u_k(x,\tau)}{\partial \tau^m} + L\tilde{u}_k(x,\tau) + N\tilde{u}_k(x,\tau) - g(x,\tau) \right) \right] d\tau, \tag{2.15}$$

şeklinde ifade edilir. δ varyasyonel operatör olmak üzere, düzeltme fonksiyoneli u_k 'ya göre sabit alındığında ve $\delta N\tilde{u}_k = 0$ olarak kabul edildiğinde,

$$\delta u_{k+1}(x,t) = \delta u_k(x,t) + \delta \int_0^t \left[\lambda(\tau) \left(\frac{\partial^m u_k(x,\tau)}{\partial \tau^m} + L\tilde{u}_k(x,\tau) + N\tilde{u}_k(x,\tau) - g(x,\tau) \right) \right] d\tau, \tag{2.16}$$

bulunur. (2.16) denkleminden hareketle gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\delta u_{k+1}(x,t) = \delta u_k(x,t) + \delta \int_0^t \left[\left(\frac{\partial^m \lambda(\tau) u_k}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau) L\tilde{u}_k + \lambda(\tau) N\tilde{u}_k - \lambda(\tau) g \right) \right] d\tau = 0,$$

$$= \delta u_k(x,t) + \int_0^t \left[\left(\frac{\partial^m \lambda(\tau)\delta u_k}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau)\delta L\tilde{u}_k + \lambda(\tau)\delta N\tilde{u}_k - \lambda(\tau)\delta g \right) \right] d\tau = 0,$$

$$= \delta u_k(x,t) - \int_0^t \left[\left(-\frac{\partial^m \lambda(\tau)\delta u_k}{\partial \tau^m} - \lambda(\tau)\delta L\tilde{u}_k - \lambda(\tau)\delta N\tilde{u}_k + \lambda(\tau)\delta g \right) \right] d\tau = 0,$$

$$= \delta u_k(x,t) + \lambda(\tau)\delta N\tilde{u}_k(x,t) + \int_0^t \left[\left(\frac{\partial^m \lambda(\tau)}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau) \right) \delta u_k(x,t) \right] d\tau = 0,$$

$$= \left(1 + \lambda(\tau)\right)\delta u_k(x,t) + \int_0^t \left[\left(\frac{\partial^m \lambda(\tau)}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau) \right) \delta u_k(x,t) \right] d\tau = 0,$$

elde edilir. Buradan $1+\lambda(\tau)=0$ ve $\frac{\partial^m \lambda(\tau)}{\partial \tau^m} + \lambda(\tau) = 0$ olmak üzere Lagrange çarpanı

$$\begin{cases} \lambda = -1, \ m = 1 \\ \lambda = \tau - t, \ m = 2 \\ \lambda = (-1)^m \dfrac{(\tau - t)^{(m-1)\alpha}}{\Gamma\left(1 + (m-1)\alpha\right)}, \ m > 2 \end{cases} \tag{2.17}$$

olarak hesaplanır.

3. ANALİTİK YÖNTEMLERİN UYGULAMALARI

Bu bölümde zaman kesirli Gardner, uzay ve zaman kesirli sine-Gordon ile uzay ve zaman kesirli kübik Schrödinger denklemleri irdelenmiş ve sırasıyla geliştirilmiş F-açılım, yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım ve yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemleri denklemlere uygulanmıştır.

3.1. Zaman-Kesirli Gardner Denklemi ve Uygulamaları

Bu kısımda genel hali

$$D_t^{\alpha}u+6\left(u-\varepsilon^2u^2\right)u_x+u_{xxx}=0,\quad 0\le x\le 1,\ 0<\alpha\le 1 \qquad (3.1.1)$$

şeklinde olan lineer olmayan zaman kesirli Gardner denklemine önerilen yöntemler uygulanmıştır. Burada ε sabit, u denklemi sağlayan x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon, α ise u fonksiyonunun kesirli mertebeden türevini ifade etmektedir. Gardner denklemi akışkanlar mekaniğinde lineer olmayan iyi frekans dağılım davranışı sergileyen ileriye doğru yayılan kısa dalga modellerini açıklamaktadır.

(3.1.1) denklemine önerilen F-açılım yöntemlerini uygulayabilmek için öncelikle yürüyen dalga dönüşümünü

$$u\left(x,t\right)=u\left(\omega\right),\quad \omega=Kx+\frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)},$$

(3.1.2) uygulayalım. Bu dönüşüme göre ilgili türevler alındığında ve (3.1.1) denkleminde alınan türevler yerine yazıldığında $u=u\left(\omega\right)$ ve $\frac{\partial u}{\partial\omega}=u'$ olmak üzere, (3.1.1) denklemi

$$Lu'\left(\omega\right)+6K\left(u\left(\omega\right)-\varepsilon^2u^2\left(\omega\right)\right)u'\left(\omega\right)+K^3u'''\left(\omega\right)=0,\ , \qquad (3.1.3)$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklemine indirgenir. (3.1.3) eşitliğinin her iki tarafının ω değişkenine göre integrali alınıp ve oluşan integral sabitini sıfır olarak seçildiğinde

$$Lu(\omega)+3Ku^2(\omega)-2K\varepsilon^2u^3(\omega)+K^3u''(\omega)=0, \tag{3.1.4}$$

2. mertebeden bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (3.1.4) de ifade edilen adi diferansiyel denkleminin çözümünü bulabilmek için ilk önce bölüm 2.1 de belirtilen geliştirilmiş F-açılım yöntemini uygulayalım.

3.1.1. Geliştirilmiş F- açılım yönteminin uygulaması

Zaman kesirli Gardner denklemi için önerilen çözüm fonksiyonu (2.4) de belirtilmiştir. Bu çözüm fonksiyonuna göre (3.1.4) denklemindeki en yüksek mertebeden türev içeren $u''(\omega)$ terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan $u^3(\omega)$ terimleri arasında kurulan dengeleme işlemi sonucunda $N=1$ olarak elde edilmiştir. Böylece elde edilen bu dengeleme terimi (2.4) denkleminde yerine yazıldığında (3.1.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonunun genel hali

$$u(\omega)=a_0+a_1F(\omega)+b_1F^{-1}(\omega)+c_1\frac{F'(\omega)}{F(\omega)}, \tag{3.1.5}$$

şeklinde yazılır. (3.1.5) ifadesinden faydalanarak (3.1.4) denkleminde yer alan ilgili terimlerin karşılıkları bulunur. Bulunan bu terimler (3.1.4) denkleminde yerine yazıldığında $F'^{i}(\omega)F^{j}(\omega)\left(i=0,1;\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$ Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı bir polinom denklem elde edilir. Bu polinom sıfır polinomu olarak düşünülüp, katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programında yazılan koda göre çözüldüğünde a_0, a_1, b_1, c_1, K ve L katsayıları ile ω dönüşümü altında aşağıda belirtilen durumlarda bulunmuştur. Bulunan katsayılar (3.1.5) çözüm fonksiyonunda yerine yazılarak $F(\omega)$ veya $F'(\omega)$ Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı $u=u(\omega)$ çözümleri bulunur. Ayrıca (2.5) denkleminde özel olarak seçilen $P=m^2,\ Q=-\left(1+m^2\right)$ ve $R=1$ katsayılarına karşılık $F(\omega)=sn(\omega)$ Jakobi eliptik fonksiyonu için aşağıda belirtilen durumlardaki çözümleri verilmiştir.

Durum 1:

$$a_0=\frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1=\pm\frac{i}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{P}{2Q}},\ b_1=c_1=0,\ K=\pm\frac{i}{\varepsilon\sqrt{2Q}},\ L=-\frac{K}{\varepsilon^2}, \tag{3.1.6}$$

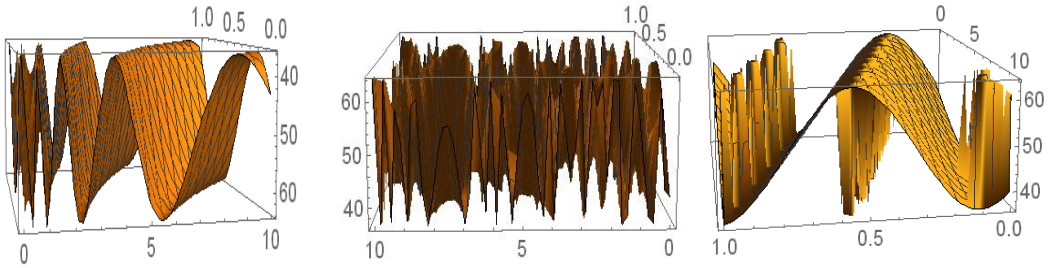
elde edilen katsayılar için (3.1.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$u_1(\omega_1)=a_0+a_1F(\omega_1),\quad \omega_1=Kx+\frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.1.7}$$

şeklindedir. $A_1=\pm\dfrac{m}{\varepsilon^2\sqrt{2+2m^2}}$ ve $\omega_1=\pm\dfrac{1}{\varepsilon^2\sqrt{2+2m^2}}\left(x-\dfrac{t^{\alpha}}{\varepsilon^2\Gamma(1+\alpha)}\right)$ olmak üzere, (3.1.1) denkleminin tam çözümü

$$u_1(\omega_1)=\frac{1}{2\varepsilon^2}+A_1\,sn(\omega_1), \tag{3.1.8}$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.1. (3.1.8) çözüm fonksiyonunun $m=0.2$, $\varepsilon=0.1$ ile $\alpha=0.01,\ 0.5,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

Durum 2:

$$a_0=\frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1=c_1=0,\ b_1=\pm\frac{i}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{R}{2Q}},\ K=\pm\frac{i}{\varepsilon\sqrt{2Q}},\ L=-\frac{K}{\varepsilon^2}, \tag{3.1.9}$$

bulunan katsayıları için (3.1.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$u_2(\omega_1)=a_0+a_1F^{-1}(\omega_1), \tag{3.1.10}$$

şeklindedir. İlgili dönüşümler altında (3.1.1) denkleminin Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_2(\omega_1)=\frac{1}{2\varepsilon^2}+\frac{A_1}{m}ns(\omega_1), \tag{3.1.11}$$

olarak bulunur.

Durum 3:

$$a_0=\frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1=\pm\frac{i}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{P}{2\left(Q+6\sqrt{PR}\right)}},\ b_1=\pm a_1\sqrt{\frac{R}{P}},\ c_1=0,\ K=\pm\frac{i}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2\left(Q+6\sqrt{PR}\right)}},\ L=-\frac{K}{\varepsilon^2}, \tag{3.1.12}$$

katsayıları için (3.1.1) çözüm fonksiyonu

$$u_3(\omega_2)=a_0+a_1F(\omega_2)+b_1F^{-1}(\omega_2),\quad \omega_2=Kx+\frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.1.13}$$

şeklindedir. $A_2=\pm\frac{m}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{1}{2\left(m^2-6m+1\right)}}$ ve $\omega_2=\pm\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{2\left(m^2-6m+1\right)}}\left(x-\frac{t^{\alpha}}{\varepsilon^2\Gamma(1+\alpha)}\right)$ olmak üzere (3.1.1) denkleminin birleşik Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_3(\omega_2)=\frac{1}{2\varepsilon^2}+A_2\left(sn(\omega_2)+\frac{1}{m}ns(\omega_2)\right), \tag{3.1.14}$$

olarak elde edilir.

Durum 4:

$$a_0=\frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1=\pm\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{\frac{P}{Q-6\sqrt{PR}}},\ b_1=\pm a_1\sqrt{\frac{R}{P}},\ c_1=\pm\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{\frac{1}{Q-6\sqrt{PR}}},$$

$$K=\pm\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{Q-6\sqrt{PR}}},\ L=-\frac{K}{\varepsilon^2}, \tag{3.1.15}$$

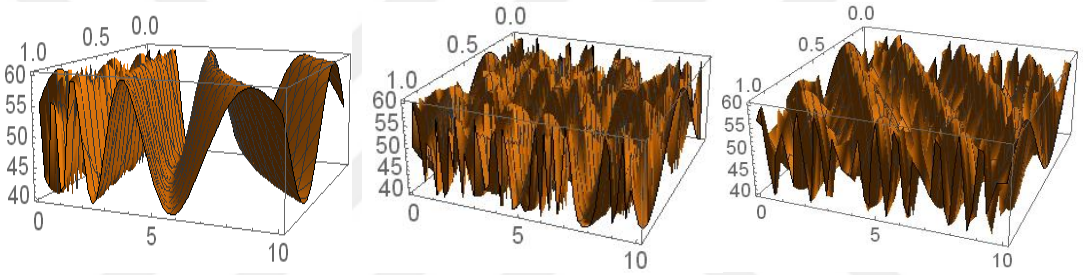
elde edilen katsayıları için (3.1.1) çözüm fonksiyonu

$$u_4(\omega_3)=a_0+a_1F(\omega_3)+b_1F^{-1}(\omega_3)+c_1\frac{F'(\omega_3)}{F(\omega_3)},\quad \omega_3=Kx+\frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},\quad (3.1.16)$$

formundadır. $A_3=\pm\frac{i}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{1}{2\left(m^2+6m+1\right)}}$ ve $\omega_3=\pm\frac{i}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{m^2+6m+1}}\left(x-\frac{t^{\alpha}}{\varepsilon^2\Gamma(1+\alpha)}\right)$ olmak üzere (3.1.1) denkleminin yeni tam çözümü

$$u_4(\omega_3)=\frac{1}{2\varepsilon^2}+A_3\left(sn(\omega_3)+cs(\omega_3)dn(\omega_3)+m\ ns(\omega_2)\right),\quad (3.1.17)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.2. (3.1.17) çözüm fonksiyonunun $m=0.2$, $\varepsilon=0.1$ ile $\alpha=0.01,\ 0.5,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

Durum 5:

$$a_0=\frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1=b_1=0,\ c_1=\pm\frac{1}{2\varepsilon^2\sqrt{Q}},\ K=\pm\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{Q}},\ L=-\frac{K}{\varepsilon^2},\quad (3.1.18)$$

katsayıları için (3.1.1) çözüm fonksiyonu

$$u_5(\omega_4)=a_0+c_1\frac{F'(\omega_4)}{F(\omega_4)},\qquad \omega_4=Kx+\frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},\quad (3.1.19)$$

şeklindedir. $A_4=\pm\frac{i}{2\varepsilon^2\sqrt{m^2+1}}$ ve $\omega_4=\pm\frac{i}{2\varepsilon\sqrt{m^2+1}}\left(x-\frac{t^{\alpha}}{\varepsilon^2\Gamma(1+\alpha)}\right)$ olmak üzere kompleks dönüşümü altında (3.1.1) denkleminin yeni birleşik Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_5(\omega_4)=\frac{1}{2\varepsilon^2}+A_4\ cs(\omega_4)dn(\omega_4), \tag{3.1.20}$$

olarak elde edilir.

3.1.2. Yeni versiyon geliştirilmiş F- açılım yönteminin uygulaması

Bu kısımda bölüm 2.2 de önerdiğimiz yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yönetimini zaman kesirli Gardner denklemine uygulayacağız. (2.7) de ifade edilen yeni çözüm fonksiyonuna göre denklemin tam çözümlerini 3.1.1 bölümünde elde edilenlerden farklı olanları vereceğiz. Bu yeni çözüm fonksiyonuna göre balans prosedürü hesaplandığında $N=1$ olarak elde edilir. Böylece bulunan dengeleme terimi (2.7) denkleminde yerine yazıldığında (3.1.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonu

$$u(\omega)=a_0+a_1F(\omega)+b_1F^{-1}(\omega)+c_1\frac{F'(\omega)}{F(\omega)}+d_1\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}, \tag{3.1.21}$$

şeklinde yazılır. (3.1.21) ifadesi kullanılarak (3.1.4) denkleminde yer alan ilgili terimler hesaplanıp, bunlar (3.1.4) de yerine yazıldığında yine $F'^{i}(\omega)F^{j}(\omega)(i=0,1;\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı bir polinom denklem elde edilir. a_0,a_1,b_1,c_1,d_1,K ve L katsayılarını bulabilmek için elde edilen polinom sıfır polinomu olarak kabul edilip, cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Oluşan bu denklem sistemi oluşturulan koda göre Mathematica programında çözülür. Bulunan ilgili katsayılar ile ω ters dönüşümü altında aşağıda belirtilen yeni çözümler bulunmuştur. Burada (2.5) denkleminde $P=m^2,\ Q=-(1+m^2)$ ve $R=1$ katsayılarının seçimine bağlı olarak Jakobi eliptik fonksiyonuna ait çözümler aşağıda belirtilmiştir.

Durum 1:

$$a_0=\frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1=b_1=c_1=0,\ d_1=\pm\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{\frac{Q^2-4PR}{Q}},\ K=\pm\frac{1}{2\varepsilon\sqrt{Q}},\ L=-\frac{K}{\varepsilon^2}, \tag{3.1.22}$$

elde edilen katsayıları için (3.1.1) çözüm fonksiyonu

$$u_6(\omega_4) = a_0 + d_1 \frac{F(\omega_4)}{F'(\omega_4)}, \tag{3.1.23}$$

şeklindedir. $A_5 = \pm \frac{i(1-m^2)}{2\varepsilon^2\sqrt{m^2+1}}$ olmak üzere (3.1.1) denkleminin farklı Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_6(\omega_4) = \frac{1}{2\varepsilon^2} + A_5 \; sc(\omega_4) nd(\omega_4), \tag{3.1.24}$$

olarak bulunur.

Durum 2:

$$a_0 = \frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1 = b_1 = 0,\ c_1 = \pm \frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{\frac{1}{Q+3\sqrt{Q^2-4PR}}},\ d_1 = \pm\sqrt{Q^2-4PR}c_1,$$

$$K = \pm \frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{Q+3\sqrt{Q^2-4PR}}},\ L = -\frac{K}{\varepsilon^2}, \tag{3.1.25}$$

bulunan katsayıları için (3.1.1) çözüm fonksiyonu

$$u_7(\omega_5) = a_0 + c_1 \frac{F'(\omega_5)}{F(\omega_5)} + d_1 \frac{F(\omega_5)}{F'(\omega_5)},\quad \omega_5 = Kx + \frac{Lt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.1.26}$$

formundadır. $A_6 = \pm \frac{i}{2\varepsilon^2}\sqrt{\frac{1}{2(1-2m^2)}}$ ve $\omega_5 = A_6\left(x - \frac{t^\alpha}{\varepsilon^2\Gamma(1+\alpha)}\right)$ olmak üzere, (3.1.1) denkleminin birleşik dejenere olmayan Jacobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_7(\omega_5) = \frac{1}{2\varepsilon^2} + A_6\left(cs(\omega_5)dn(\omega_5) + (1-m^2)sc(\omega_5)nd(\omega_5)\right), \tag{3.1.27}$$

elde edilir.

3.1.3. Yeni tip geliştirilmiş F-açılım yönteminin uygulaması

Bu kısımda ise bölüm 2.3 de önerdiğimiz en genel Jakobi eliptik fonksiyon çözümlerini veren yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntimini zaman kesirli Gardner denklemine uygulayacağız. (2.12) de ifade edilen yeni çözüm fonksiyonuna göre denklemin tam çözümlerinde 3.1.2 bölümünde elde edilenlerden farklı olanları belirteceğiz. Bu yeni çözüm fonksiyonuna göre balans prosedürü hesaplandığında $N=1$ olarak bulunmuştur. Böylece bulunan bu dengeleme terimi (2.12) denkleminde yerine yazıldığında (3.1.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonu

$$u(\omega)=a_0+a_1F(\omega)+b_1F^{-1}(\omega)+c_1\frac{F'(\omega)}{F(\omega)}+d_1\frac{F(\omega)}{F'(\omega)}+\frac{e_1}{F'(\omega)F(\omega)}, \tag{3.1.28}$$

şeklinde yazılır. (3.1.1) denkleminin yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemine göre elde edilen yeni ve farklı çözümleri belirtilmiştir. Önceki yöntemler ile bulunan çözümlerin dışında kalan çözümler aşağıda gibi bulunmuştur.

Durum 1:

$$a_0=\frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1=b_1=0,\ c_1=\pm\frac{i}{2\varepsilon^2\sqrt{Q}},\ d_1=\pm\frac{i}{2\varepsilon^2}\sqrt{\frac{Q}{2}},$$

$$e_1=\pm\frac{iR}{\varepsilon^2\sqrt{2Q}},\ K=\pm\frac{i}{2\varepsilon\sqrt{2Q}},\ L=-\frac{K}{\varepsilon^2}, \tag{3.1.29}$$

katsayıları için (3.1.1) çözüm fonksiyonu

$$u_8(\omega_6)=a_0+c_1\frac{F'(\omega_6)}{F(\omega_6)}+d_1\frac{F(\omega_6)}{F'(\omega_6)}+\frac{e_1}{F'(\omega_6)F(\omega_6)},\quad \omega_6=Kx+\frac{Lt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},$$

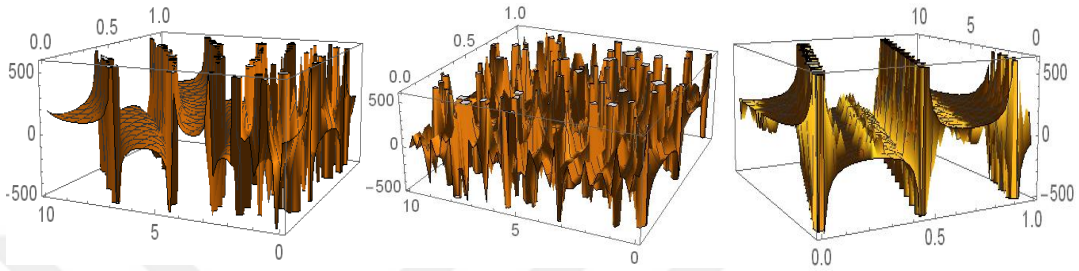
(3.1.30)

şeklindedir. $A_7=\pm\dfrac{1}{2\varepsilon^2\sqrt{2\left(1+m^2\right)}}$ ve $\omega_6=\pm\dfrac{1}{2\varepsilon\sqrt{2\left(1+m^2\right)}}\left(x-\dfrac{t^{\alpha}}{\varepsilon^2\Gamma(1+\alpha)}\right)$ olmak üzere (3.1.1) denkleminin çoklu birleşik dejenere olmayan Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_8(\omega_6)=\frac{1}{2\varepsilon^2}+A_7\left(cs(\omega_6)dn(\omega_6)+\left(1+m^2\right)sc(\omega_6)nd(\omega_6)+2nc(\omega_6)nd(\omega_6)ns(\omega_6)\right),$$

(3.1.31)

olarak bulunur.



Şekil 3.3. (3.1.31) çözüm fonksiyonunun $m=0.2$, $\varepsilon=0.1$ ile $\alpha=0.01,\ 0.5,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

Durum 2:

$$a_0=\frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1=b_1=c_1=0,\ d_1=\pm\frac{1}{2\varepsilon^2}\sqrt{\frac{2Q^3-7PQR+\left(2Q^2-3PR\right)\sqrt{Q^2-4PR}}{4Q^2-18PR}},$$

$$e_1=\pm\frac{\sqrt{Q^2-4PR}-Q}{2P}d_1,\ K=\pm\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{6\sqrt{Q^2-4PR}-2q}},\ L=-\frac{K}{\varepsilon^2},\qquad(3.1.32)$$

elde edilen katsayılar için (3.1.1) çözüm fonksiyonu

$$u_9(\omega_7)=a_0++d_1\frac{F(\omega_7)}{F'(\omega_7)}+\frac{e_1}{F'(\omega_7)F(\omega_7)},\quad \omega_7=Kx+\frac{Lt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\qquad(3.1.33)$$

şeklindedir. $A_8=\pm\dfrac{1}{2\varepsilon^2\sqrt{2m^2-1}}$ ve $\omega_7=\pm\dfrac{1}{2\varepsilon\sqrt{2m^2-1}}\left(x-\dfrac{t^\alpha}{\varepsilon^2\Gamma(1+\alpha)}\right)$ olmak üzere (3.1.1) denkleminin yeni çoklu dejenere olmayan Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_9(\omega_7)=\frac{1}{2\varepsilon^2}+A_8\left(sc(\omega_7)nd(\omega_7)+nc(\omega_7)nd(\omega_7)ns(\omega_7)\right),\qquad(3.1.34)$$

elde edilir.

Durum 3:

$$a_0=\frac{1}{2\varepsilon^2},\ a_1=b_1=0,\ c_1=\pm\frac{1}{\varepsilon^2}\sqrt{\frac{1}{6\sqrt{Q^2-4PR}-2Q}},\ d_1=\pm\frac{\sqrt{Q^2-4PR}-Q}{2\varepsilon^2}c_1,$$

$$e_1=\pm Rc_1,\ K=\pm\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{6\sqrt{Q^2-4PR}-2Q}},\ L=-\frac{K}{\varepsilon^2}, \tag{3.1.35}$$

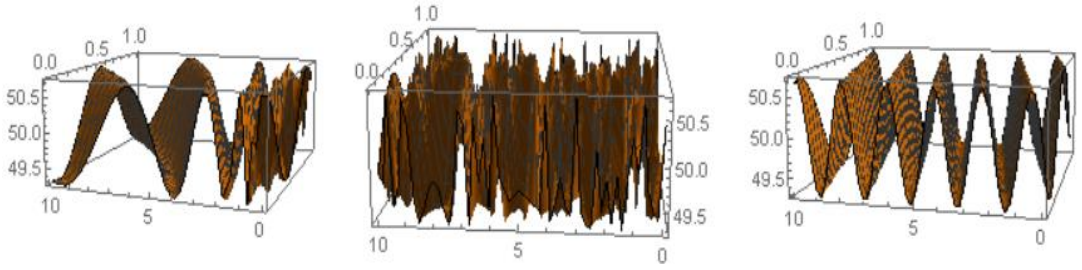
bulunan katsayılar için (3.1.1) çözüm fonksiyonu

$$u_{10}(\omega_7)=a_0+c_1\frac{F'(\omega_6)}{F(\omega_6)}+d_1\frac{F(\omega_6)}{F'(\omega_6)}+\frac{e_1}{F'(\omega_6)F(\omega_6)}, \tag{3.1.36}$$

şeklindedir. (3.1.1) denkleminin yeni tip çoklu dejenere olmayan Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$u_{10}(\omega_7)=\frac{1}{2\varepsilon^2}+A_8\left(m^2cs(\omega_7)dn(\omega_7)+sc(\omega_7)nd(\omega_7)+nc(\omega_7)nd(\omega_7)ns(\omega_7)\right), \tag{3.1.37}$$

bulunur.



Şekil 3.4. (3.1.37) çözüm fonksiyonunun $m=0.2$, $\varepsilon=0.1$ ile $\alpha=0.01,\ 0.5,\ 1$ değerleri için üç boyutlu grafik gösterimi.

3.2. Uzay ve Zaman Kesirli sine-Gordon Denklemi ve Uygulamaları

Bu kısımda

$$\frac{\partial^{2\alpha} v}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{\partial^{2\alpha} v}{\partial x^{2\alpha}} + v - \frac{1}{6} v^3 = 0, \quad 0 < \alpha < 1 \tag{3.2.1}$$

şeklinde ifade edilen lineer olmayan uzay ve zaman kesirli sine-Gordon denklemine verilen yöntemlere uygulanmıştır. Burada v denklemi sağlayan x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyonu, α ise v fonksiyonun kesirli mertebeden türevini göstermektedir. Uzay ve zaman kesirli sine-Gordon denklemi, dalgaların davranışlarını anlayabileceğimiz lineer olmayan kesirli mertebeden bir denklemdir.

Önerilen F-açılım yöntemlerini (3.2.1) denklemine uygulayabilmek için öncelikle yürüyen dalga dönüşümünü

$$v(x,t) = v(\eta), \quad \eta = \frac{Sx^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{Tt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \tag{3.2.2}$$

ele almalıyız. Bu dönüşüm altında ilgili türevler hesaplandığında ve (3.2.1) denkleminde bu alınan türevler yerine yazıldığında $v = v(\eta)$ ve $\frac{\partial v}{\partial \eta} = v'$ olmak üzere, (3.2.1) denklemi

$$v(\eta) - \frac{1}{6} v^3(\eta) + (T^2 - S^2) v''(\eta) = 0, \tag{3.2.3}$$

2. mertebeden bir lineer olmayan adi diferansiyel denklemine indirgenir. (3.2.3) ile ifade edilen bu adi diferansiyel denklemin genel çözümünü elde edebilmek için ilk önce bölüm 2.1 de belirtilen geliştirilmiş F-açılım yöntemine uygulayalım.

3.2.1. Geliştirilmiş F- açılım yönteminin uygulaması

Geliştirilmiş F-açılım yöntemine göre uzay ve zaman kesirli sine-Gordon denklemi için önerilen çözüm fonksiyonu (2.4) te ifade edilmiştir. Önerilen bu çözüm

fonksiyonuna göre balans prosedürü uygulandığında, (3.2.3) denklemindeki $v''(\eta)$ terimi ile $v^3(\eta)$ terimleri arasında kurulan dengeleme işlemi sonucunda $N=1$ olarak bulunmuştur. Böylece bulunan bu dengeleme terimi (2.4) ifadesinde yerine yazıldığında (3.2.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonunun genel hali

$$v(\eta)=a_0+a_1F(\eta)+b_1F^{-1}(\eta)+c_1\frac{F'(\eta)}{F(\eta)}, \tag{3.2.4}$$

şeklinde olur. (3.2.4) çözüm fonksiyonundan faydalanarak (3.2.3) denkleminde yer alan ilgili terimlerin karşılıkları elde edilir. Elde edilen bu terimler (3.2.3) denkleminde yerine yazıldığında $F'^{i}(\eta)F^{j}(\eta)(i=0,1;\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı bir polinom ifadesi bulunur. Bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenerek, oluşan cebirsel denklem sistemi ilgili kodlara göre çözüldüğünde a_0,a_1,b_1,c_1,S ve T katsayıları ile η dönüşümü altında aşağıda belirtilen durumlarda elde edilmiştir. Elde edilen katsayılar (3.2.4) çözüm fonksiyonunda yerine yazılarak $F(\eta)$ veya $F'(\eta)$ Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı $v=v(\eta)$ çözümleri bulunur. Yine (2.5) denkleminde belirtilen katsayılar uygun olarak seçilirse, bu katsayılara karşılık $F(\eta)=sn(\eta)$ Jakobi eliptik fonksiyonuna ait aşağıda belirtilen çözümler elde edilmiştir.

Durum 1:

$$a_0=b_1=c_1=0,\ a_1=\pm2i\sqrt{\frac{3P}{Q}},\ T=\pm\sqrt{\frac{QS^2-1}{Q}}, \tag{3.2.5}$$

katsayıları için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_1(\eta_1)=a_1F(\eta_1),\quad \eta_1=\frac{Sx^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}+\frac{Tt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.2.6}$$

formundadır. $B_1=\pm2\sqrt{\frac{3}{m^2+1}}$ ve $\eta_1=\frac{Sx^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\pm\sqrt{\frac{S^2(1+m^2)+1}{1+m^2}}\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere, (3.2.1) denkleminin tam çözümü

$$v_1(\eta_1) = B_1 sn(\eta_1), \tag{3.2.7}$$

olarak elde edilir.

Durum 2:

$$a_0 = a_1 = c_1 = 0,\ b_1 = \pm 2i\sqrt{\frac{3R}{Q}},\ T = \pm\sqrt{\frac{QS^2 - 1}{Q}}, \tag{3.2.8}$$

elde edilen katsayılar için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_2(\eta_1) = b_1 F^{-1}(\eta_1), \tag{3.2.9}$$

şeklindedir. (3.2.1) denkleminin Jakobi elliptik fonksiyon çözümü

$$v_2(\eta_1) = B_1 ns(\eta_1), \tag{3.2.10}$$

olarak bulunur.

Durum 3:

$$a_0 = c_1 = 0,\ a_1 = \pm 2\sqrt{\frac{3P}{6\sqrt{PR} + Q}},\ b_1 = \pm 2\sqrt{\frac{3R}{6\sqrt{PR} + Q}},\ T = \pm\sqrt{\frac{S^2}{6\sqrt{PR} + Q} + 1}, \tag{3.2.11}$$

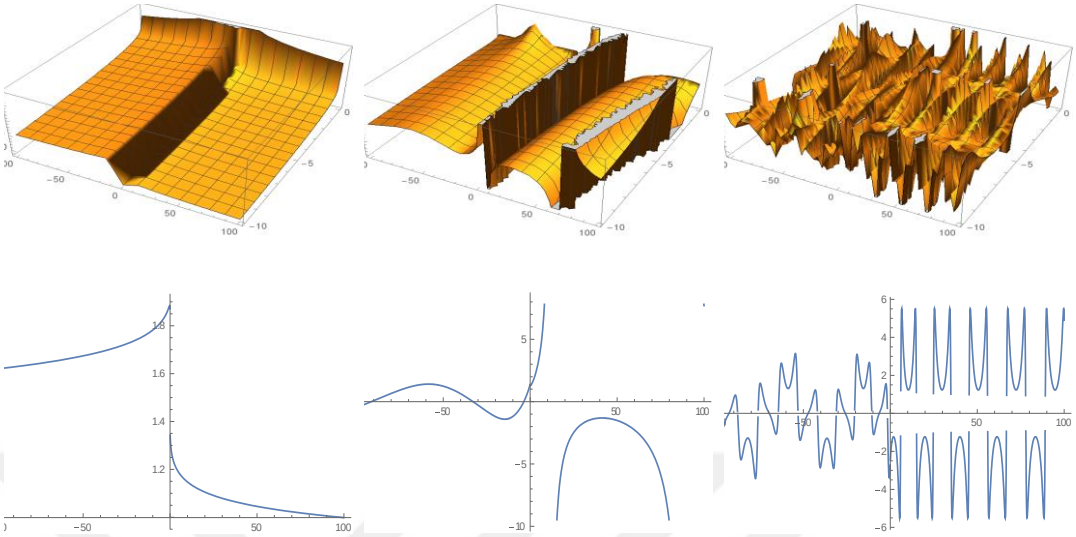
bulunan katsayılar için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_3(\eta_2) = a_1 F(\eta_2) + b_1 F^{-1}(\eta_2), \quad \eta_2 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{Tt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.2.12}$$

olarak ifade edilir. $B_2 = \pm 2\sqrt{\frac{3}{m^2 - 6m + 1}}$ ve $\eta_2 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \pm \sqrt{\frac{S^2(m^2 - 6m + 1) + 1}{m^2 - 6m + 1}}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere yürüyen dalga dönüşümü altında (3.2.1) denkleminin tam çözümü

$$v_3(\eta_2) = B_2\left(m\, sn(\eta_2) + ns(\eta_2)\right), \tag{3.2.13}$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.5. (3.2.13) çözüm fonksiyonunun $m = S = 0.5$ ile $\alpha = 0.1,\ 0.5,\ 0.9$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Durum 4:

$$a_0 = a_1 = b_1 = 0,\ c_1 = \pm\sqrt{\frac{6}{Q}},\ T = \pm\sqrt{\frac{2QS^2+1}{2Q}}, \tag{3.2.14}$$

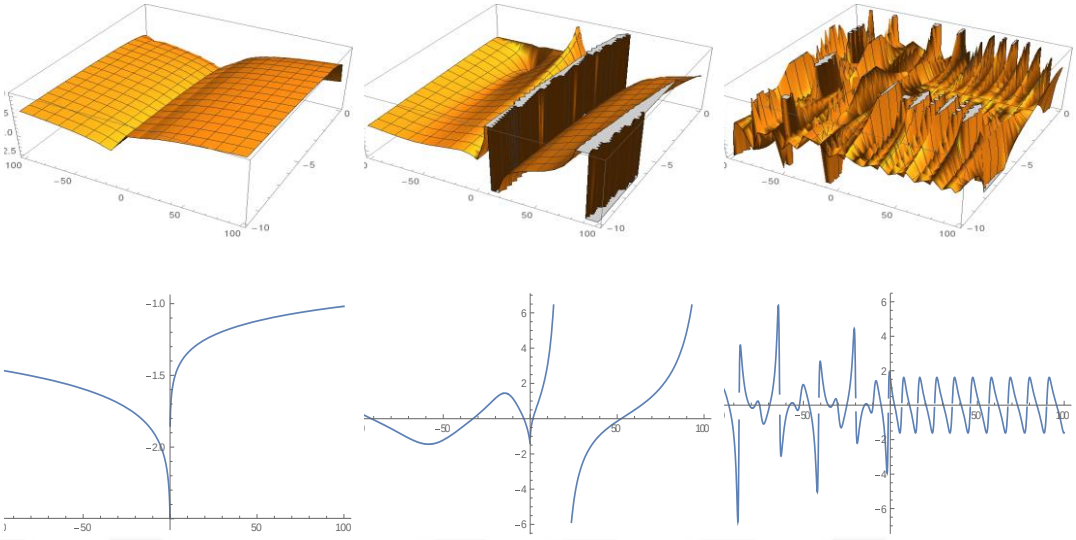
katsayıları için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_4(\eta_3) = c_1\frac{F'(\eta_3)}{F(\eta_3)},\quad \eta_3 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{Tt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.2.15}$$

şeklindedir. $B_3 = \pm i\sqrt{\frac{6}{1+m^2}}$ ve $\eta_3 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \pm \sqrt{\frac{S^2(2m^2+2)-1}{2m^2+2}}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere, kompleks dönüşümü altında (3.2.1) denkleminin tam çözümü

$$v_4(\eta_3) = B_3\, cs(\eta_3)\, dn(\eta_3), \tag{3.2.16}$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.6. (3.2.16) çözüm fonksiyonunun $m = S = 0.5$ ile $\alpha = 0.1,\ 0.5,\ 0.9$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Durum 5:

$$a_0 = 0,\ a_1 = \pm\sqrt{\frac{6P}{Q - 6\sqrt{PR}}},\ b_1 = \pm\sqrt{\frac{6R}{Q - 6\sqrt{PR}}},$$

$$c_1 = \pm\sqrt{\frac{6}{Q - 6\sqrt{PR}}}, T = \pm\sqrt{\frac{S^2\left(Q - 6\sqrt{PR}\right) + 2}{Q - 6\sqrt{PR}}}, \qquad (3.2.17)$$

elde edilen katsayılar için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_5(\eta_4) = a_1 F(\eta_4) + b_1 F^{-1}(\eta_4) + c_1 \frac{F'(\eta_4)}{F(\eta_4)}, \quad \eta_4 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{Tt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \qquad (3.2.18)$$

şeklindedir. $B_4 = \pm i\sqrt{\frac{6}{m^2 + 6m + 1}}$ ve $\eta_4 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \pm \sqrt{\frac{S^2\left(m^2 + 6m + 1\right) - 2}{m^2 + 6m + 1}} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$

olmak üzere, dönüşümü altında (3.2.1) denkleminin birleşik Jakobi eliptik fonksiyon çözümü aşağıdaki gibi bulunur

$$v_5(\eta_4) = B_4\left(cs(\eta_4)\,dn(\eta_4) + m\,sn(\eta_4) + ns(\eta_4)\right). \qquad (3.2.19)$$

3.2.2. Yeni versiyon F- açılım yönteminin uygulaması

Uzay ve zaman kesirli sine-Gordon denklemine bölüm 3.2 de önerdiğimiz yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yönetimi uygulanmıştır. (2.7) de ifade edilen yeni çözüm fonksiyonuna göre denklemin tam çözümleri için 3.2.1 bölümünde elde edilenlerden farklı olanlar belirtilmiştir. Balans prosedürü hesaplandığında, yine $N=1$ olarak tespit edilmiştir. Bulunan bu dengeleme terimine göre (3.2.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonu

$$v(\eta)=a_0+a_1F(\eta)+b_1F^{-1}(\eta)+c_1\frac{F'(\eta)}{F(\eta)}+d_1\frac{F(\eta)}{F'(\eta)}, \tag{3.2.20}$$

şeklinde ifade edilir. (3.2.20) ifadesi kullanılarak, (3.2.3) denkleminde bulunan ilgili türevler hesaplanıp, bunlar (3.2.3) de yerine yazıldığında yine $F'^{i}(\eta)F^{j}(\eta)(i=0,1;\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı bir polinom denklem bulunur. İlgili katsayıların bulunabilmesi için elde edilen polinom sıfıra eşitlenip, oluşan cebirsel denklem sistemi yazılan kodlara göre çözülür. Elde edilen katsayılar ile η ters dönüşümü altında aşağıda belirtilen yeni Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri bulunmuştur.

Durum 1:

$$a_0=a_1=b_1=c_1=0,\ d_1=\pm\sqrt{\frac{6\left(Q^2-4PR\right)}{Q}},\ T=\pm\sqrt{\frac{2QS^2+1}{2Q}}, \tag{3.2.21}$$

elde edilen katsayıları için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_6(\eta_4)=d_1\frac{F(\eta_4)}{F'(\eta_4)}, \tag{3.2.22}$$

formundadır. $B_5=\pm\left(1-m^2\right)i\sqrt{\frac{6}{m^2+1}}$ olmak üzere, (3.2.1) denkleminin çoklu Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$v_6(\eta_4) = B_5\, sc(\eta_4)\, nd(\eta_4), \tag{3.2.23}$$

olarak elde edilir.

Durum 2:

$$a_0 = a_1 = b_1 = 0,\ c_1 = \pm\sqrt{\frac{6}{3\sqrt{Q^2 - 4PR} + Q}},\ d_1 = \pm\sqrt{\frac{6\left(Q^2 - 4PR\right)}{3\sqrt{Q^2 - 4PR} + Q}},$$

$$T = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8S^2\left(2Q^2 - 9PR\right) + 3\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q}{4Q^2 - 18PR}}, \tag{3.2.24}$$

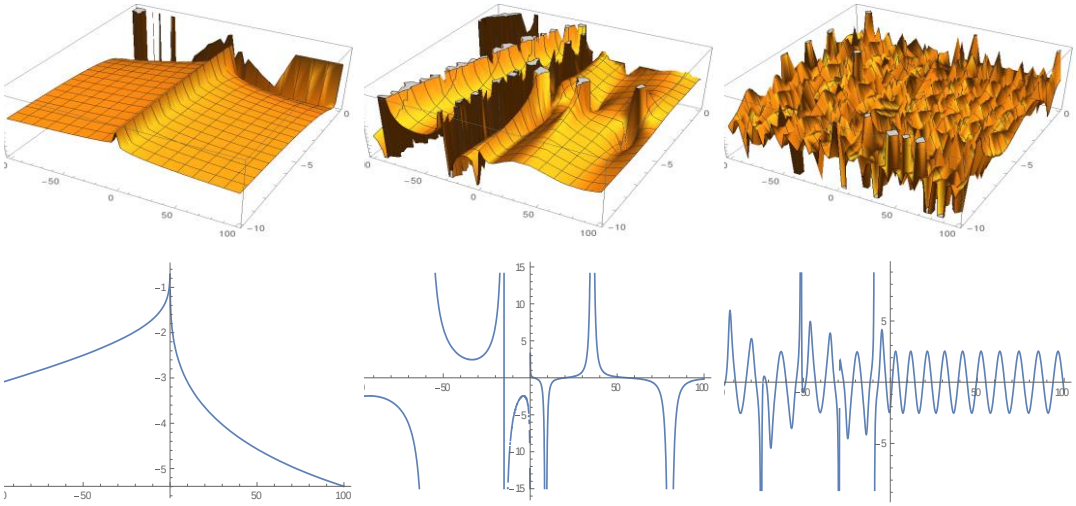
katsayıları için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_7(\eta_5) = a_1 F(\eta_5) + b_1 F^{-1}(\eta_5) + c_1\frac{F'(\eta_5)}{F(\eta_5)}, \quad \eta_5 = \frac{Sx^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{Tt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.2.25}$$

şeklindedir. $B_6 = \pm\sqrt{\frac{3}{1-2m^2}}$ ve $\eta_5 = \frac{Sx^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \pm \sqrt{\frac{S^2\left(2m^2-1\right)-1}{2m^2-1}}\,\frac{t^{\alpha}}{2\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere, kompleks dönüşümü altında (3.2.1) denkleminin birleşik Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$v_7(\eta_5) = B_6\left(cs(\eta_5)\, dn(\eta_5) + \left(1-m^2\right) sc(\eta_5)\, nd(\eta_5)\right), \tag{3.2.26}$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.7. (3.2.26) çözüm fonksiyonunun $m = S = 0.5$ ile $\alpha = 0.1,\ 0.5,\ 0.9$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

3.2.3. Yeni Tip F- açılım yönteminin uygulaması

En genel Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri veren yeni tip geliştirilmiş F-açılım yönetimi bölüm 3.2 de önerdiğimiz uzay ve zaman kesirli sine-Gordon denklemine uygulanmıştır. Bu yöntem sayesinde (2.12) de ifade edilen yeni çözüm fonksiyonuna göre denklemin tam çözümleri 3.2.2 bölümünde elde edilenlerin dışında belirtilmiştir. Dengeleme işlemi önerilen yeni çözüm fonksiyonuna göre hesaplandığında $N = 1$ bulunmuştur. Böylece (3.2.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonu

$$v(\eta) = a_0 + a_1 F(\eta) + b_1 F^{-1}(\eta) + c_1 \frac{F'(\eta)}{F(\eta)} + d_1 \frac{F(\eta)}{F'(\eta)} + \frac{e_1}{F'(\eta) F(\eta)}, \quad (3.1.27)$$

olarak ifade edilir. (3.1) denkleminin yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemi uygulanarak bulunan çözümlerin diğer yöntemlerden elde edilenlerin dışında kalan çözümleri belirtilmiştir.

Durum 1:

$$a_0 = a_1 = b_1 = c_1 = 0,\ d_1 = \pm\sqrt{\frac{6Q^2\sqrt{Q^2-4PR} - 9PR\sqrt{Q^2-4PR} - 21PQR + 6Q^3}{2Q^2 - 9PR}},$$

$$e_1 = \frac{\sqrt{Q^2-4PR}-Q}{2P},\quad T = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8S^2\left(2Q^2-9PR\right)+3\sqrt{Q^2-4PR}-Q}{4Q^2-18PR}}, \qquad (3.2.28)$$

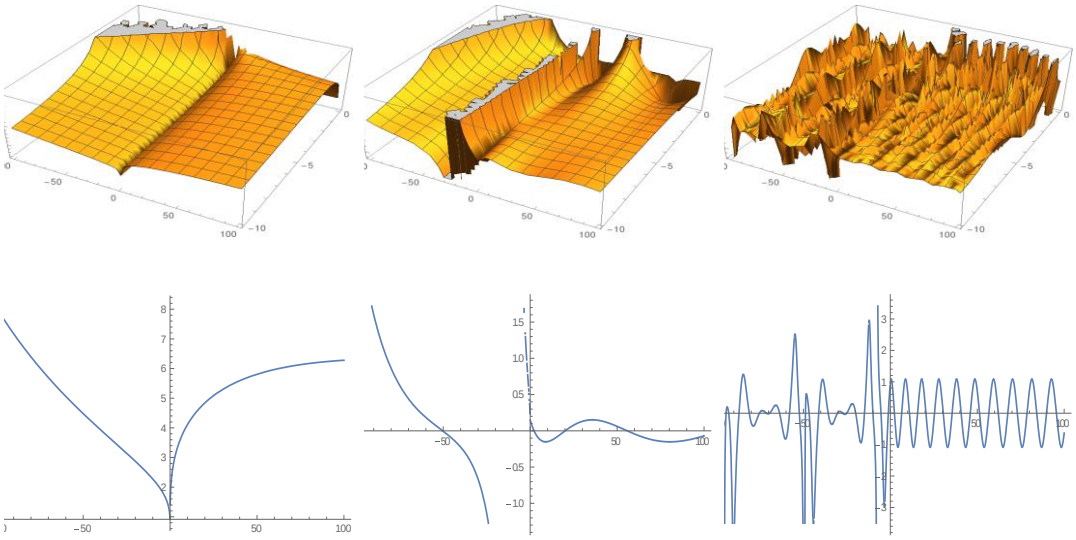
bulunan katsayıları için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_7(\eta_6) = d_1\frac{F(\eta_6)}{F'(\eta_6)} + \frac{e_1}{F'(\eta_6)F(\eta_6)},\quad \eta_6 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{Tt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \qquad (3.2.29)$$

şeklindedir. $B_7 = \pm\sqrt{\frac{6}{2-m^2}}$ olmak üzere, $\eta_6 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \pm \sqrt{\frac{S^2\left(2m^2-4\right)-1}{2m^2-4}}\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ dönüşümü altında (3.2.1) denkleminin çoklu birleşik Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$v_8(\eta_6) = \pm B_7\left(nc(\eta_6)nd(\eta_6)ns(\eta_6) + m^2 sn(\eta_6)nc(\eta_6)nd(\eta_6)\right), \qquad (3.2.30)$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.8. (3.2.30) çözüm fonksiyonunun $m = S = 0.5$ ile $\alpha = 0.1,\ 0.5,\ 0.9$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Durum 2:

$$a_0 = a_1 = b_1 = 0,\ c_1 = \pm i\sqrt{\frac{3}{Q}},\ d_1 = \pm i\sqrt{3Q},\ e_1 = \pm 2iR\sqrt{\frac{3}{Q}},\ T = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4QS^2-1}{Q}}, \tag{3.2.31}$$

katsayıları için (3.2.1) çözüm fonksiyonu

$$v_9(\eta_7) = c_1\frac{F'(\eta_7)}{F(\eta_7)} + d_1\frac{F(\eta_7)}{F'(\eta_7)} + \frac{e_1}{F'(\eta_7)F(\eta_7)}, \quad \eta_7 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{Tt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},$$

(3.2.32)

şeklindedir. $B_7 = \pm\sqrt{\frac{3}{m^2+1}}$ ve $\eta_6 = \frac{Sx^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \pm \sqrt{\frac{4S^2(m^2+1)+1}{m^2+1}}\frac{t^\alpha}{2\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere, dönüşümü altında (3.2.1) denkleminin çoklu dejenere olmayan Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$v_9(\eta_7) = B_8\left(2nc(\eta_7)nd(\eta_7)ns(\eta_7) + cs(\eta_7)dn(\eta_7) + (m^2+1)sc(\eta_7)nd(\eta_7)\right), \tag{3.2.33}$$

bulunur.

3.3. Uzay ve Zaman-Kesirli Kübik Schrödinger Denklemi ve Uygulamaları

Bu kısımda genel hali

$$i\frac{\partial^\alpha w}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^{2\beta} w}{\partial x^{2\beta}} + 2|w|^2 w = 0, \qquad t > 0,\ 0 < \alpha, \beta \le 1, \tag{3.3.1}$$

şeklinde olan lineer olmayan uzay ve zaman kesirli kübik Schrödinger denkleminin verilen yöntemlere uygulamaları verilmiştir. Burada w denklemi sağlayan, x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir fonksiyon, α ve β ise w fonksiyonun kesirli mertebeden türevi olarak verilmiştir. Bu denklem kuantum mekaniğinde bazı dinamik sistemleri ve akışkanlar dinamiğinde lineer olmayan dinamik sistemleri temsil eder. (3.1.1) denklemine verilen F-açılım yöntemlerini uygulayabilmek için öncelikle aşağıdaki yürüyen dalga dönüşümü

$$w(x,t)=e^{i\theta}w(\xi),\quad \theta=\frac{Mx^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}+\frac{Ht^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)},\quad \xi=\frac{Yx^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}+\frac{Zt^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.3.2}$$

ele alınabilir. Bu dönüşüme göre ilgili türevler alındığında ve (3.3.1) denkleminde alınan türevler yerine konulup, reel ve imajiner kısım şeklinde ayrı denklemler olarak yazıldığında $w=w(\xi)$ ve $\frac{\partial w}{\partial \xi}=w'$ olmak üzere, (3.3.1) denklemi

$$-Hw(\xi)-M^{2}w(\xi)+Y^{2}w''(\xi)+2w^{3}(\xi)=0, \tag{3.3.3}$$

$$Zw'(\xi)+2MYw'(\xi)=0. \tag{3.3.4}$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklem sistemine indirgenir. (3.3.4) eşitliğinin her iki tarafının ξ değişkenine göre integrali alınıp ve oluşan integral sabitini sıfır olarak seçildiğinde $M=-\frac{Z}{2Y}$ bulunur. (3.3.4) 'te bulunan bu eşitlik (3.3.3) 'te kullanılırsa

$$\left(-4HY^{2}-Z^{2}\right)w(\xi)+8Y^{2}w^{3}(\xi)+4Y^{5}w''(\xi)=0, \tag{3.3.5}$$

şeklinde 2. mertebeden bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (3.3.5) de ifade edilen adi diferansiyel denkleminin çözümünü bulabilmek için bölüm 2.1 de belirtilen geliştirilmiş F-açılım yöntemine uygulayalım.

3.3.1. Geliştirilmiş F- açılım yönteminin uygulaması

Lineer olmayan uzay ve zaman kesirli kübik Schrödinger denkleminin geliştirilmiş F-açılım yöntemine göre önerilen çözüm fonksiyonu (2.4) de belirtilmiştir. Buna göre hesaplanan dengeleme işlemi sonucunda $N=1$ olarak elde edilmiştir. Böylece (3.3.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonunun genel hali

$$w(\xi)=a_{0}+a_{1}F(\xi)+b_{1}F^{-1}(\xi)+c_{1}\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}, \tag{3.3.6}$$

şeklinde yazılır. Benzer hesaplama tekniği dikkate alınarak, oluşturulan koda göre çözüm yapıldığında Jakobi eliptik fonksiyonlar cinsinden aşağıda belirtilen durumlardaki çözümler bulunmuştur.

Durum 1:

$$a_0 = b_1 = c_1 = 0,\ a_1 = \pm iY\sqrt{YP},\ Z = \pm 2Y\sqrt{Y^3Q - H}, \tag{3.3.7}$$

bulunan katsayıları için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_1(\xi_1) = a_1 F(\xi_1),\quad \theta_1 = \frac{Mx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ \xi_1 = \frac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Zt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.3.8}$$

şeklindedir. $C_1 = \pm iY^{3/2}$, olmak üzere, $\theta_1 = \mp \dfrac{i\sqrt{H + Y^3(1+m^2)}x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \dfrac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ ve $\xi_1 = \dfrac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \pm \dfrac{2\sqrt{H - Y^2\left(Y^3(1+m^2)\right)}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ kompleks dönüşümü altında (3.3.1) denkleminin tam çözümü

$$w_1(\xi_1) = C_1 m e^{i\theta_1}\, sn(\xi_1), \tag{3.3.8}$$

olarak elde edilir.

Durum 2:

$$a_0 = a_1 = c_1 = 0,\ b_1 = \pm iY\sqrt{YR},\ Z = \pm 2Y\sqrt{Y^3Q - H}, \tag{3.3.9}$$

elde edilen katsayıları için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_2(\xi_1) = a_1 F(\xi_1), \tag{3.3.10}$$

şeklindedir. (3.3.1) denkleminin analitik çözümü

$$w_2(\xi_1) = C_1 m e^{i\theta_1}\, ns(\xi_1), \tag{3.3.11}$$

şeklinde bulunur.

Durum 3:

$$a_0 = c_1 = 0,\ a_1 = \pm iY\sqrt{YP},\ \ b_1 = \pm iY\sqrt{YR},\ Z = \pm 2Y^2\sqrt{Y^3\left(Q^2 - 6\sqrt{PR}\right) - H}, \quad (3.3.12)$$

katsayıları için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_3(\xi_2) = a_1 F(\xi_2), \quad \theta_2 = \frac{Mx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ \ \xi_2 = \frac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Zt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad (3.3.13)$$

şeklindedir. $\theta_2 = \mp\dfrac{iY\sqrt{H + Y^3\left(1+m^2+6m\right)}x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \dfrac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ ve $\xi_2 = \dfrac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \pm \dfrac{2Y^2\sqrt{H - Y^3\left(1+m^2+6m\right)}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere kompleks dönüşümü altında (3.3.1) denkleminin Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$w_3(\xi_2) = C_1 e^{i\theta_2}\left(m\ sn(\xi_2) + ns(\xi_2)\right), \quad (3.3.14)$$

olarak elde edilir.

Durum 4:

$$a_0 = a_1 = b_1 = 0,\ \ c_1 = \pm iY\sqrt{Y},\ \ Z = \pm 2iY\sqrt{2Y^3Q + H}, \quad (3.3.15)$$

elde edilen katsayıları için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_4(\xi_3) = c_1\frac{F'(\xi_3)}{F(\xi_3)}, \quad \theta_3 = \frac{Mx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ \ \xi_3 = \frac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Zt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},$$

(3.3.16)

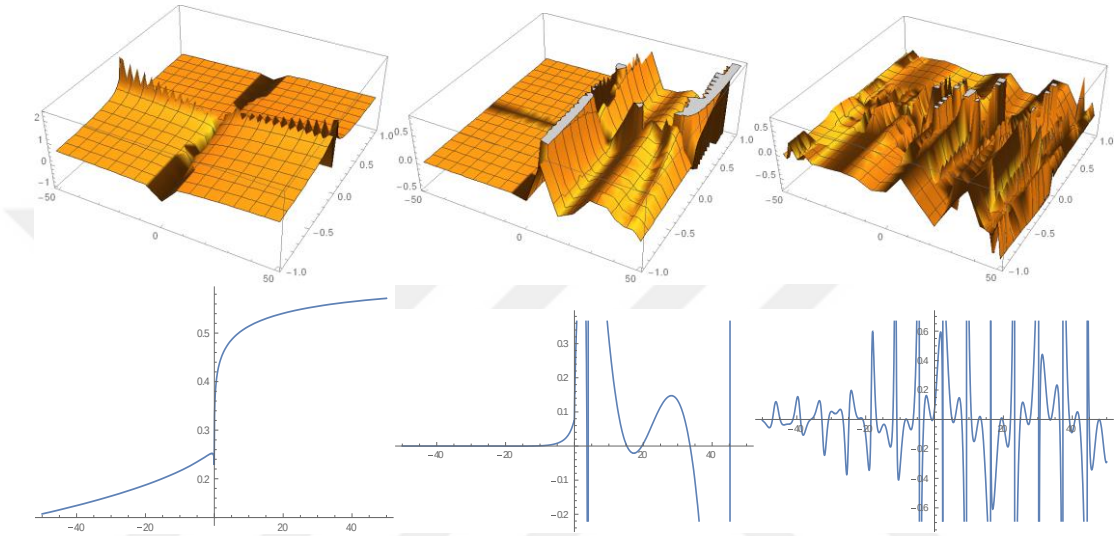
şeklindedir.

$$\theta_3 = \mp\frac{i\sqrt{H - 2Y^3\left(1+m^2\right)}x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ \xi_3 = \frac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \pm \frac{2iY\sqrt{H - 2Y^3\left(1+m^2\right)}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

olmak üzere kompleks dönüşümü uygulandığında (3.3.1) denkleminin yeni tam çözümü

$$w_3(\xi_3) = C_1 m e^{i\theta_3} cs(\xi_3) dn(\xi_3), \tag{3.3.17}$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.9. (3.3.17) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1,\ 0.55,\ 0.99$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Durum 5:

$$a_0 = 0,\ a_1 = \pm\frac{1}{2} iY\sqrt{YP},\ b_1 = i\frac{1}{2} Y\sqrt{YR},\ c_1 = \pm\frac{1}{2} iY\sqrt{Y}, Z = \pm iY\sqrt{4H + 2Y^3\left(Q + 6\sqrt{PR}\right)}, \tag{3.3.18}$$

katsayıları için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_5(\xi_4) = a_1 F(\xi_4) + b_1 F^{-1}(\xi_4) + c_1 \frac{F'(\xi_4)}{F(\xi_4)}, \theta_3 = \frac{Mx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ \xi_3 = \frac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Zt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \tag{3.3.19}$$

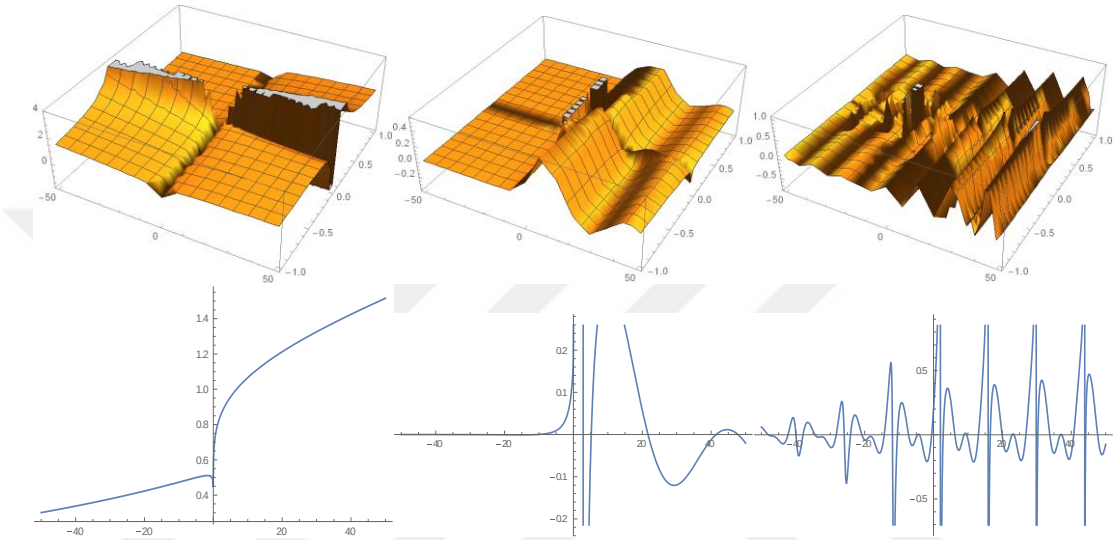
şeklindedir. $C_2 = \pm\dfrac{iY\sqrt{Y}}{2}$, $\theta_4 = \mp\dfrac{i\sqrt{4H - 2Y^3\left(1 + m^2 - 6m\right)}x^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \dfrac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ ve

$\xi_4 = \dfrac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \pm \dfrac{iY\sqrt{4H - 2Y^3\left(1 + m^2 - 6m\right)}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ olmak üzere mevcut dönüşümü

uygulanırsa (3.3.1) denkleminin birleşik dejenere olmayan Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$w_5(\xi_4) = C_2\, e^{i\theta_4}\left(m\ sn(\xi_4) + ns(\xi_4) + cs(\xi_4)\, dn(\xi_4)\right), \tag{3.3.20}$$

bulunur.



Şekil 3.10. (3.3.20) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1,\ 0.55,\ 0.99$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

3.3.2. Yeni versiyon F- açılım yönteminin uygulaması

Bölüm 2.2 de önerdiğimiz yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yönetimi lineer olmayan uzay ve zaman kesirli kübik Schrödinger denklemine uygulanmıştır. Bu yönteme göre önerilen çözüm fonksiyonu (2.7) ifadesinde olduğu gibidir. Buna göre balanstan hesaplanan dengeleme terimi $N = 1$ olarak bulunmuştur. Bu durumda (3.3.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonunun genel hali

$$w(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) + b_1 F^{-1}(\xi) + c_1 \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} + d_1 \frac{F(\xi)}{F'(\xi)}, \tag{3.3.21}$$

şeklindedir. (3.3.21) ifadesindeki çözüm fonksiyonundan hareketle (3.3.5) denkleminde yer alan ilgili ifadeler hesaplanıp, yerine yazıldığında Jakobi eliptik fonksiyonlarına bağlı bir polinom denklemi bulunur. Oluşturulan cebirsel denklem

sisteminin çözümünden bulunması gereken ilgili katsayılar hesaplanır ve Jakobi eliptik fonksiyonuna bağlı çözümler aşağıda ifade edilmiştir.

Durum 1:

$$a_0 = a_1 = b_1 = c_1 = 0,\ d_1 = \pm iY\sqrt{Y\left(Q^2 - 4PR\right)},\ \ Z = \pm 2iY\sqrt{2Y^3Q + H}, \tag{3.3.22}$$

hesaplanan katsayılar için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_6\left(\xi_3\right) = d_1\frac{F\left(\xi_3\right)}{F'\left(\xi_3\right)}, \tag{3.3.23}$$

şeklindedir. $C_3 = \pm iY\sqrt{Y}\left(m^2 - 1\right)$ olmak üzere, (3.3.1) denkleminin yeni tam çözümü

$$w_6\left(\xi_3\right) = C_3\, e^{i\theta_3}\, sc\left(\xi_3\right) nd\left(\xi_3\right), \tag{3.3.24}$$

olarak elde edilir.

Durum 2:

$$a_0 = a_1 = b_1 = 0,\ c_1 =, \pm iY\sqrt{Y},\ d_1 = \pm iY\sqrt{Y\left(Q^2 - 4PR\right)},\ \ Z = \pm 2iY\sqrt{H + 2Y^3\left(Q + 3\sqrt{Q^2 - 4PR}\right)}, \tag{3.3.25}$$

elde edilen katsayılar için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_7\left(\xi_5\right) = c_1\frac{F'\left(\xi_5\right)}{F\left(\xi_5\right)} + d_1\frac{F\left(\xi_5\right)}{F'\left(\xi_5\right)}, \theta_5 = \frac{Mx^\beta}{\Gamma\left(1+\beta\right)} + \frac{Ht^\alpha}{\Gamma\left(1+\alpha\right)},\ \ \xi_5 = \frac{Yx^\beta}{\Gamma\left(1+\beta\right)} + \frac{Zt^\alpha}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}, \tag{3.3.26}$$

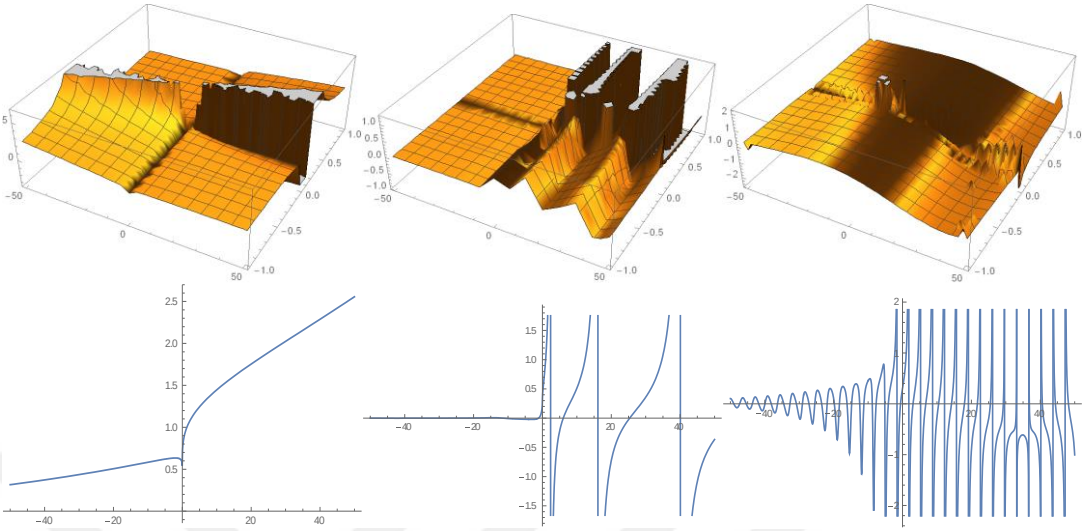
şeklindedir.

$$\theta_5 = \mp\frac{i\sqrt{H + 4Y^3\left(m^2 - 2\right)}x^\beta}{2\Gamma\left(1+\beta\right)} + \frac{Ht^\alpha}{\Gamma\left(1+\alpha\right)},\ \ \xi_5 = \frac{Yx^\beta}{\Gamma\left(1+\beta\right)} \pm \frac{2iY\sqrt{H + 4Y^3\left(m^2 - 2\right)}t^\alpha}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}$$

dönüşümü altında (3.3.1) denkleminin çoklu birleşik Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$w_7\left(\xi_5\right) = e^{i\theta_5}\left(C_1 cs\left(\xi_5\right) dn\left(\xi_5\right) + C_3 sc\left(\xi_5\right) nd\left(\xi_5\right)\right), \tag{3.3.27}$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.11. (3.3.27) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1,\ 0.55,\ 0.99$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

3.3.3. Yeni Tip F- açılım yönteminin uygulaması

Bu kısımda yeni tip geliştirilmiş F-açılım yönetimini sayesinde uzay ve zaman kesirli Kübik Schrödinger denkleminin en genel Jakobi eliptik fonksiyon çözümleri bulunmuştur. (2.12) de ifade edilen yeni çözüm fonksiyonuna göre denklemin tam çözümlerini 3.2.2 bölümünde elde edilenlerin dışındakiler belirtilmiştir. Önerilen bu yeni çözüm fonksiyonuna göre balans prosedürü hesaplandığında $N = 1$ olarak bulunmuştur. Böylece bulunan bu dengeleme terimi (2.12) denkleminde yerine yazıldığında (3.3.1) denklemin yeni çözüm fonksiyonu

$$w(\xi) = a_0 + a_1 F(\xi) + b_1 F^{-1}(\xi) + c_1 \frac{F'(\xi)}{F(\xi)} + d_1 \frac{F(\xi)}{F'(\xi)}, + \frac{e_1}{F'(\xi)F(\xi)}, \quad (3.3.28)$$

olarak ifade edilir. (3.1) denkleminin yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemi uygulanarak bulunan çözümler aşağıda belirtilmiştir.

Durum 1:

$$a_0 = a_1 = b_1 = c_1 = 0,\ d_1 = \pm iY\sqrt{\frac{Y\left(Q^2 - 2PR + Q\sqrt{Q^2 - 4PR}\right)}{2}},$$

$$e_1 = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q}{2P},\quad Z = \pm 2iY\sqrt{H + Y^3\left(3\sqrt{Q^2 - 4PR} - Q\right)}, \quad (3.3.29)$$

elde edilen katsayıları için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_8(\xi_6) = d_1\frac{F(\xi_6)}{F'(\xi_6)} + \frac{e_1}{F'(\xi_6)F(\xi_6)},\ \theta_6 = \frac{Mx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ \xi_6 = \frac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} + \frac{Zt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad (3.3.30)$$

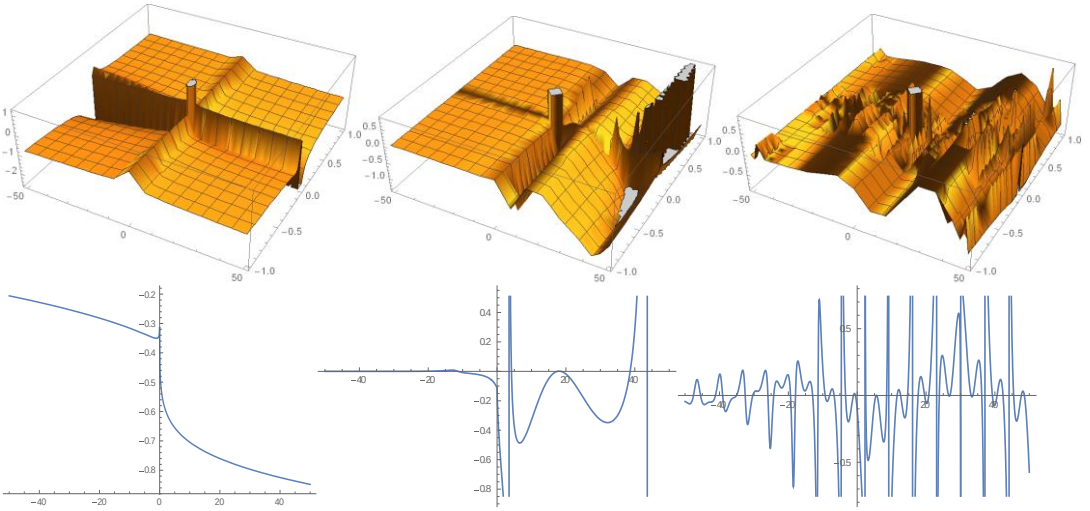
şeklindedir.

$$\theta_6 = \mp\frac{i\sqrt{H + 2Y^3\left(2m^2 - 1\right)}x^\beta}{2\Gamma(1+\beta)} + \frac{Ht^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)},\ \xi_5 = \frac{Yx^\beta}{\Gamma(1+\beta)} \pm \frac{2iY\sqrt{H + 2Y^3\left(2m^2 - 1\right)}t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

dönüşümü kullanılarak (3.3.1) denkleminin birleşik dejenere olmayan Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$w_8(\xi_6) = C_1 e^{i\theta_6}\left(ns(\xi_6)nc(\xi_6)nd(\xi_6) + m^2 sc(\xi_6)nd(\xi_6)\right), \quad (3.3.31)$$

olarak bulunur.



Şekil 3.12. (3.3.31) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1,\ 0.55,\ 0.99$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi

Durum 2:

$$a_0 = a_1 = b_1 = 0,\ c_1 = \pm iY\sqrt{Y},\quad d_1 = \pm\frac{iY\sqrt{Y}\left(\sqrt{Q^2-4PR}-Q\right)}{2},$$

$$e_1 = \pm iYR\sqrt{Y},\quad Z = \pm 2Y\sqrt{\frac{12PRY^3+\left(4Y^3Q-H\right)\left(\sqrt{Q^2-4PR}-Q\right)}{\sqrt{Q^2-4PR}-Q}}, \qquad (3.3.32)$$

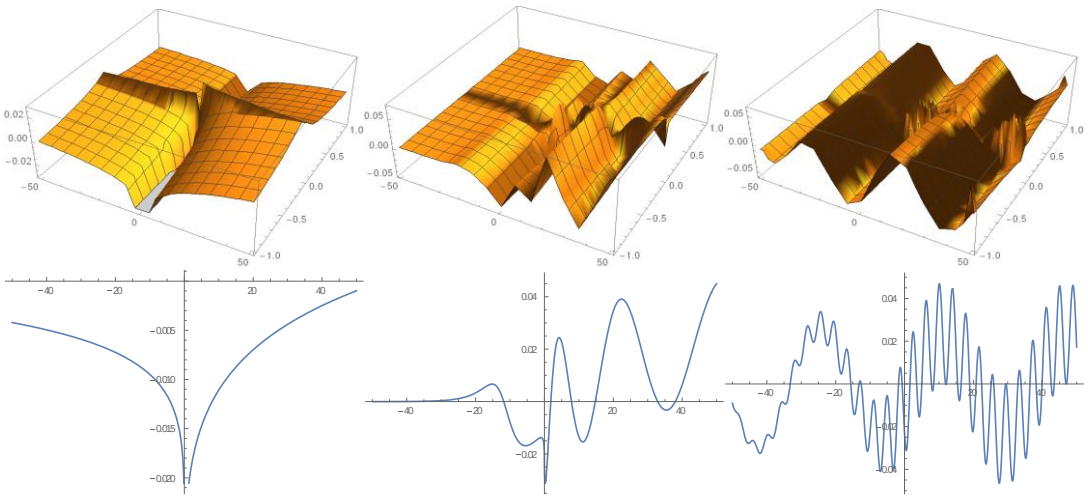
katsayıları için (3.3.1) denklemin çözüm fonksiyonu

$$w_9\left(\xi_6\right) = C_1\frac{F'\left(\xi_6\right)}{F\left(\xi_6\right)} + d_1\frac{F\left(\xi_6\right)}{F'\left(\xi_6\right)} + \frac{e_1}{F'\left(\xi_6\right)F\left(\xi_6\right)}, \qquad (3.3.33)$$

şeklindedir. (3.3.1) denkleminin çoklu Jakobi eliptik fonksiyon çözümü

$$w_9\left(\xi_6\right) = C_1 e^{i\theta_6}\left(ns\left(\xi_6\right)nc\left(\xi_6\right)nd\left(\xi_6\right) + cs\left(\xi_6\right)dn\left(\xi_6\right) + 2m^2 sc\left(\xi_6\right)nd\left(\xi_6\right)\right), \qquad (3.3.34)$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.13. (3.3.34) çözüm fonksiyonunun $m = Y = 0.5$, $H = -1$, $\alpha = 0.1$ ile $\beta = 0.1,\ 0.55,\ 0.99$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

4. NÜMERİK YÖNTEMİN UYGULAMASI

Bu bölümde literatürde var olan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere uygulanabilen varyasyonel iterasyon yönteminin bir uygulaması yapılmıştır. Yöntemin zaman kesirli Gardner denklemine uygulaması verilmiştir.

4.1. Zaman Kesirli Gardner Denklemi

Bu kısımda, zaman kesirli Gardner denklemini

$$D_t^{\alpha}u+6\left(u-\varepsilon^2u^2\right)u_x+u_{xxx}=0,\quad 0<\alpha\le 1 \tag{4.1.1}$$

şeklinde ele alalım. Bölüm 2.4'de verilen varyasyon iterasyonel yöntemini bu denkleme uygulayalım. İlk önce $0<\alpha\le 1$ verildiğinden Lagrange çarpanı $\lambda=-1$ olarak alınır. Diğer durumlarda $\lambda=(-1)^m\dfrac{(\tau-t)^{(m-1)\alpha}}{\Gamma\left(1+(m-1)\alpha\right)}$ olarak kullanılır. Bu denkleme karşılık gelen düzeltme fonksiyoneli

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+\int_0^t\lambda(\tau)\left(\frac{\partial^{\alpha}u_k(\tau)}{\partial\tau^{\alpha}}+6\left(u_k(\tau)-\varepsilon^2u_k^2(\tau)\right)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial^3u_k(\tau)}{\partial\tau^3}\right)d\tau, \tag{4.1.2}$$

olarak yazılır. Eğer Lagrange çarpanı $\lambda=-1$ olarak alındığında,

$$u_{k+1}(t)=u_k(t)+\int_0^t\left(\frac{\partial^{\alpha}u_k(\tau)}{\partial\tau^{\alpha}}+6\left(u_k(\tau)-\varepsilon^2u_k^2(\tau)\right)\frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial^3u_k(\tau)}{\partial\tau^3}\right)d\tau, \tag{4.1.3}$$

bulunur. (4.1.1) denkleminin başlangıç şartı $u(0)=1$ şeklinde alınırsa, $k=0$ için

$$\begin{aligned}u_1(t)&=u_0(t)+\int_0^t\left(\frac{\partial^{\alpha}u_0(\tau)}{\partial\tau^{\alpha}}+6\left(u_0(\tau)-\varepsilon^2u_0^2(\tau)\right)\frac{\partial u_0(\tau)}{\partial\tau}+\frac{\partial^3u_0(\tau)}{\partial\tau^3}\right)d\tau\\&=1-\int_0^t\frac{\partial^{\alpha}1}{\partial\tau^{\alpha}}d\tau-\int_0^t\left[6\left(1-\varepsilon^2\right)\frac{\partial 1}{\partial\tau}\right]d\tau-\int_0^t\left[\frac{\partial^3 1}{\partial\tau^3}\right]d\tau\\&=1-\int_0^t\frac{\partial^{\alpha}1}{\partial\tau^{\alpha}}d\tau\end{aligned}, \tag{4.1.4}$$

Leibniz kuralı (4.1.4) ifadesine uygulanırsa,

$$\int_0^t \frac{\partial^\alpha 1}{\partial \tau^\alpha} d\tau = \frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \int_0^t 1dt - f(t,y)v' + f(0,y)u'$$
$$= \frac{\partial^\alpha t}{\partial \tau^\alpha} - 1 \quad , \tag{4.1.5}$$
$$= \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - 1$$

elde edilir. Bulunan değer (4.1.4)'de yerine yazıldığında, denklemin yaklaşık çözümü

$$u_1(t) = 1 - \left(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} - 1 \right) = 2 - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \tag{4.1.6}$$

bulunur. (4.1.4) iterasyon formülünden $k = 1$ için ikinci yaklaşım

$$u_2(t) = u_1(t) - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha u_1(\tau)}{\partial \tau^\alpha} + 6\left(u_1(\tau) - \varepsilon^2 u_1^2(\tau)\right) \frac{\partial u_1(\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 u_1(\tau)}{\partial \tau^3} \right) d\tau$$
$$= u_1(t) - \int_0^t \frac{\partial^\alpha u_1(\tau)}{\partial \tau^\alpha} d\tau - \int_0^t \left[6\left(u_1(\tau) - \varepsilon^2 u_1^2(\tau)\right) \frac{\partial u_1(\tau)}{\partial \tau} \right] d\tau - \int_0^t \left[\frac{\partial^3 u_1(\tau)}{\partial \tau^3} \right] d\tau \tag{4.1.7}$$

olarak ifade edilir. Buradaki hesaplanması gereken integral işlemleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$I_1 = \int_0^t \frac{\partial^\alpha u_1(\tau)}{\partial \tau^\alpha} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \left(2 - \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \right) d\tau$$
$$= \int_0^t \frac{\partial^\alpha 2}{\partial \tau^\alpha} d\tau - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial^\alpha t^{1-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} d\tau \quad . \tag{4.1.8}$$

Leibniz kuralı gereği (4.1.8) ifadesindeki integral,

$$\int_0^t \frac{\partial^\alpha t^{1-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} d\tau = \frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \int_0^t t^{1-\alpha} dt - f(t,y)v' + f(0,y)u'$$
$$= \frac{1}{2-\alpha} \frac{\partial^\alpha t^{2-\alpha}}{\partial \tau^\alpha} - t^{1-\alpha} \tag{4.1.9}$$
$$= \frac{1}{2-\alpha} \frac{\Gamma(3-\alpha) t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)} - t^{1-\alpha}$$

bulunur. $z\Gamma[z]=\Gamma[z+1]$ özdeşliğinden yararlanarak (4.1.9) ifadesindeki integral $\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(3-2\alpha)}t^{2-2\alpha}-t^{1-\alpha}$ olarak elde edilir. Böylece (4.1.8) ifadesi

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\left(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-1\right)-\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(3-2\alpha)}t^{2-2\alpha}-t^{1-\alpha}\right) \\ &= 2\left(\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-1\right)-\frac{t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\ &= 3\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-\frac{t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}-2 \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^t\left[6\left(u_1(\tau)-\varepsilon^2u_1^2(\tau)\right)\frac{\partial u_1(\tau)}{\partial\tau}\right]d\tau \\ &= \int_0^t 6\left(u_1(\tau)u_1'(\tau)-\varepsilon^2u_1^2(\tau)u_1'(\tau)\right)d\tau \\ &= \int_0^t\left(3\left(u_1^2\right)'(\tau)-2\varepsilon^2\left(u_1^3\right)'(\tau)\right)d\tau \\ &= 3u_1^2(\tau)-2\varepsilon^2u_1^3(\tau) \\ &= 3\left(2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^2-2\varepsilon^2\left(2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^3 \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

ve

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^t\frac{\partial^3u_1(\tau)}{\partial\tau^3}d\tau \\ &= \int_0^t\frac{\partial^3}{\partial\tau^3}\left(2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)d\tau \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

olarak bulunur.

Leibniz kuralı gereğince,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d^3}{dt^3}\int_0^t \left(2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)dt - f(t,y)v' + f(0,y)u' \\
&= \frac{d^3}{dt^3}\left(2t-\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)(2-\alpha)}\right)-\left(2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{d}{dt}\left(2t-\frac{t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}\right)\right]-2+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&= \frac{d^2}{dt^2}\left(2-\frac{(2-\alpha)t^{1-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\right)-2+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(2-\frac{(2-\alpha)t^{1-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)}\right)\right)-2+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&= \frac{d}{dt}\left(-(1-\alpha)\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)-2+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&= -(1-\alpha)(-\alpha)\frac{t^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-2+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \\
&= -2+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\alpha(1-\alpha)\frac{t^{-(1+\alpha)}}{\Gamma(2-\alpha)}
\end{aligned}
\tag{4.1.13}
$$

Bulunan I_1, I_2, I_3 değerlerini yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
u_2(t) &= 2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-\left(\frac{3t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}-\frac{t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}-2\right)-\left[3\left(2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^2-2\varepsilon^2\left(2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^3\right] \\
&\quad -\left(-2+\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\alpha(1-\alpha)\frac{t^{-(1+\alpha)}}{\Gamma(2-\alpha)}\right) \\
&= 6-\frac{4t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}+\frac{t^{2-2\alpha}}{\Gamma(3-2\alpha)}-3\left(2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^2+2\varepsilon^2\left(2-\frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right)^3-\frac{\alpha(1-\alpha)t^{-(1+\alpha)}}{\Gamma(2-\alpha)}
\end{aligned}
\tag{4.1.14}
$$

şeklinde $u_2(t)$ yaklaşık çözümü elde edilir. İterasyon benzer düşünceyle çoğaltılarak daha hashas sonuçlar bulunabilir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Jakobi eliptik fonksiyon çözümlerini içeren literatürde var olan geliştirilmiş F-açılım yöntemi ele alınmış ve bu yöntemin geliştirilmesiyle iki farklı yöntem olan yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yöntemi ile yeni tip geliştirilmiş F-açılım yöntemi literatüre kazandırılmıştır. Önerdiğimiz yöntemler lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin belirlenmesinde kullanılmıştır. Bu yöntemler, sırasıyla lineer olmayan kesirli mertebeden zaman kesirli Gardner, uzay ve zaman kesirli sine-Gordon ve uzay ve zaman kesirli kübik Schrödinger denklemlerine uygulanmıştır. Uygulanan denklemlerin çözümleri incelendiğinde; önerilen yöntemlerden yeni tip geliştirilmiş F-açılım yönteminin diğer yöntemlerden elde edilen çözümleri elde ettiği gibi daha farklı ve yeni çözümler bulduğu sonucuna varılmıştır. Literatürdeki diğer yöntemlerle önerilen yöntemler karşılaştırıldığında ise bu yöntemlerin diğer yöntemlerden farklı çözüm fonksiyonlarını yapılandırdığı görülmüştür. Ayrıca çözüm fonksiyonlarında yer alan keyfi parametre değerleri için iki ve üç boyutlu grafikler çizilerek, çözümlerin fiziksel davranışları belirlenmiştir. Mathematica paket programı bu yöntemlerin uygulanmasında kullanılan kodların oluşturulmasında kullanılmıştır. Ayrıca varyasyonel iterasyon yöntemi ele alınarak, lineer olmayan kesirli mertebeden zaman kesirli Gardner denkleminin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlara bakıldığında yeni versiyon geliştirilmiş F-açılım yöntemi ile yeni tip geliştirilmiş F-açılım yönteminin kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasında etkin olduğu görülmüştür. Literatürde yer almayan yeni ve farklı yürüyen dalga çözümleri her üç denklem için de bulunmuştur. Önerdiğimiz her iki yöntem de lineer olmayan kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin değişik formlarına uygulanabilir ve farklı sonuçların bulanabileceğini söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

1. Weilbeer, M., Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and Their Analytical Background, PhD Thesis, Von der Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät für Mathematik und Informatik der Technischen Universitat Braunschweig, Germany, 2005.

2. Lagrange, J. L.,. Sur une: Nouvelle Espèce de Calcul Relatif. A la Différentiation et a l'intégration des Quantités Variables, Gauthier-Villars, Paris, 1849.

3. Laplace, P. S., Théorie Analytique des Probabilités, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris, 1820.

4. Lacroix, S. F., Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral, Imprimeur-Libraire pour les sciences, Paris, 1819.

5. Liouville, J., M´emoire sur Quelques Questions de Géométrie et de Mécanique, et Sur un Nouveau Genre de Calcul Pour Résoudre Ces Questions, J. L Ecole Roy. Polytéchn., 13, 1-69, 1832.

6. Caputo, M., Linear Models of Dissipation whose Q is Almost Frequency Independent, II. Geophys. J. Royal Astr. Soc., 13, 529-539, 1967.

7. Cui M., Compact Finite Difference Method for the Fractional Diffusion Equation, J. Comput. Phys., 228(20), 7792-7804, 2009.

8. Huang Q., et. al., A Finite Element Solution for the Fractional Advection–Dispersion Equation, Adv. Water Resour., 31, 1578-1589, 2008.

9. Odibat Z., Momani S., Generalized Differential Transform Method for Linear Partial Differential Equations of Fractional Order, Appl. Math. Lett., 21(2), 194-199, 2008.

10. El-Sayed A.M.A., et. al., Adomian's Decomposition Method for Solving an Intermediate Fractional Advection-Dispersion Equation, Comput. Math. Appl., 59(5), 1759-1765, 2010.

11. Wu G.C., Lee E. W. M., Fractional Variational Iteration Method and Its Application, Phys. Lett. A, 374(25), 2506-2509, 2010.

12. Ganji, D.D., Sadighi A., He's Homotopy-Perturbation Method to Nonlinear Coupled Systems of Reaction Diffusion Equations, Int. J. Nonlin. Sci. Num. Simul., 7(4), 413-420, 2006.

13. Zhang S., Zhang H. Q., Fractional Sub-Equation Method and Its Applications to Nonlinear Fractional PDEs, Phys. Lett. A, 375, 1069-1073, 2011.

14. Wang M. L., Solitary Wave Solutions for Variant Boussinesq Equations, Phys. Lett. A, 199, 169-172, 1995.

15. Jumarie G., Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor series of Non Differentiable Functions Further Results, Comput. Math. Appl., 51, 1367-1376, 2006.

16. Jumarie G., Fractional Partial Differential Equations and Modified Riemann-Liouville Derivative New Methods for Solution, J. Appl. Math. Comput., 24, 31-48, 2007.

17. Guo S., et. Al., The Improved Fractional Sub-Equation Method and Its Applications to the Space-Time Fractional Differential Equations in Fluid Mechanics, Phys. Lett. A, 376, 407-411, 2012.

18. Lu B., Bäcklund Transformation of Fractional Riccati Equation and Its Aplications to Nonlinear Fractional Partial Differential Equations, Phys. Lett. A, 376, 2045-2048, 2012.

19. Bin Z., Qinghua F., The Jacobi Elliptic Equation Method for Solving Fractional Partial Differential Equations, Abst. Appl. Anal., 2014, Article ID 249071, 9 pages, 2014.

20. Pandir Y., Gurefe Y., Misirli E., The Extended Trial Equation Method for Some Time-Fractional Differential Equations, Disc. Dyn. Nat. Soc., 2013, Article ID 491359, 13 pages, 2013.

21. Pandir Y., Gurefe Y., New Exact Solutions of the Generalized Fractional Zakharov-Kuznetsov Equations, Life Sci. J**.,** 10(2), 2701–2705, 2013.

22. Zhao, Y. M., F-Expansion Method and Its Applications for Finding New Exact Solutions to the Kudryashov-Sinelshchikov Equation, J. Appl. Math., 2013, 90, Article ID 895760 7 pages, 2013.

23. Wang, M., Li, X., Applications of F-Expansion to Periodic Wave Solutions for a New Hamiltonian Amplitude Equation, Chaos Sol. Frac., 24, 1257-1268, 2005.

24. Abdou, M.A., Further Improved F-Expansion and New Exact Solutions for Nonlinear Evolution Equations, Nonlin. Dyn., 52, 227-288, 2008.

25. Zhang, J.L., et. al., The Improved F-Expansion Method and Its Applications, Phys. Lett. A, 350, 103-109, 2006.

26. Zhang, S., Xia, T., An Improved Generalized F-Expansion Method and Its Application to the (2 + 1)-dimensional KdV Equations, Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul.,13, 1294-1301, 2008.

27. Cai, G., et. al., A Modified F-Expansion Method for Solving Breaking Soliton Equation, Int. J. Nonlin. Sci. 2, 122-128, 2006.

28. Yang, K., Liu, J., The Extended F-Expansion Method and Exact Solutions of Nonlinear PDEs Chaos Sol. Frac., 22, 111-121, 2004.

29. Cai G., et. al., An Extended Generalized F-expansion Method for Solving d MKDV Equations, Int. J. Nonlin. Sci., 5(1), 51-57, 2008.

30. Yafeng X., et. al., A New Extended Jacobi Elliptic Function Expansion Method and Its Application to the Generalized Shallow Water Wave Equation, J. Appl. Math., 2012, Article ID 896738, 21 pages, 2012.

31. Zhang, S., et. al., A Generalized F-expansion Method and Its Application to (2 + 1)-dimensional Breaking Solition Equations, Int. J. Nonlin. Sci., 5, 25-32, 2008.

32. He, J. H., Approximate Analytical Solution for Seepage Flow with Fractional Derivatives in Porous Media, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 167, 57-68, 1998.

33. Iyiola O. S., Olayinka O. G., Analytical Solutions of Time-Fractional Models for Homogeneous Gardner Equation and Non-homogeneous Differential Equations, Ain Shams Eng. J. 5(3), 999–1004, 2014.

34. Jafari H., et. al., Fractional Sub-Equation Method for the Fractional Generalized Reaction Duffing Model and Nonlinear Fractional Sharma-Tasso-Olver Equation, Cent. Eur. J. Phys., 11(10), 1482–1486, 2013.

35. Hemida, K. M., et. al., Approximate Analytical Solution to the Time-Space Nonlinear Partial Fractional Differential Equations, Int. J. Pure Appl. Math., 78(2), 233-243, 2012.

36. Podlubny, I.,. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, USA, 1999

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Yozgat'ta doğan Hasan Hüseyin Düzgün, ilköğretimini Yozgat Atatürk İlköğretim okulunda tamamladı. Ortaöğretimini Sürmeli Lisesinde okudu. 2010 yılında kazandığı Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2013 yılında başarıyla tamamladı. 2013 yılında Yüksek Lisans eğitimine Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı' nda başladı. 2015 yılında 2. Lisans Eğitimi olarak Bozok Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Elektrik-Elektrik Mühendisliği Bölümüne başladı. Halen Yüksek Lisans ve Lisans eğitimini sürdürmektedir.

İletişim Bilgileri

Telefon: (554) 9056121

E-posta: hasanhduzgun@gmail.com

Yayınlar

1. Yusuf Pandir, Abdullah Sonmezoglu, **H. Huseyin Duzgun**, Nail Turhan, Exact solutions of nonlinear Schrödinger's equation by using generalized Kudryashov method, AIP Conference Proceedings, 1648, 370004, 1-6, 2015. **(ESCI)**
2. Yusuf Pandir, **H. Huseyin Duzgun**, New exact solutions for fractional Sine-Gordon equation by using the new version of generalized F-expansion method, AIP Conference Proceedings, 1738, 290020, 1-5, 2016. **(ESCI)**
3. Yusuf Pandir, **H. Huseyin Duzgun**, New exact solutions of time fractional Gardner equation by using new version of F-expansion method, Communications in Theoretical Physics, 67(1), 9-14, 2017. **(SCI)**

Bildiriler

1. Y. Ali Tandogan, **H. Hüseyin Duzgun**, Nail Turhan, Yusuf Pandir, New Generalized Kudryashov Method and its Application, 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA), Vienna, Austria, August 25–28 2014.
2. Yusuf Pandir, Abdullah Sonmezoglu, **H. Huseyin Duzgun**, Nail Turhan, Exact Solutions of Nonlinear Schrödinger's Equation by Using Generalized Kudryashov Method, 12th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), Rhodes, Greece, September 22–28 2014.
3. Yusuf Pandir, **H. Huseyin Duzgun**, New exact solutions for fractional Sine-Gordon equation by using the new version of generalized F-expansion method, 13th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM), Rhodes, Greece, September 23–29 2015.