T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$\left(\frac{G'}{G}\right)$-AÇILIM YÖNTEMLERİ İLE (2+1) BOYUTLU KIRILMA SOLİTON DENKLEMLERİNİN SOLİTON VE DİĞER ÇÖZÜMLERİ

ABDULLAH PAKSOY

Tez Danışmanı

Doç. Dr. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

YOZGAT - 2021

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$\left(\frac{G'}{G}\right)$-AÇILIM YÖNTEMLERİ İLE (2+1) BOYUTLU KIRILMA SOLİTON DENKLEMLERİNİN SOLİTON VE DİĞER ÇÖZÜMLERİ

ABDULLAH PAKSOY

Tez Danışmanı

Doç. Dr. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

YOZGAT - 2021

Her hakkı saklıdır

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İMZA
Abdullah PAKSOY
……/……/……

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

$\left(\frac{G'}{G}\right)$- AÇILIM YÖNTEMLERİ İLE (2+1) BOYUTLU KIRILMA SOLİTON DENKLEMLERİNİN SOLİTON VE DİĞER ÇÖZÜMLERİ

ABDULLAH PAKSOY

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI:Doç. Dr. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

Birinci bölümde soliton tanım ve kullanım alanları ile ilgili bilgiler verilmiştir.
İkinci bölümde $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodu tanıtılmış ve çeşitleri açıklanmıştır.
Üçüncü bölümde $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım metodu ile (2+1) boyutlu kırılma soliton denklemlerinin soliton ve diğer çözümleri verilmiştir.

2021, 43 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER:(2+1) Boyutlu Kırılma Soliton Denklemleri, $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu

ABSTRACT

MASTER THESIS

SOLITON AND OTHER SOLUTIONS OF (2+1)-DIMENSIONAL FRACTURE SOLITON EQUATİONS BY $\left(\frac{G'}{G}\right)$-EXPANSION METHODS

ABDULLAH PAKSOY

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATİCS

SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

In the first section information about soliton's definition and its usage ise given.
In the second section the $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method is introduced and its types are explained.
In the third section soliton and other solitons of (2+1) dimensional breaking soliton equations are given by the $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method.

2021, 43 PAGE

KEYWORDS:(2+1) Dimensional Breaking Soliton Solutions, $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Expansion Method

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na, tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ABDULLAH PAKSOY

…../…./……

İÇİNDEKİLER

sayfa

ÖZET ..... **iv**

ABSTRACT ..... **v**

ÖNSÖZ ..... **vi**

İÇİNDEKİLER ..... **vii**

KISALTMALAR VE SİMGELERİN LİSTESİ ..... **viii**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ ..... **ix**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Temel Tanımlar 1

1.1.1. Diferansiyel Denklemler 1

1.1.2. Soliton Kavramı 2

2.$\left(\frac{G'}{G}\right)$-AÇILIM METODU **4**

2.1. Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ − Açılım Metodu 4

2.2. Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu 7

2.3. Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu 8

3. $\left(\frac{G'}{G}\right)$-AÇILIM METODU İLE (2+1) BOYUTLU KIRILMA SOLİTON DENKLEMLERİNİN SOLİTON VE DİĞER ÇÖZÜMLERİ **11**

3.1. (2+1) Boyutlu Kırılma Soliton Denklemlerinin Kesin Çözümleri 11

4. SONUÇ VE ÖNERİLER **30**

KAYNAKÇA **31**

EK - 1 ..... **35**

EK – 2 ..... **36**

EK – 3 ..... **36**

ÖZGEÇMİŞ

KISALTMALAR VE SİMGELERİN LİSTESİ

Kdv denklemi **:** Korteweg de Vries denklemi
GKdV denklemi **:** Genelleştirilmiş Korteweg de Vries denklemi
vs. **:** vesaire

α **:** Alfa
β **:** Beta
γ **:** Gamma
Δ **:** Delta
ε **:** Epsilon
ζ **:** Zeta
η **:** İta
θ **:** Teta
λ **:** Lambda
μ **:** Mi
ξ **:** Xi
π **:** Pi
ρ **:** Ro
φ **:** Fi
Ψ **:** Psi
ω **:** Omega

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil 1.1. **:** Tek dalga (solitary wave)……3

1. GİRİŞ

1.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde diferansiyel denklemler ve solitonlar ile ilgili temel kavramlar ve özellikler verilmiştir.

1.1.1. Diferansiyel Denklemler

Doğa olaylarını açıklayan birçok yasa, olayların gerçekleştiği oranları veren ilişkilerdir. Diferansiyel kavramı sürekli değişen bir miktar ile değişim oranı arasındaki ilişkiyi temsil eder. Bu nedenle doğada gerçekleşen pek çok fiziksel olayın neticesinde ilişkiler matematiksel ifadelerle modellenerek bir diferansiyel denklemi ortaya çıkarır. Doğa bilimleri, farklı mühendislik bilimleri (fizik, kimya vb.) ve ekonomi bilimlerinde karşılaşılan problemlerin çözümlenebilmesi için; oluşturulan diferansiyel denklemlerin çözümüne ihtiyaç duyulur. Oluşturulan bu diferansiyel denklemlerin sonuçlarından bulduğumuz sonuç fonksiyonları fiziksel olayları anlamamıza fayda sağlar. Bu nedenle diferansiyel denklemler tüm bilimsel araştırmalarda oldukça önemlidir.

Tanım 1.1: Bağımsız değişkeni x, bilinmeyen fonksiyon (bağımlı değişken) $y = y(x)$

şeklinde düşünürsek bir adi diferansiyel denklem

$$\Upsilon\left(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilir. Kısaca bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerini içeren denklemlere diferensiyel denklem denir. Bilinmeyen fonksiyon bir bağımsız değişkene bağlı ise diferensiyel denkleme adi diferansiyel denklem, birden fazla bağımsız değişkene bağlı ise kısmi türevli diferansiyel denklem adı verilir (Yaşar,2005).

Kısmi türevli diferansiyel denklem ise bağımsız değişkenler $x, y, t, \dots$ ve bilinmeyen fonksiyon $u = u(x, y, t, \dots)$ alındığında

$$N\left(x, y, t, u, u_x, u_y, u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{tt}, u_{xy}, \dots\right) = 0 \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır (Yaşar,2005).

Tanım 1.2: Bir diferansiyel denklemin mertebesi denklemde bulunan en yüksek türevin mertebesine, diferansiyel denklemin derecesi ise o en yüksek mertebeli türevin derecesine denir (Koca,2001).

1.1.2. Soliton Kavramı

Soliter dalga kavramı ilk olarak 1834'te John Scott Russell tarafından ortaya atılmıştır. Russel, bu dalgayı, Union Channel'de (Edinburg-Glasgow kanalı) şeklini değiştirmeden uzun süre hareket edebilen bir su dalgası olarak gözlemlemiştir (Russel, 1845). Bu olayı ''Wave of Translation'' (büyük dalga kayması) olarak isimlendiren Russell, laboratuvar şartlarında benzer dalgalar elde ederek bu çalışmalarını yoğunlaştırmıştır. Elde ettiği sonuçları ''Reports on Wave'' (Dalgalar Üzerine Rapor) adlı çalışmasında açıklamıştır.

Russell, bulduğu sonuçları formüllendirerek;

u: tek dalganın hızı

g: yerçekimi ivmesi

a: maksimum genlik

h: sonlu derinlik;

$$u^2 = g(h + a) \tag{1.3}$$

ifadesini bulmuştur .

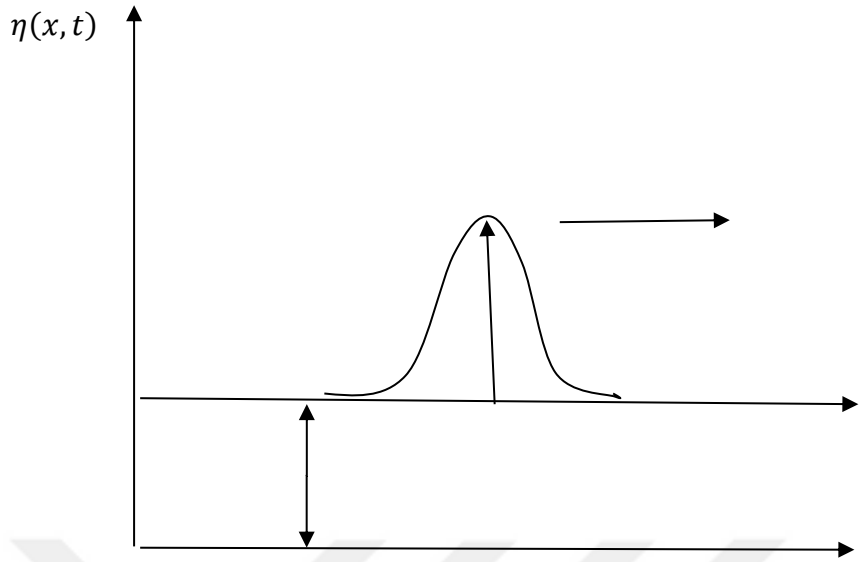
Soliter dalga profilini Şekil 1.1'deki gibi göstererek, herhangi bir $a > 0$ için;

$$z = \eta(x,t) \qquad \beta^2 = \frac{3a}{(4h^2(h+a))} \tag{1.4}$$

olmak üzere

$$\eta(x,t) = asech^2(\beta(x - ut)) \tag{1.5}$$

çözümünü bulmuşlardır.



Şekil 1.1 Tek dalga (Solitary wave)

2. $\left(\frac{G'}{G}\right)$-AÇILIM METODU

2.1. Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)-$ Açılım Metodu

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve sistemlerin analitik bulunması son zamanlarda birçok çalışmaya konu olmuştur. Bu çalışmalar sırasında birçok yöntem ortaya çıkmıştır. Bu yöntemler analitik ve nümerik olarak iki gruba ayrılır. Analitik yöntemlere örnek olarak; tanh-yöntemi (Abdusalam, 2005), Bäcklund dönüşümü (Rogers, Shadwick, 1986), homojen denge yöntemi (HBM) (Wang, Zhang, 2007), Riccati açılım yöntemi (He, 2000), Lie yaklaşım yöntemi (He, 2005), Jacobi eliptik fonksiyon açılım yöntemi (He, 2005), üstel fonksiyon yöntemi (Olivier, 1968), ters dağılım yöntemi (Liu, Fu, Liu ve Zhao, 2001), sine-cosine yöntemi (Parkes ,Duffy ve Abbott, 2002), Darboux açılımı (Babolian, Biazar ve Vahidi, 2005), Painleve açılımı (Khatami, Tolou, Rezvani ve Mahmoudi, 2008), F-açılım yöntemi (Zhang, 2008; Khuri, 2001), $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yöntemi (Ablowitz ve Clarkson, 1991) gibi yöntemler verilebilir. Nümerik yöntemlere ise örnek olarak; varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM) (Yan, 1996), homotopi pertürbasyon yöntemi (HPM) (Matveev ve Salle, 1991), Adomian ayrışım yöntemi (ADM) (Weiss, Tabor ve Garnavele, 1983; Liu ve Yang, 2004), homotopi analiz yöntemi (HAM) (Abdou, 2007), Laplace açılım yöntemi (LDM) (Liu , 2004), diferansiyel dönüşüm yöntemi (DTM) (Gu, Whu, Whang ve L-bi, 2015) gibi yöntemler verilebilir.

İlk defa Wang (Wang vd., 2008) , ve arkadaşları tarafından 2008'de geliştirilen $\left(\frac{G'}{G}\right)-$açılım yöntemi Zhang (Zhang, Wei ve Lu, 2008), tarafından birçok çalışmada kullanılmıştır. Geliştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)-$ açılım metodunun ana adımları aşağıdaki gibi sunulur:

1. Adım: Lineer olmayan bir kismi türevli diferansiyel denklem kapalı formda,

$$T(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde yazılabilir. $u = u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyon, P'de $u = (x,t)$'nin polinomudur. (2.1) denkleminde,

$$\rho = x - vt, \quad U(\rho) = u(x,t) \tag{2.2}$$

dönüşümü kullanılırsa kapalı formda bir adi diferansiyel denklem

$$T(U, -vU', U', v^2U'', \dots) = 0 \tag{2.3}$$

şeklinde elde edilir.

2. Adım: Kapalı şekilde gösterilen (2.3) denkleminin analitik çözümü için bu metot gereği çözüm önerisi

$$u(\rho) = \sum_{i=-m}^{m} a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i \tag{2.4}$$

şeklinde olup, burada $G = G(\rho)$ ve λ, μ keyfi sabitler olmak üzere,

$$G'' + \lambda G' + \mu G = 0 \tag{2.5}$$

yardımcı denklemini sağlar (Wang vd., 2008). Bu metot uygulanırken ilk önce (2.4) denkleminde verilen $U(\rho)$ fonksiyonundaki m sabit belirlenir. Bunun için yine (2.3) denklemindeki en yüksek dereceli lineer ve lineer olmayan terimler arasına homojen ayar yapılır. (2.4) denklemi (2.3) denkleminde yerine yazılarak elde edilen cebirsel denklem takımından $a_m, a_{m-1} \dots, a_0$ katsayıları belirlenir. Tekrar ters dönüşümle geriye giderek (2.1) ile verilen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü elde edilmiş olur. Elde edilen çözümü (2.5) ile verilen yardımcı denklemin çözümüne göre hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel olmak üzere üç tipte yazmak mümkündür. Burada $\left(\frac{G'}{G}\right)$ ifadesinin üç durumu şu şekilde verilebilir.

1. Durum: $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise

$$\left(\frac{G'}{G}\right) = \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\left(\frac{\left(A_1 sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\rho + \mathrm{A}_2 cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\rho\right)}{\left(A_1 cosh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\rho + \mathrm{A}_2 sinh\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\rho\right)}\right) - \frac{\lambda}{2}. \tag{2.6}$$

2. Durum: $\lambda^2 - 4\mu < 0$ iken

$$\left(\frac{G'}{G}\right)=\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\frac{-A_1 sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\rho+\mathrm{A}_2 cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\rho}{A_1 cos\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\rho+\mathrm{A}_2 sin\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\rho}\right)-\frac{\lambda}{2}. \tag{2.7}$$

3. Durum: $\lambda^2-4\mu=0$ olduğunda

$$\left(\frac{G'}{G}\right)=\frac{\mathrm{A}_2}{A_1+\mathrm{A}_2\rho}-\frac{\lambda}{2}. \tag{2.8}$$

Yukarıdaki sonuçlar basitleştirilmiş formlarda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{G'(\rho)}{G(\rho)}=\begin{cases}\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\rho+\rho_0\right)-\frac{\lambda}{2}, & \lambda^2-4\mu>0, \quad tanh(\rho_0)=\frac{A_1}{A_2}, \left|\frac{A_1}{A_2}\right|>1,\\ \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}coth\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\rho+\rho_0\right)-\frac{\lambda}{2}, & \lambda^2-4\mu>0, \quad coth(\rho_0)=\frac{A_1}{A_2}, \left|\frac{A_1}{A_2}\right|<1,\\ \frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}cot\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\rho+\rho_0\right)-\frac{\lambda}{2}, & \lambda^2-4\mu<0, \quad cot(\rho_0)=\frac{A_2}{A_1},\\ \frac{A_2}{A_1+A_2\rho}-\frac{\lambda}{2}, & \lambda^2-4\mu=0\end{cases} \tag{2.9}$$

şeklide de yazılabilir (Wang vd., 2008; Zayed, 2010).

3. Adım: Eğer $u(\rho)$ derecesi $D[u(\rho)]=N$ olarak tanımlanırsa bu ifadeye bağlı elde edilecek diğer ifadelerin derecesi

$$D\left[\frac{d^q u}{d\eta^q}\right]=N+q, \quad D[u^r]=Nr,$$

$$D\left[u^r\left(\frac{d^q u}{d\eta^q}\right)^s\right]=s(N+q)+Nr,$$

olacak şekilde hesaplanır. En yüksek mertebeden türevli terim ile lineer olmayan terim arasında kullanılan bu derecelendirmeler eşitlenerek elde edilen basit denklemden N değerini elde edilir.

4. Adım: (2.4) denklemini çözmek için denklemde $u(\rho)$ yerine (2.5) denklemi yardımıyla $u(\rho)$'nin ρ'ye bağlı türevleri bulunarak yerine konur. Yapılan bu

işlemlerden sonra $\left(\frac{G'}{G}\right)$'nin aynı mertebeden terimleri düzenlenerek oluşan bu katsayılardan elde edilen ifadede $\left(\frac{G'}{G}\right)$'nin aynı mertebeden terimleri düzenlenerek oluşan bu katsayılardan elde edilen cebirsel denklemler sıfıra eşitlenip çözülerek, bu denklemlerden a_i, c, λ, μ değerleri bulunur.

5. Adım: 5. durumda elde edilen a_i, c, λ, μ değerleri ve (2.5)'den elde edilen çözümler yardımıyla bulunan çözümleri (2.3) lineer olmayan kısmi türevli denklemin çözümü elde edilir.

2.2. Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu

Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ −açılım yöntemi aşağıdaki gibi sunulur (Zayed, 2009; Malik vd., 2012):

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin

$$F\left(u, u_t, u_x, u_y, u_z, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_{yt}, u_{zz}, u_{zt}, u_{zx}, u_{zy}, \dots\right) = 0 \qquad (2.10)$$

formunda olduğunu kabul edelim. Burada $u = u(x, y, z, t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur, F ise $u(x, y, z, t)$ ve onun kısmi türevlerinde en yüksek mertebeli türevlerin ve lineer olmayan terimlerin yer aldığı bir polinomdur. Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ −açılım yönteminin esas adımları aşağıdaki gibi verilir:

1. Adım: Dalga değişkeni aşağıdaki gibi verilir:

$$u(x, y, z, t) = u(\rho), \quad \rho x + y + z - V_t. \qquad (2.11)$$

Burada V bir sabittir. (2.11) denklemi, (2.10) denkleminde yazılarak, $u = u(\rho)$ için (2.10) denklemi

$$P(u, u', u'', u''', \dots)0. \qquad (2.12)$$

biçiminde bir adi diferansiyel denkleme dönüşür.

2. Adım: (21) denkleminin çözümünün aşağıdaki gibi olduğunu kabul edelim:

$$u(\rho) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \left(\frac{G'}{G}\right)^i. \qquad (2.13)$$

Burada $G = G(\rho)$ fonksiyonu

$$[G'(\rho)]^2 = e_2 G^4(\rho) + e_1 G^2(\rho) + e_0 \tag{2.14}$$

Jacobi eliptik denklemini sağlar. Burada $\alpha_i, e_2, e_1, e_0 \ ve \ V, \alpha_N \neq 0$ daha sonra belirlenecek keyfi sabitlerdir. N pozitif tam sayısı, (2.10) veya (2.12) denkleminde görülen en yüksek mertebeli türevler ile lineer olmayan terimler arasındaki balans prensibi dikkate alınarak elde edilebilir. Daha net bir ifadeyle, $u(\rho)$'nin derecesini $D[u(\rho)] = N$ olarak alınır ve bu durumda diğer ifadelerin derecesi aşağıdaki gibi bulunur:

$$D\left[\frac{d^q u}{d\rho^q}\right] = N + q, \quad D\left[u^p \left(\frac{d^q u}{d\rho^q}\right)^s\right] = Np + s(q + N). \tag{2.15}$$

Böylece, (2.13) denklemindeki N'nin değeri belirlenebilir.

3. Adım: (2.13) denklemi (2.12) denkleminde yerine yazılarak ve (2.14) denklemi kullanılarak, $G^j(\rho), G'(\rho), G^j(\rho)(j = \pm 1, \pm 2, \dots)$ cinsinden polinomlar bulunur. Elde edilen polinomların her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek, $\alpha_i, e_2, e_1, e_0 \ ve \ V$ için bir dizi cebirsel denklem çıkarılır.

4. Adım: (2.14) denkleminin genel çözümleri iyi bilindiğinden (bkz. Ek-1), α_i, V ve (2.14) denkleminin genel çözümü (2.11) denkleminde yerine yazıldığında, (2.10) ile verilen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemine çözümler üretilir.

2.3. Genişletilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Açılım Metodu

Bu kısımda genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$-yönteminin tanımı verilmiştir (Zhang vd., 2008; Zhang, Wang ve Tong, 2009; Lü, Liu ve Niu, 2010). x ve t bağımsız değişkenleri olmak üzere bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel şeklinde olsun.

$$T(u, u_t, u_x, u_{tt}, u_{xt}, u_{xx}, \dots) = 0 \tag{2.16}$$

Hareketli dalga transformasyonu

$$\rho = kx - \lambda t \tag{2.17}$$

olmak üzere $u(x,t) = u(\rho)$ verisin.. (2.16) denkleminde dalga dönüşümü ve ilgili kısmi türevler yardımıyla

$$T(u, u', u'', u''', \dots) = 0 \tag{2.18}$$

lineer olmayan adi diferansiyel denklem elde edilir. Genelleştirilmiş $\left(\frac{G'}{G}\right)$ yöntemine göre (2.19) denkleminin çözümü $u(\rho)$, $\sigma = \pm 1$ olmak üzere

$$u(\rho) = a_0 + \sum_{i=1}^{M} \left(a_i \left(\frac{G'}{G}\right)^{i} + b_i \left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1} \sqrt{\sigma\left(1 + \frac{1}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)} + c_i \left(\frac{G'}{G}\right)^{-i} + d_i \frac{\left(\frac{G'}{G}\right)^{-i+1}}{\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}} \right) \tag{2.20}$$

ile verilsin. Buradaki a_0, a_i, b_i, c_i, d_i, $(i = 1,2, \dots M)$ katsayıları belirlenip μ

$$G'' + \mu G = 0 \tag{2.21}$$

diferansiyel denklemin bir çözüm fonksiyonudur. μ parametresinin durumuna göre üç durum söz konusudur. Buna göre;

(i) Eğer $\mu > 0$ ise, (2.20) denkleminden

$$\frac{G'(\rho)}{G(\rho)} = \sqrt{-\mu} \frac{A_1 cos(\sqrt{-\mu}\rho) - A_2 sin(\sqrt{-\mu}\rho)}{A_1 sin(\sqrt{-\mu}\rho) + A_2 cos(\sqrt{-\mu}\rho)} \tag{2.22}$$

şeklinde trigonometrik fonksiyon bulunur.

(ii) Eğer $\mu < 0$ ise, (2.20) denkleminden

$$\frac{G'(\rho)}{G(\rho)} = \sqrt{-\mu} \frac{A_1 \sinh(\sqrt{-\mu}\rho) + A_2 cosh(\sqrt{-\mu}\rho)}{A_1 cosh(\sqrt{-\mu}\rho) + A_2 sinh(\sqrt{-\mu}\rho)} \tag{2.23}$$

şeklinde hiperbolik fonksiyon bulunur.

(iii)Eğer $\mu = 0$ ise, (2.20) denkleminden

$$\frac{G'(\rho)}{G(\rho)} = \frac{A_1}{A_1 \rho + A_2} \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.22) denklemindeki $\frac{G'(\rho)}{G(\rho)}$ terimleri yardımıyla $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k \sqrt{\sigma\left(1 + \frac{1}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ terimlerinin aynı dereceden katsayıları eşitlenerek $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve

$\left(\frac{G'}{G}\right)^k \sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ terimlerinin polinomları elde edilir. İlgili polinomun tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek elde edilen cebirsel denklem sistemi farklı metotlarla çözülerek ilgili $a_0, a_i, b_i, c_i, d_i,\ (i = 1,2, \dots M)$ ve λ, k, μ katsayıları bulunur. Bu katsayılar (2.21) de konulur ve böylece u çözüm fonksiyonu için trigonometrik, hiperbolik ve rasyonel çözümler bulunur. Buradan ise istenen (2.16) nın çözümleri elde edilir.

3. $\left(\frac{G'}{G}\right)$-AÇILIM METODU İLE (2+1) BOYUTLU KIRILMA SOLİTON DENKLEMLERİNİN SOLİTON VE DİĞER ÇÖZÜMLERİ

3.1. (2+1) Boyutlu Kırılma Soliton Denklemlerinin Kesin Çözümleri

Bu çalışmada (2+1) boyutlu kırılma soliton denklemleri için yürüyen dalga çözümleri oluşturmak için $\left(\frac{G'}{G}\right)$-açılım yönteminin geliştirilmiş, genelleştirilmiş ve genişletilmiş versiyonunu kullanacağız (Zhang, 2007; Cheng ve Li, 2003; Peng ve Krishna, 2005; Liu, Reng ve Zhang, 2006; Zhao, Dai ve Mu, 2011; Zayeed ve Gepreel, 2009).

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_{xxy} + 4\alpha u v_x + 4\alpha u_x v = 0 \\ u_y = v_x \end{cases} \tag{3.1}$$

Burada α keyfi bir sabittir.

Doğrusal olmayan dalgalar teorisinde en önemli yönlerinden biri, sabit bir hızla hareket eden sabit formun çözümleri olan yürüyen dalga çözümlerinin incelenmesidir. Burada, denklem için hareket eden dalga çözümünü şu şekilde aranır;

$$u(x,y,t) = u(\rho), \qquad v(x,y,t) = v(\rho), \qquad \rho = x + y - \omega t. \tag{3.2}$$

denklem (3.1)'i denklem (3.2) de yerine koyulursa;

$$\begin{cases} -\omega u' + \alpha u''' + 4uv' + 4\alpha u' v = 0, \\ u' = v'. \end{cases} \tag{3.3}$$

elde ederiz. İkinci denklemi sistem (3.3)'e entegre ederek ve bulduğumuz entegrasyon sabitlerini ihmal ederek

$$u = v. \tag{3.4}$$

bulunur. (3.4)'ü (3.3)'ün ilk denklemine koyarak ve elde ettiğimiz integrali alarak

$$-\omega u + 4\alpha u^2 + \alpha u'' + C = 0, \tag{3.5}$$

C daha sonra belirlenecek olan integrasyon sabitidir. Denklem (3.4)'te u'' ile u^2 arasındaki dengeleme prosedürünü kullanarak $n = 2$ elde edilir. Denklem (3.5)'in aşağıdaki resmi çözümlere sahip olduğunu varsayılır;

$$u(\rho) = \alpha_{-2}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-2} + \alpha_{-1}\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right)^{1} + \alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^{2}, \tag{4.6}$$

burada $G = G(\rho)$ ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem (2.10)'i sağlar,α_i $(i = 0, \pm 1, \pm 2)$ tümü belirlenecek sabitlerdir. Denklem (3.6) ile denklem (2.10)'i denklem (3.5)'te yerine koyulursa ve $\left(\frac{G'}{G}\right)$'in aynı kuvvetinin tüm terimlerini toplanırsa denklem (3.4)'ün sol tarafı $\left(\frac{G'}{G}\right)^{j}$ $(j = \pm 1, \pm 2, \ldots)$'de bir polinom haline dönüştürülür. Bu polinomun her katsayısını sıfıra ayarlamak $\alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \lambda, \mu$ ve ω için bir dizi cebirsel denklem elde edilir (basitlik onları göstermeyi ihmal edilir).

Cebirsel yazılım Mathematica yardımıyla elde edilen cebirsel denklemler sistemini çözerek aşağıdaki sonuçları elde edilir (Sönmezoğlu, Ekici ve Duran, 2015);

1. Durum:

$$\alpha_{-2} = 0, \qquad \alpha_{-1} = 0, \quad \alpha_0 = \frac{\omega - \alpha(\lambda^2 + 8\mu)}{8\alpha}, \quad \alpha_1 = -\frac{3\lambda}{2}, \quad \alpha_2 = -\frac{3}{2},$$

$$\omega = \pm\sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)},$$

burada λ, μ, C bağımsız parametreler ve $\alpha \neq 0$ dır.

2. Durum:

$$\alpha_{-2} = -\frac{3\mu^2}{2}, \qquad \alpha_{-1} = -\frac{3\lambda\mu}{2}, \qquad \alpha_0 = \frac{\omega - \alpha(\lambda^2 + 8\mu)}{8\alpha}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0,$$

$$\omega = \pm\sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)},$$

burada λ, μ, C bağımsız parametreler ve $\alpha \neq 0$ dır.

(i) Hiperbolik fonksiyon çözümleri $(\lambda^2 - 4\mu > 0)$;

Denklem (2.10)'in genel çözümlerini denklem (3.6)'da yerine koyarsak aşağıdaki hiperbolik hareket eden dalga çözümlerini elde edilir (Sönmezoğlu vd., 2015);

1. Durum aşağıdakini verir:

$$u(\rho) = -\frac{3(\lambda^2-4\mu)}{8}\left(\frac{A_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho + A_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}{A_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho + A_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)v}\right)^2$$

$$+\frac{2\alpha\lambda^2 - 8\alpha\mu \pm \sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}}{8\alpha}, \tag{3.7}$$

burada $\rho = x + y \pm \sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}t$, A_1 ve A_2 keyfi sabitlerdir.

2. Durum aşağıdakini verir:

$$u(\rho) = -\frac{3\mu^2}{2}\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\frac{A_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho + A_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}{A_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho + A_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}\right) - \frac{\lambda}{2}\right]^{-2}$$

$$-\frac{3\lambda\mu}{2}\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\frac{A_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho + A_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}{A_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho + A_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}\right) - \frac{\lambda}{2}\right]^{-1}$$

$$-\frac{\alpha\left(\lambda^2+8\mu \pm \sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}\right)}{8\alpha} \tag{3.8}$$

burada $\rho = x + y \pm \sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}t$, A_1 ve A_2 keyfi sabitlerdir.

(ii) Trigonometrik fonksiyon çözümleri ($\lambda^2 - 4\mu$<0);

Denklem (2.11)'in genel çözümlerini denklem (3.6)'da yerine koyarsak aşağıdaki trigonometrik hareket eden dalga çözümlerini elde edilir (Sönmezoğlu vd., 2015);

1. Durum aşağıdakini verir:

$$u(\rho) = \frac{3(\lambda^2-4\mu)}{8}\left(\frac{-A_1 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho + A_2 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}{A_1 \cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho + A_2 \sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}\right)^2$$

$$+\frac{2\alpha\lambda^2-8\alpha\mu\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}}{8\alpha} \tag{3.9}$$

burada $\rho=x+y\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}t$, A_1 ve A_2 keyfi sabitlerdir.

2. Durum aşağıdakini verir:

$$u(\rho)=-\frac{3\mu^2}{2}\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\frac{-A_1\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho+A_2\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}{A_1\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho+A_2\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}\right)-\frac{\lambda}{2}\right]^{-2}$$

$$-\frac{3\lambda\mu}{2}\left[\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left(\frac{-A_1\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho+A_2\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}{A_1\cosh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho+A_2\sinh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho}\right)-\frac{\lambda}{2}\right]^{-1}$$

$$-\frac{\alpha\left(\lambda^2+8\mu\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}\right)}{8\alpha} \tag{3.10}$$

burada $\rho=x+y\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}t$, A_1 ve A_2 keyfi sabitlerdir.

(iii) Rasyonel fonksiyon çözümü ($\lambda^2-4\mu=0$);

Denklem (2.11)'in genel çözümlerini denklem (3.6)'da yerine koyarsak aşağıdaki trigonometrik hareket eden dalga çözümlerini elde edilir (Sönmezoğlu vd., 2015);

1. Durum aşağıdakini verir:

$$u(\xi)$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\frac{A_2}{A_1+A_2\rho}\right)^2$$

$$+\frac{2\alpha\lambda^2-8\alpha\mu\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}}{8\alpha} \tag{3.11}$$

burada $\rho = x + y \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}t$, A_1 ve A_2 keyfi sabitlerdir.

2. Durum aşağıdakini verir:

$$u(\rho) = -\frac{3\mu}{2}\left[\mu\left(\frac{A_2}{A_1 + A_2\rho} - \frac{\lambda}{2}\right)^{-2} + \lambda\left(\frac{A_2}{A_1 + A_2\rho} - \frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$- \frac{\alpha\left(\lambda^2 + 8\mu \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}\right)}{8\alpha}$$

burada $\rho = x + y \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}t$, A_1 ve A_2 keyfi sabitlerdir.

Sonuç referans (Zhang, 2011; Zayeed ve Gepreel, 2009) karşılaştırarak bazı parametreler için sonucun aynı olduğu görülebilir.

(iv) Özel durumlar:

Parametreler özel değerler aldığında, ilerleyen dalga çözümlerinden soliton ve periyodik çözümler elde edilir.

Soliton çözümleri:

(i) Eğer $\lambda^2 - 4\mu > 0$, (4.7), (4.8)'de $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$ olarak alırsak sırasıyla soliter dalga çözümlerini elde edilir;

$$u(\rho) = -\frac{3(\lambda^2 - 4\mu)}{8} coth^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right)\rho$$

$$+ \frac{2\alpha\lambda^2 - 8\alpha\mu \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}}{8\alpha},$$

$$u(\rho) = -\frac{3\mu}{2}\left[\mu\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right)\rho - \frac{\lambda}{2}\right)^{-2}\right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right)\rho - \frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$-\frac{\alpha\left(\lambda^2+8\mu\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}\right)}{8\alpha}$$

(ii) Eğer $\lambda^2-4\mu>0$, (3.7), (3.8)'de $A_1=0,\ A_2\neq 0$ olarak alırsak sırasıyla soliter dalga çözümlerini elde edilir;

$$u(\rho)=-\frac{3(\lambda^2-4\mu)}{8}tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho + \frac{2\alpha\lambda^2-8\alpha\mu\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}}{8\alpha},$$

$$u(\rho)=-\frac{3\mu}{2}\left[\mu\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho-\frac{\lambda}{2}\right)^{-2} + \lambda\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho-\frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\right] - \frac{\alpha\left(\lambda^2+8\mu\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}\right)}{8\alpha}$$

(iii) Eğer $\lambda^2-4\mu>0$, (3.7), (3.8)'de $A_1\neq 0, A_1>A_2$ olarak alırsak sırasıyla soliter dalga çözümlerini elde edilir;

$$u(\xi)=-\frac{3(\lambda^2-4\mu)}{8}tanh^2\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho+\rho_0\right] + \frac{2\alpha\lambda^2-8\alpha\mu\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}}{8\alpha},$$

$$u(\rho)=-\frac{3\mu}{2}\left[\mu\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}tanh\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho+\rho_0\right]-\frac{\lambda}{2}\right)^{-2} + \lambda\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\right)\rho-\frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\right] - \frac{\alpha\left(\lambda^2+8\mu\pm\sqrt{\alpha(16C+\alpha(\lambda^2-4\mu)^2)}\right)}{8\alpha}$$

burada $\rho_0 = tanh^{-1}(A_1/A_2)$.

Periodik çözümler:

(i)) Eğer $\lambda^2 - 4\mu<0$, (3.9), (3.10)'de $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$ olarak alırsak sırasıyla soliter dalga çözümlerini elde edilir;

$$u(\rho) = \frac{3(\lambda^2 - 4\mu)}{8} coth^2\left(\frac{1}{2}4\mu - \lambda^2\right)\rho + \frac{2\alpha\lambda^2 - 8\alpha\mu \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}}{8\alpha}$$

$$u(\rho) = -\frac{3\mu}{2}\left[\mu\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)\rho - \frac{\lambda}{2}\right)^{-2}\right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} coth\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)\rho - \frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$- \frac{\alpha\left(\lambda^2 + 8\mu \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}\right)}{8\alpha}$$

(ii) Eğer $\lambda^2 - 4\mu<0$, (3.9), (3.10)'de $A_2 = 0$, $A_1 \neq 0$ olarak alırsak sırasıyla soliter dalga çözümlerini elde edilir;

$$u(\rho) = -\frac{3(\lambda^2 - 4\mu)}{8} tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)\rho$$

$$+ \frac{2\alpha\lambda^2 - 8\alpha\mu \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}}{8\alpha},$$

$$u(\rho) = -\frac{3\mu}{2}\left[\mu\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)\rho - \frac{\lambda}{2}\right)^{-2}\right.$$

$$\left. + \lambda\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)\rho - \frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\right]$$

$$- \frac{\alpha\left(\lambda^2 + 8\mu \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}\right)}{8\alpha}$$

(iii) Eğer $\lambda^2 - 4\mu<0$, (3.9), (3.10)'de $A_1 \neq 0, A_1 > A_2$ olarak alırsak sırasıyla soliter dalga çözümlerini elde edilir;

$$u(\rho) = -\frac{3(\lambda^2 - 4\mu)}{8} tanh^2\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)\rho + \rho_0\right] + \frac{2\alpha\lambda^2 - 8\alpha\mu \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}}{8\alpha},$$

$$u(\rho) = -\frac{3\mu}{2}\left[\mu\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} tanh\left[\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)\rho + \rho_0\right] - \frac{\lambda}{2}\right)^{-2} + \lambda\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} tanh\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\mu - \lambda^2}\right)\rho - \frac{\lambda}{2}\right)^{-1}\right] - \frac{\alpha\left(\lambda^2 + 8\mu \pm \sqrt{\alpha(16C + \alpha(\lambda^2 - 4\mu)^2)}\right)}{8\alpha}$$

burada $\rho_0 = tanh^{-1}(A_1/A_2)$.

Sonra, (2+1) boyutlu soliton denklemlerinin (3.1) çözümlerini elde etmek için $\left(\frac{G'}{G}\right)$ genişleme yönteminin genelleştirilmiş formu kullanılır. Bunun için ansatz şu şekilde gelir;

$$u(\rho) = \alpha_2\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + \alpha_1\left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0, \tag{3.12}$$

$G = G(\rho)$, Jacobi eliptik fonksiyonunu karşılar, α_i $(i = 0,1,2)$ daha sonra belirlenecek sabitlerdir. Ansatz (3.12)'yi denklem (3. 5) ile birlikte kullanılırsa ve tüm terimleri aynı güçte $G^j(\rho)$ ve $G'(\rho)G^j(\rho)$ $(j = \pm1, \pm2, \dots)$ ile toplanırsa, sol tarftaki denklem (3.5) polinomuna dönüşür. Polinomların her katsayısını sıfıra eşitlenirsa Mathematica programı ile çözüldüğünde bize aşağıdaki cebirsel denklemler kümesini verir;

$$\alpha_2 = -\frac{3}{2}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \omega = 8\alpha(\alpha_0 - e_1), \tag{3.13}$$

burada

$$\alpha_0 = e_1 \pm \frac{\sqrt{\alpha(C + \alpha e_1^2 + 12\alpha e_0 e_2)}}{2\alpha}$$

(3.13)'ü (3.12) ile değiştirilirse

$$u(\rho) = -\frac{3}{2}\left(\frac{G'}{G}\right)^2 + e_1 \pm \frac{\sqrt{\alpha(C + \alpha e_1^2 + 12\alpha e_0 e_2)}}{2\alpha}$$

burada $\rho = x + y - 8\alpha(\alpha_0 - e_1)t$. Ek 1'ya göre denklem (3.1) için tam çözüm ailelerini aşağıdaki gibi yazılır (Sönmezoğlu vd., 2015);

1. Durum: Eğer $e_0 = 0,\ e_1 = -(m^2 + 1),\ e_2 = m^2$ ise ;

$$u(\rho) = -\frac{3}{2}cs^2(\rho)dn^2(\rho) - (m^2 + 1) \pm \frac{\sqrt{\alpha[C + \alpha(m^4 + 14m^2 + 1)]}}{2\alpha}$$

ya da

$$u(\rho) = -\tfrac{3}{2}(1 - m^2)^2 sd^2(\rho)nc^2(v) - (m^2 + 1) \pm \tfrac{\sqrt{\alpha[C + \alpha(m^4 + 14m^2 + 1)]}}{2\alpha}$$

burada $\rho = x + y - 8\alpha(\alpha_0 + m^2 + 1)t$

2. Durum: Eğer $e_0 = 1 - m^2,\ e_1 = 2m^2 - 1,\ e_2 = -m^2$ ise

$$u(\rho) = -\frac{3}{2}sc^2(\rho)dn^2(\rho) + 2m^2 - 1 \pm \frac{\sqrt{\alpha[C + \alpha(16m^4 - 16m^2 + 1)]}}{2\alpha}$$

burada $\rho = x + y - 8\alpha(\alpha_0 - 2m^2 + 1)t$

3. Durum: Eğer $e_0 = m^2 - 1,\ e_1 = 2 - m^2,\ e_2 = -1$ ise

$$u(\rho) = -\frac{3}{2}m^4 sn^2(\rho)cd(\rho) + 2 - m^2 \pm \frac{\sqrt{\alpha[C + \alpha(m^4 - 16m^2 + 16)]}}{2\alpha}$$

burada $\rho = x + y - 8\alpha(\alpha_0 + m^2 - 2)t$

4. Durum: Eğer $e_0 = m^2,\ e_1 = -(m^2 + 1),\ e_2 = 1$ ise

$$u(\rho) = -\frac{3}{2}\frac{ds^2(\rho)cs^2(\rho)}{ns^2(\rho)} - (m^2+1) \pm \frac{\sqrt{\alpha[C+\alpha(m^4+14m^2+1)]}}{2\alpha}$$

ya da

$$u(\rho) = -\frac{3}{2}(1-m^2)^2\frac{nc^2(\rho)sc^2(\rho)}{dc^2(\rho)} - (m^2+1) \pm \frac{\sqrt{\alpha[C+\alpha(m^4+14m^2+1)]}}{2\alpha}$$

burada $\rho = x + y - 8\alpha(\alpha_0 + m^2 + 1)t$

5. Durum: Eğer $e_0 = 0,\ e_1 = 1,\ e_2 = -1$ ise

$$u(\rho) = -\frac{3}{2}tanh^2(\rho) + 1 \pm \frac{\sqrt{\alpha(C+\alpha)}}{2\alpha}$$

burada $\rho = x + y - 8\alpha(\alpha_0 - 1)t$

6. Durum: Eğer $e_0 = 0,\ e_1 = 1,\ e_2 = 1$ ise

$$u(\rho) = -\tfrac{3}{2}coth^2(\rho) + 1 \pm \tfrac{\sqrt{\alpha(C+\alpha)}}{2\alpha}$$

burada $\rho = x + y - 8\alpha(\alpha_0 - 1)t$

7. Durum: Eğer $e_0 = 0,\ e_1 = -1,\ e_2 = 1$ ise

$$u(\rho) = -\frac{3}{2}tanh^2(\rho) - 1 \pm \frac{\sqrt{\alpha(C+\alpha)}}{2\alpha}$$

burada $\rho = x + y - 8\alpha(\alpha_0 + 1)t$

8. Durum: Eğer $e_0 = 0,\ e_1 = 0,\ e_2 = 1$ ise

$$u(\rho) = -\frac{3}{2\rho^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{\alpha}}$$

burada $\rho = x + y - 8\alpha\alpha_0 t$

elde edilir. Benzer şekilde, kolaylık olması için ihmal edilen (3.1) denkleminin diğer tam çözüm aileleri yazılabilir. Böylece $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişleme yöntemini genelleştirilmiş formunu kullanarak Jacobi eliptik fonksiyonlar cinsinden denklem (3.1)'in tam hareket eden dalga çözümlerinin aileleri elde edilebilir. Bazı koşullar altında bu çözümler hiperbolik ve trigonemtrik fonskiyonel formlara dönüşür.(Ek 2 kullanılarak). Yukarıda elde edilen çözümlerden bazıları Pend ve diğerleri tarafından elde edilen sonuçlara benzer (Peng ve Shen, 2006).

Şimdi, $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişleme yönteminin genişletilmiş biçimini kulanarak denklem (3.1)'i saplanır ve bunun için ansatz şu şekilde olur;

$$u(\rho) = a_0 + \sum_{i=1}^{2}\left[a_i\left(\frac{G'}{G}\right)^{i} + b\left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1}\sqrt{\sigma\left\{1+\frac{1}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right)^{2}\right\}} + c_i\left(\frac{G'}{G}\right)^{-i}_{i} + d_i\frac{\left(\frac{G'}{G}\right)^{-i+1}}{\sqrt{\sigma\left\{1+\frac{1}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right)^{2}\right\}}}\right] \quad (3.14).$$

burada $G = G(\rho)$ denklem (2.5)'i karşılar, $\sigma = \mp 1, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_{1,} d_2$ daha sonra belirlenecek sabitlerdir.

Bilinmeyen $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_{1,} d_2, \omega$ ve μ parametrelerinin fonksiyonları olarak $u'(\rho)$ ve $u''(\rho)$ elde etmek için denklem (3.14)'te ρ'a göre iki kez $u(\rho)$ türetilir. Daha sonra u ve u'''nü (3.5)'e çevirerek, her $\left(\frac{G'}{G}\right)^{j}$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^{j}\sqrt{\sigma\left\{1+\frac{1}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right)^{2}\right\}}$ mertebesinin tüm katsayılarının kaybolmasından dolayı denklem (4.5)'in sol tarafı $\left(\frac{G'}{G}\right)^{j}$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^{j}\sqrt{\sigma\left\{1+\frac{1}{\mu}\left(\frac{G'}{G}\right)^{2}\right\}}$ 'de bir polinom haline dönüştürülür. Bu polinomun tüm katsayılarını yok eden $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_{1,} d_2, \omega$ ve μ ile ilgili bir dizi üst belirlenmiş cebirsel denklem verir. Mathematica programı yardımıyla cebirsel denklemler kümesi çözülürse aşağıdaki sonuçları elde edilir (Sönmezoğlu vd., 2015);

1. Durum:

$$a_0 = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)}}{2\alpha}, \quad a_2 = -\frac{3}{2}, \quad \omega = \mp 4\sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)},$$

$$a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,$$

burada C, μ bağımsız parametreler ve $\alpha \neq 0$'dır.

2. Durum:

$$a_0 = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)}}{2\alpha}, \quad c_2 = -\frac{3\mu^2}{2}, \quad \omega = \mp 4\sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)},$$

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0,$$

burada C, μ bağımsız parametreler ve $\alpha \neq 0$'dır.

3. Durum:

$$a_0 = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C+16\alpha\mu^2)}}{2\alpha}, \quad a_2 = -\frac{3}{2}, \quad c_2 = -\frac{3\mu^2}{2},$$

$$\omega = \mp 4\sqrt{\alpha(C+16\alpha\mu^2)},$$

$$a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0,$$

burada C, μ bağımsız parametreler ve $\alpha \neq 0$'dır.

4. Durum:

$$a_0 = -\frac{5\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(16C+\alpha\mu^2)}}{8\alpha}, \quad a_2 = -\frac{3}{4}, \quad b_2 = \mp\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}},$$

$$\omega = \mp 4\sqrt{\alpha(16C+\alpha\mu^2)},$$

$$a_1 = b_1 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,$$

burada C, μ bağımsız parametreler ve $\alpha \neq 0$'dır.

(i) Hiperbolik fonksiyon çözümleri (μ<0);

Denklem (2.11)'in genel çözümlerini (3.14)'te yerine koyulursa aşağıdaki hiperbolik hareket eden dalga çözümlerini elde edilir (Sönmezoğlu vd., 2015);

1. Durum:

$$u(\xi) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)}}{2\alpha} + \frac{3\mu}{2}\left(\frac{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}\right)^2, \tag{3.15}$$

burada A_1, A_2 keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)}t$'dir.

2. Durum:

$$u(\rho) = --\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)}}{2\alpha} + \frac{3\mu}{2}\left(\frac{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}\right)^2 \tag{3.16}$$

burada A_1, A_2 keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)}t$'dir.

3. Durum:

$$u(\rho) = --\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)}}{2\alpha} + \frac{3\mu}{2}\left[\left(\frac{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}\right)^2 + \left(\frac{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}\right)^2\right] \tag{3.17}$$

burada A_1, A_2 keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha(C+16\alpha\mu^2)}t$'dir.

4. Durum:

$$u(\rho) = -\frac{5\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(16C + \alpha\mu^2)}}{8\alpha}$$

$$+\frac{3\mu}{4}\left[\left(\frac{A_1 \sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right) + A_2 \cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}{A_1 \cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}\right)^2\right.$$

$$\mp \left(\frac{A_1 \sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right) + A_2 \cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}{A_1 \cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}\right)^2$$

$$\left.\times \sqrt{-1 + \left(\frac{A_1 \sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right) + A_2 \cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}{A_1 \cosh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{-\mu\rho}\right)}\right)^2}\right] \tag{3.18}$$

burada A_1, A_2 keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha(C + 16\alpha\mu^2)}t$'dir

(ii) Trigonometrik fonksiyon çözümleri ($\mu > 0$);

Denklem (2.11)'in genel çözümlerini (3.14)'te yerine koyulursa aşağıdaki trigonometrik hareket eden dalga çözümlerini elde edilir (Sönmezoğlu vd., 2015);

1. Durum:

$$u(\rho) = - - \frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}}{2\alpha}$$

$$-\frac{3\mu}{2}\left(\frac{A_1 \cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right) - A_2 \sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}{A_1 \sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}\right)^2 \tag{3.19}$$

. burada A_1, A_2 keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}t$'dir

2. Durum:

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}}{2\alpha} - \frac{3\mu}{2}\left(\frac{A_1 \sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}{A_1 \cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right) - A_2 \sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}\right)^2 \tag{3.20}$$

burada A_1, A_2 keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}t$'dir.

3. Durum:

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}}{2\alpha}$$

$$-\frac{3\mu}{4}\left[\left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right) - A_2\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right) + A_2\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{A_1\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right) + A_2\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}{A_1\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right) - A_2\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}\right)^2\right] \qquad (3.21)$$

burada A_1, A_2 keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha(C + 16\alpha\mu^2)}t$'dir.

4. Durum:

$$u(\rho) = -\frac{5\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(16C + \alpha\mu^2)}}{8\alpha} - \frac{3\mu}{4}\left[\left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right) - A_2\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right) + A_2\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}\right)^2\right.$$

$$\left.\pm\left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right) - A_2\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right) + A_2\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}\right)^2\sqrt{1 + \left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right) - A_2 v\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu\rho}\right) + A_2\cos\left(\sqrt{\mu\rho}\right)}\right)^2}\right] \qquad (3.22)$$

burada A_1, A_2 keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha(16C + \alpha\mu^2)}t$'dir

(iii) Rasyonel fonksiyon çözümleri $(\mu = 0)$;

Denklem (2.11)'in genel çözümlerini (3.14)'te yerine koyulursa aşağıdaki rasyonel hareket eden dalga çözümlerini elde edilirse (Sönmezoğlu vd., 2015);

1. ve 3. durumdan:

$$u(\rho) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{\alpha}} - \frac{3}{2}\left(\frac{A_1}{A_1\rho + A_2}\right)^2,$$

burada A_1, A_2 keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha C}t$'dir.

2. durumdan:

$$u(\rho) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{\alpha}}$$

burada $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha C}t$'dir.

4. durumdan:

$$u(\rho) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{\alpha}} - \frac{3}{4}\left(\frac{A_1}{A_1\rho + A_2}\right)^2$$

burada A_1, L keyfi sabitlerdir ve $\rho = x + y \mp 4\sqrt{\alpha C}t$'dir.

(iv) Özel durumlar:

Soliton, parametreler özel değerle aldığında ilerleyen dalga çözümlerinden periyodik ve karmaşık çözümler elde edilebilir.

Soliton çözümleri:

(i) Eğer μ<0 ve (3.15)-(3.18)'de $A_1 = 0$, $A_2 \neq 0$ olarak ayarlanırsa sırasıyla soliter dalga çözümlerini elde edilir (Sönmezoğlu vd., 2015);

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}}{2\alpha} + \frac{3\mu}{2}coth^2\left(\sqrt{-\mu}\rho\right),$$

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}}{2\alpha} + \frac{3\mu}{2}tanh^2\left(\sqrt{-\mu}\rho\right),$$

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + 16\alpha\mu^2)}}{2\alpha} + \frac{3\mu}{2}\left[coth^2\left(\sqrt{-\mu}\rho\right) + tanh^2\left(\sqrt{-\mu}\rho\right)\right],$$

$$u(\rho) = -\frac{5\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(16C + \alpha\mu^2)}}{8\alpha}$$

$$+\frac{3\mu}{4}\{\coth(\sqrt{-\mu}\rho)[\coth(\sqrt{-\mu}\rho) \mp \operatorname{csch}(\sqrt{-\mu}\rho)]\}$$

Benzer şekilde, (3.15)-(3.18)'de $A_1 = 0,\ A_2 \neq 0$ olarak ayarlanırsa ihmal edilen daha fazla dalga çözümleri elde edilir.

(ii) Eğer μ<0 ve ${A_1}^2 > {A_2}^2$ alındıktan sonra (3.15)-(3.17) arasında sırasıyla dalga çözümlerine karar verilir;

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}}{2\alpha} + \frac{3\mu}{2}tanh^2(\sqrt{-\mu}\rho + \rho_0),$$

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}}{2\alpha} + \frac{3\mu}{2}coth^2(\sqrt{-\mu}\rho + \rho_0),$$

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + 16\alpha\mu^2)}}{2\alpha} + \frac{3\mu}{2}[coth^2(\sqrt{-\mu}\rho + \rho_0) + tanh^2(\sqrt{-\mu}\rho + \rho_0)]$$

burada $\rho_0 = tanh^{-1}(A_1/A_2)$.

Periyodik çözümler:

(i) Eğer $\mu > 0$ ve (3.19)-(3.22)'de $A_1 = 0,\ A_2 \neq 0$ olarak ayarlanırsa sırasıyla periyodik dalga çözümlerini elde edilir;

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}}{2\alpha} - \frac{3\mu}{2}tan^2(\sqrt{\mu}\rho),$$

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + \alpha\mu^2)}}{2\alpha} - \frac{3\mu}{2}cot^2(\sqrt{\mu}\rho),$$

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C + 16\alpha\mu^2)}}{2\alpha} - \frac{3\mu}{2}[tan^2(\sqrt{\mu}\rho) + cot^2(\sqrt{\mu}\rho)],$$

$$u(\rho) = -\frac{5\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(16C + \alpha\mu^2)}}{8\alpha} - \frac{3\mu}{4}\{\tan(\sqrt{\mu}\rho)[\tan(\sqrt{\mu}\rho) \mp \sec(\sqrt{\mu}\rho)]\},$$

Benzer şekilde, (3.19)-(3.22)'de $A_1 = 0,\ A_2 \neq 0$ olarak ayarlanırsa ihmal edilen daha fazla periyodik çözümleri elde edilir.

(ii) Eğer $\mu > 0$ ve (3.19)-(3.22)'de $A_1 = 0,\ A_2 \neq 0$ olarak ayarlanırsa sırasıyla periyodik dalga çözümlerini elde edilir;

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)}}{2\alpha} - \frac{3\mu}{2} tan^2\left(\sqrt{\mu}\rho - \rho_0\right),$$

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C+\alpha\mu^2)}}{2\alpha} - \frac{3\mu}{2} cot^2\left(\sqrt{\mu}\rho - \rho_0\right),$$

$$u(\rho) = -\frac{2\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(C+16\alpha\mu^2)}}{2\alpha} - \frac{3\mu}{2}\left[tan^2\left(\sqrt{\mu}\rho - \rho_0\right) + cot^2\left(\sqrt{\mu}\rho - \rho_0\right)\right],$$

$$u(\rho) = -\frac{5\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(16C+\alpha\mu^2)}}{8\alpha} - \frac{3\mu}{4}\left\{\tan\left(\sqrt{\mu}\rho - \rho_0\right)\left[\tan\left(\sqrt{\mu}\rho - \rho_0\right) \mp \sec\left(\sqrt{\mu}\rho - \rho_0\right)\right]\right\},$$

burada $\rho_0 = tanh^{-1}(A_1/A_2)$.

Karmaşık Çözümler;

(i) Eğer μ<0 ve (3.18)'de $A_2 = 0,\ A_1 \neq 0$ olarak ayarlanırsa yalnızca karmaşık çözümleri bulunur;

$$u(\rho) = -\frac{5\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(16C+\alpha\mu^2)}}{8\alpha} + \frac{3\mu}{4}\left\{\tan\left(\sqrt{-\mu}\rho\right)\left[\tan\left(\sqrt{-\mu}\rho\right) \mp i\sec\left(\sqrt{-\mu}\rho\right)\right]\right\}$$

(ii) Eğer μ<0 ve ${A_1}^2 > {A_2}^2$ alındıktan sonra (3.18)'i kullanarak karmaşık soliter çözümleri elde edilir;

$$u(\rho) = -\frac{5\alpha\mu \mp \sqrt{\alpha(16C+\alpha\mu^2)}}{8\alpha} + \frac{3\mu}{4}\left\{\tan\left(\sqrt{-\mu}\rho - \rho_0\right)\left[\tan\left(\sqrt{-\mu}\rho - \rho_0\right) \mp i\sec\left(\sqrt{-\mu}\rho - \rho_0\right)\right]\right\}$$

burada $\rho_0 = tanh^{-1}(A_2/A_1)$.

Bu çalışmada bildirilen tüm çözümler, yöntemlerle elde edilemeyen orijinal denklem (3.1)'e geri getirilerek mathematica ile doğrulanmıştır (Sönmezoğlu vd., 2015).

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişleme yönteminin geliştirilmiş, genelleştirilmiş ve genişletilmiş versiyonunu kullanarak $(2+1)$ boyutlu kırılma soliton denklemlerinin tam hareketli dalga çözümlerini elde ettik. Genel olarak, elde edilen kesin ve örtük analitik çözümler, çeşitli keyfi parametreleri içeren formlardır. Bu çözümler hiperbolik, trigonometrik, rasyonel ve Jacobi eliptik fonksiyonlarla ifade edilir. Parametreler özel değerler olarak alındığında, hareket eden dalga çözümlerinden yeni tek dalga çözümleri, periyodik çözümler ve karmaşık çözümler türetilir. Genelleştirilerek elde edilen çözümler Jacobi eliptik fonksiyonlar açısından olup bazı koşullar altında bu sonuçlar hiperbolik fonksiyonlar ve trigonometrik fonksiyonlar şeklinde değişmektedir. Genişletilmiş sürümde kullanılan ansatz, $\left(\frac{G'}{G}\right)-$genişleme yönteminin geliştirilmiş sürümündeki ansatz'dan daha geneldir. Parametreleri $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişleme yönteminin genişletilmiş sürümünde ayarlarsak $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişletme yönteminin geliştirilmiş sürümüyle elde edilen sonuçları kurtarırız. Bu nedenle $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişleme yönteminin geliştirilmiş versiyonunu kullanarak doğrusal olmayan evrim denklemlerinin yeni ve daha genel tam hareketli dalga çözümlerini elde ettiğimizi iddia edebiliriz. $\left(\frac{G'}{G}\right)$-genişletme yönteminin geliştirilmiş, genelleştirilmiş ve genişletilmiş versiyonunun doğrudan, özlü, güçlü, etkili ve kullanışlı teknikler olduğu ve birçok lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabileceği sonucuna varıyoruz.

KAYNAKÇA

Abdou, M.A. (2007). The extended F-expansion method and its application for a class of nonlinear evolution evolution equations, Chaos, *Solitons and Fractals*, 31, 95-104.

Abdusalam, H. A. (2005). On improved complex tanh-method, Int. J. *Nonlinear Sci. Numer, Simul*, 6, 99-106.

Ablowitz, M.J., Clarkson, P.A. (1991). Solitons, nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Babolian, E., Biazar, J., Vahidi, A.R., (2005). Solution of a system of nonlinear equations by Adomian decomposition method., *Appl. Math. Comput*., 150, 847-854.

Bogoyavlenskii, O.I., (1990). Breaking solitons in 2+1-dimensional integrable equations, *Uspekhi Mat. Nauk*. 45(4), 17-27.

Boussinesq, J., (1871). Theorie de I'intumescence liquid appelle onde solitare ou de conference, *Sitges, Bristol*, UK:IOP;328-30

Cheng, Y. and Li B..(2003). Symbolic computation and construction of soliton-like solutions to the (2+1)-dimensional breaking soliton equation, *Commun. Theor. Phys*. 40, 137-142.

Guo, P., Wu, X., Wang, L-bi, (2015). Multiple soliton solutions fort he variant Boussinesq equations, *Advences in Difference Equations*, 37.

He, J.H., (2000). Variational iteration method for autonomus ordinary differantial system, *Applied Mathematicd and Computational Applications*, 114, 115-123.

He, J.H., (2005). Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos*, Solitons and Fractals, 26, 695-700.

He, J.H., (2005). Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems, *Int. J. Nonlinear Sci*. Numer. Simul., 6, 163-168.

Hereman, W. and Nuesir, A., (1997). Symbolic methods to construct exact solutions of nonlinear partial differential equations, *Mathematics and Computers in Simulation*, 43, 13-27.

Khatami, L., Tolou, N., Mahmoudi, J., Rezvani, M., (2008). Application of homotopy analysis method and variational iteration method for shock wave equation, *J. Applied Sci*. 8, 848-853.

Khuri, S.A., (2001). A Laplace decomposition algorithm applied to class of nonlinear differantial equations, *J. Math. Appl*. 141-155.

Koca, K., (2001). Kısmi Türevli Denklemler, *Gündüz Eğitim ve Yayıncılık*, Ankara.

Liu, H.M., (2004). Variational approach to nonlinear eletrochemical system, *Int J. Nonlinear Sci*. Numer. Simul., 5, 95-96.

Liu, J.B., Yang, K.Q., (2004). The extended F-expansion method and exact solutions of nonlinear PDEs, *Chaos*, Solitons and Fractal, 22, 111-121.

Liu, S.K., Fu, Z.T., Liu, S.D., Zhao, Q., (2001). Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations, *Physc. Lett*. A 289, 69-74.

Lü, H, L., Liu, X. Q., Niu, L,. (2010). A Generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method and its Applications to nonlinear Evolutions Equations, *Appl. Math. Comput*, 215, 3811-3816.

Malik, A., Chand, F., Kumar, H. & Mishra, S. C. (2012). Exact solutions of the Bogoyavlenskii equation using the multiple (G'/G)-expansion method. *Computers & Mathematics with Applications, Volume* (64), Issue 9, 2850-2859.

Olivier, P.J., (1968). Applications of Lie Groups to Differantial Equations, *Springer*, New York.

Parkes, E.J., Duffy, B.R., Abbott, P.C., (2002). The jacobi elliptic function method for finding periodic-wave solutions to nonlinear evolution equations, *Physc. Lett*. A 295, 280-286.

Peng, Y. and Shen, M. (2006). On exact solutions of Bogoyavlenskii equation, *Pramana J. Phys*., 67, 449-456.

Peng, Z. and Krishna, E. V. (2005). Two classes of new exact solutions to (2+1)-dimensional breaking soliton equation, *Commun. Theor. Phys*. 43. 205-207.

Ren, Y. J., Liu S. T. and H. Q. Zhang, (2006). On a generalized extended F-expansion method, *Commun. Theor. Phys*., 45,15-28.

Rogers, C., Shadwick, W. F., (1982). Backlund Transformation, *Academia Press*, New York.

Russels, J.S., (1845). Reports on Waves, Made to meeting ,n 1842 and 1843, Reports of the fourteen meeting of the British Association for the advancement of science held at York in september 1844, John Murray, Almerable Street, London

Sönmezoğlu, A., Ekici, M. and Duran, D.,(2015). Constructing of Exact Solutions to the (2+1) Dimensional Breaking Soliton Equations by the Multiple $\left(\frac{G'}{G}\right)$-Expansion Method , J. *Adv. Math. Stud.* 7, 27-42.

Wazwaz, A.M., (2008). Single and multiple-soliton solutions for the (2+1)-dimensional KdV equation, *Appl. Math. Comput*., 204, 20-26.

Wazwaz, A.M., (2008). Single and multiple-soliton solutions for the (2+1)-dimensional KdV equation, *Appl. Math. Comput*., 204, 20-26.

Wazwaz, A.M., (2010). Integrable (2+1)-dimensional and (3+1)-dimensional breaking soliton equations, *Phys. Scr*. 81, 035005.

Weiss, J., Tabor, M., Garnevale, G., (1983). The Painleve propety for partial differantial equations, *J. Math. Phys*., 24, 522-526.

Yan, C.T., (1996). A simple transformation for nonlinear waves, *Phys. Lett*. A 224, 77-84.

Yaşar, İ. B., (2005). Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, *Siyasal Kitabevi*; Ankara.

Zayed, E. M. E. and Gepreel, K. A., (2009). Some applications of the $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method to non-linear partial differantial equations, *Appl. Math. Comput* 212, 1-13.

Zayed, E. M. E. (2009). New traveling wave solutions for higher dimensional nonlinear evolution equations using a generalized G'/G-expansion method. *Journal of Physics A*: *Mathematical and Theoretical, Volume* (42), Number 19, 195202.

Zhang, J., Wei, X., Lu, Y., (2008). A generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method and its appliactions, *Physc. Lett*. A 372, 3653-3658.

Zhang, S., (2007). A generalized new auxiliary equation method and its application to the (2+1)-dimensional breaking soliton equation, *Comput. Math. Appl*. 190, 510-516.

Zhang, S., (2007). New exact non-travelling wave and coefficient function solutions of the (2+1)-dimensional breaking soliton equation, *Phys, Lett*. A. 368, 470-475.

Zhang, S., (2008). Application of Exp-function method to higher dimensional nonlinear evolution equation, *Chaos* Solitons and Fractals, 38, 270-276.

Zhang, S., (2011). A further improved extended Fan sub-equation method for (2+1)-dimensional breaking soliton equations, *Appl. Math. Comput*.,.199, 259-267.

Zhang, S., Wang, W., Tong, J. L., (2009). A Generalized $\left(\frac{G'}{G}\right)$-expansion method and its Applications to the (2+1)-dimensional Broer-Kaup Equations, *Appl. Math. Comput*. 209, 399-404.

Zhao, Z., Dai, Z. and Mu, G. (2011). The breather-type and periodic soliton solutions for the (2+1)-dimensional breaking soliton equation, *Comput. Math. Appl*. 61, 2048-2052

EK - 1

e_0	e_1	e_2	$G(\rho)$	$G'(\rho)$
1	$-(1+m^2)$	m^2	$sn(\rho)$	$cn(\rho)dn(\rho)$
1	$-(1+m^2)$	m^2	$cd(\rho)$	$-(1-m^2)sd(\rho)nd(\rho)$
$1-m^2$	$2m^2-1$	$-m^2$	$cn(\rho)$	$-sn(\rho)dn(\rho)$
m^2-1	$2-m^2$	-1	$dn(\rho)$	$-m^2 sn(\rho)cn(\rho)$
m^2	$-(1+m^2)$	1	$ns(\rho)$	$-ds(\rho)cs(\rho)$
m^2	$-(1+m^2)$	1	$dc(\rho)$	$(1-m^2)nc(\rho)sc(\rho)$
$-m^2$	$2m^2-1$	$1-m^2$	$nc(\rho)$	$sc(\rho)dc(\rho)$
-1	$2-m^2$	m^2-1	$nd(\rho)$	$m^2 sd(\rho)cd(\rho)$
$1-m^2$	$2-m^2$	1	$cs(\rho)$	$-ns(\rho)ds(\rho)$
1	$2-m^2$	$1-m^2$	$sc(\rho)$	$nc(\rho)dc(\rho)$
1	$2m^2-1$	$m^2(m^2-1)$	$sd(\rho)$	$nd(\rho)cd(\rho)$
$m^2(m^2-1)$	$2m^2-1$	1	$ds(\rho)$	$-cs(\rho)ns(\rho)$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}(1-m^2)$	$\frac{1}{4}$	$ns(\rho)\pm cs(\rho)$	$-ds(\rho)cs(\rho)\pm ns(\rho)ds(\rho)$
$\frac{1}{4}(1-m^2)$	$\frac{1}{2}(1+m^2)$	$\frac{1}{4}(1-m^2)$	$nc(\rho)\pm sc(\rho)$	$sc(\rho)dc(\rho)\pm nc(\rho)dc(\rho)$
$\frac{m^2}{4}$	$\frac{1}{2}(m^2-2)$	$\frac{1}{4}$	$ns(\rho)\pm ds(\rho)$	$-ds(\rho)cs(\rho)\pm cs(\rho)ns(\rho)$
$\frac{m^2}{4}$	$\frac{1}{2}(m^2-2)$	$\frac{m^2}{4}$	$sn(\rho)\pm icn(\rho)$	$dn(\rho)cn(\rho)\pm isn(\rho)dn(\rho)$
0	1	-1	$sech(\rho)$	$-sech(\rho)tanh(\rho)$
0	1	1	$csch(\rho)$	$-csch(\rho)coth(\rho)$
0	-1	1	$sec(\rho)$	$sec(\rho)tan(\rho)$
0	0	1	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{1}{\rho^2}$
0	$-(1+m^2)$	m^2	$sn(\rho)$	$cn(\rho)dn(\rho)$

Burada $0<m<1$ Jacabi eliptik fonksiyon modülüdür ve $i=\sqrt{-1}$ dir.

EK – 2

Jacobi eliptik fonksiyonları $sn(\rho), cn(\rho), dn(\rho), ns(\rho), cs(\rho), ds(\rho), sc(\rho), sd(\rho)$ aşağıdaki gibi $m \to 1$ olduğunda hiperbolik fonksiyonlara dönüşür;

$$sn(\rho) \to tan(\rho), \quad cn(\rho) \to sech(\rho), \quad dn(\rho) \to sech(\rho), \quad ns(\rho) \to coth(\rho),$$

$$cs(\rho) \to cosech(\rho), \quad ds(\rho) \to cosech(\rho), \quad sc(\rho) \to sinh(\rho), \quad sd(\rho) \to sinh(\rho)$$

ve $m \to 0$ olduğunda ise trigonometrik fonksiyona dönüşür,

$$sn(\rho) \to sin(\rho), \quad cn(\rho) \to cos(\rho), \quad dn(\rho) \to 1, \quad ns(\rho) \to cosec(\rho),$$

$$cs(\rho) \to cot(\rho), \quad ds(\rho) \to cosec(\rho), \quad sc(\rho) \to tan(\rho), \quad sd(\rho) \to sin(\rho).$$

EK – 3

$$cd(\rho) = \frac{cn(\rho)}{dn(\rho)}, \quad dn(\rho) = \frac{dn(\rho)}{cn(\rho)}, \quad nc(\rho) = \frac{1}{cn(\rho)}, \quad nd(\rho) = \frac{1}{dn(\rho)},$$

$$cs(\rho) = \frac{cn(\rho)}{sn(\rho)}, \quad sc(\rho) = \frac{sn(\rho)}{cn(\rho)}, \quad sd(\rho) = \frac{sn(\rho)}{dn(\rho)}, \quad ds(\rho) = \frac{dn(\rho)}{cn(\rho)}.$$