T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL AÇILIM METODUYLA PERTÜRBE EDİLMİŞ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

ASLI KARAOĞLAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

YOZGAT - 2022

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL AÇILIM METODUYLA PERTÜRBE EDİLMİŞ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

ASLI KARAOĞLAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

YOZGAT - 2022

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İMZA

ASLI KARAOĞLAN

……/……/……

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL AÇILIM METODUYLA PERTÜRBE EDİLMİŞ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİNİN ARAŞTIRILMASI

ASLI KARAOĞLAN

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

Optik soliton molekülleri, telekomünikasyon mühendisliğinde en önemli taşıyıcı parçaları oluşturur. Optik fiberler bağlamında bu dinamiği ele almak için çeşitli modeller mevcuttur. Bu çalışmada, Kerr olmayan nonlineerliğe ve üçüncü dereceden dağılıma sahip negatif indeksli materyallerde optik solitonların dinamiği incelendi. Dört tür nonlineerlik durumu göz önüne alındı. Bunlar Kerr yasası, kuvvet yasası, parabolik yasası ve çift kuvvet yasasıdır. Exp-fonksiyon yöntemi yardımıyla, ele alınan modele hiperbolik, trigonometrik ve düzlem dalga çözümleri elde edildi. Ayrıca, çift kırılımlı fiberlerdeki optik solitonlar da bu çalışmada gösterildi. Aynı integrasyon yaklaşımı, bu şemanın yan ürünü olarak ortaya çıkan diğer çözümlerle birlikte tekil soliton çözümleri ortaya çıkarmak için benimsendi. Dahası, kademeli sistemler ve titreşen solitonların özel durumları da incelendi.

2022, viii+51

ANAHTAR KELİMELER: Üstel fonksiyonlar, Hiperbolik fonksiyonlar, Trigonometrik fonksiyonlar, Rasyonel fonksiyon çözümler

ABSTRACT

MASTER THESIS

INVESTIGATION OF EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR SCHRODINGER EQUATION PERTURNED BY EXPONENT EXPANSION METHOD

ASLI KARAOĞLAN

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

Optical soliton molecules form the most important carrier bits in telecommunication engineering. A variety of models are available to address this dynamics in the context of optical fibers. In this study, the dynamics of optical solitons in negative-index materials with non-Kerr nonlinearity and third-order dispersion is investigated. Four types of nonlinearities are considered. They are Kerr law, power law, parabolic law and dual-power law. With the help of exp-function method, hyperbolic, trigonometric and plane wave solutions to the governing model are recovered. Optical solitons in birefringent fibers is also displayed in this study. The same integration approach is adopted to reveal singular soliton solutions along with other solutions that fall out as a by product of this scheme. Moreover, the special cases of cascaded systems and Thirring solitons are examined.

2022, viii+51

KEYWORDS: Exponential functions, Hyberbolic functions, Trigonometric functions, Rational function solutions

ÖNSÖZ

Akademik bilgisi ve tecrübesiyle bana yeni bir ufuk açan, desteğini ve hoşgörüsünü her daim hissettiren tez çalışmamın her adımında yanımda olan danışmanım Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na ve Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ'ye teşekkürlerimi sunuyorum.

Tezi inceleyerek değerli yorumlarıyla teze katkı sağlayan jüri üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman maddi ve manevi desteğini yanımda hissettiğim ve yüksek lisans eğitimim süresince bana moral veren eşime sonsuz teşekkür ederim.

İMZA

ASLI KARAOĞLAN

……/……/……

İÇİNDEKİLER

Tez Onay Sayfası……...……. ii

Tez Beyanı……... iii

Özet……. iv

Abstract……...… v

Önsöz……...… vi

İçindekiler…… vii

Simgeler ve Kısaltmalar Listesi……...……...… viii

1. GİRİŞ…….....…… 1

2. EXP-AÇILIM YÖNTEMİ …….…… 3

3.PERTÜRBE EDİLMİŞ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ ……...…….. 6

3.1. Analitik Çözümler ……... 6

3.2. Kerr Yasası …..…… 9

3.3. Kuvvet Yasası..……...……. 18

3.4. Parabolik Yasası ……..……... 21

3.5. Çift Kuvvet Yasası ……..…… 24

4. KERR NONLİNEERLİĞE SAHİP ÇİFT KIRILIMLI FİBERLERDE OPTİK SOLİTONLAR…….…….…… 28

4.1. Çift Kırılımlı Fiberlere Uygulama …….……..... 28

4.1.1. Kademeli Sistem……..…...…….. 35

4.1.2. Titreşen Solitonlar……..……..……..… 40

5. SONUÇ VE ÖNERİLER ……...……..… 46

6. KAYNAKLAR…… 47

ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
α	**:** alfa
β	**:** beta
δ	**:** delta
ε	**:** epsilon
η	**:** eta
θ	**:** teta
λ	**:** lambda
ρ	**:** ro
σ	**:** sigma
τ	**:** tau
φ	**:** phi
v	**:** hız
ψ	**:** psi
ξ	**:** ksi
κ	**:** kappa
ζ	**:** zeta
Kısaltmalar	**Açıklamalar**
NLPDE	**:** Doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklem
NLSE	**:** Lineer olmayan Schrödinger denklemi
GVD	**:** Grup hız dağılımı
XPM	**:** Çapraz faz modülasyon

1. GİRİŞ

Soliton teorisinde tam çözümler, integrallenebilir sistemler, Painleve analizi ve Hamilton yapısı öne çıkan konulardır. Matematiksel denklemlerin tam çözümleri, nonlineer optik, plazma fiziği ve diğerleri gibi nonlineer bilimdeki ilgili fenomenlerin ve süreçlerin nitel özelliklerinin doğru anlaşılmasında önemli bir rol oynar. Nonlineer kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümünü türetmek önemlidir. Bu durum, tamsayı veya kesir mertebeli türevlere dayalı fenomenlerin karmaşıklığını anlamamıza yardımcı olabilir. Ve tam çözüm, bu sistemlerin kararlılığını analiz etmemize ve nonlineer kısmi diferansiyel denklemlerde nümerik analiz sonuçlarını doğrulamamıza da yardımcı olabilir.

Son zamanlarda doğrusal olmayan oluşum denklemlerinin çözümlerini elde etmek için çeşitli analitik ve sayısal yöntemler tanıtılmıştır. Bu yöntemden bazıları F – fonksiyonu yöntemi (Yomba, 2005), exp – fonksiyon yöntemi (He ve Wu, 2006), Hirota' nın çift doğrusal yöntemi (Hirota, 1973), homotopi pertürbasyon yöntemi (He, 2005), varyasyonel yineleme yöntemi (Abdou ve Soliman, 2005; He, 2004), Adomian Pade yaklaşımı (Abassy vd., 2004), Lie grubu yöntemi (Antonova ve Biswas, 2009), homojen denge yöntemi (Wang, 1995), ters saçılma dönüşümü yöntemi (Ablowitz ve Clarkson, 1991), Jacobi eliptik açılım yöntemi (Liu vd., 2001), sinüs – cosinüs yöntemi (Tascan ve Bekir, 2009), (G'/G) – açılım yöntemi (Ozis ve Aslan, 2009) ve geliştirilmiş tan $(\phi(\xi)/2)$ – açılım yöntemi (Manafian vd., 2016) ve diğerleridir.

Lineer olmayan Schrödinger denklemi birçok doğa biliminde olduğu kadar mühendislikte de merkezi bir öneme sahiptir. Örneğin, doğrusal olmayan optik protein kimyası, plazma fiziği ve akışkanlar dinamiği. Çift kırılma, kaba kullanım sırasında fiber bükülme nedeniyle optik fiberlerde meydana gelen doğal bir olgudur. Bu, sonuçta optik çift kırılma olarak bilinen darbelerin bölünmelerini sağlayan diferansiyel grup gecikmesine yol açar. Çift kırılımlı fiberlerdeki optik solitonların dinamikleri geçmişte çeşitli durumlarda incelenmiştir (Khan ve Akbar, 2013; Roshid vd., 2014; Bache vd., 2008; Moses vd., 2008; Bhrawy vd., 2014; Guzman vd., 2015; Zhou vd., 2015;Sarma ve Biswas, 2014;Bhrawy vd., 2014; Biswas vd., 2012; Savescu vd., 2013; Khan vd., 2013; Bhrawy vd., 2014; Mirzazadeh vd., 2016; Biswas vd., 2014; Zhou vd., 2015; Mirzazadeh, 2016; Kara vd., 2016; Savescu vd., 2016; Triki vd., 2016; Kumar vd., 2016; Sardar vd., 2016; Mirzazadeh vd., 2015). Çift kırılımlı fiberler yoluyla solitonun yayılımını modelleyen

vektör bağlantılı doğrusal olmayan Schrödinger denklemine solitonlar ve diğer çözümleri çıkarmak için kullanılan birkaç matematiksel yöntem vardır.

Bu çalışmada, $\exp(-(\phi(\xi))$–açılım yaklaşımı (Khan ve Akbar, 2013; Roshid vd., 2014; Kaplan ve Bekir, 2016) kullanılarak Kerr olmayan nonlineerliğe ve üçüncü dereceden dağılıma sahip negatif indeksli materyallerdeki solitonların dinamiklerini yöneten pertürbe edilmiş doğrusal olmayan Schrödinger denklemine tam soliton çözümler elde edildi. Kerr yasası, kuvvet yasası, parabolik yasası ve çift kuvvet yasası dahil nonlineerliğin dört farklı formu ele alındı. Bu takdirde, bu yasalara sahip model denklem için hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyon çözümler türetildi. Ayrıca, bu çalışmada, Kerr yasası nonlineerliğine sahip vektör çiftlenmiş doğrusal olmayan Schrödinger denklemi $\exp(-(\phi(\xi))$–açılım yaklaşımı yardımıyla integre edildi. Dahası, titreşen solitonların yanı sıra kademeli sistemin iki özel durumu da incelendi. Sonuç olarak, benimsenen integrasyon tekniğiyle çift kırılımlı fiberlerdeki optik solitonlar elde edildi. Detaylar sonraki bölümlerde verilecektir.

2. EXP-AÇILIM YÖNTEMİ

Bu bölümde, doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin (NLPDE) hareket eden dalga çözümlerini oluşturmak için exp(-ϕ(ξ)) açılım yöntemi (Khan ve Akbar, 2013; Roshid vd., 2013) tanımlanacaktır ve daha sonra bu yöntem, Kerr olmayan nonlineerliğe ve üçüncü dereceden dağılıma sahip pertürbe edilmiş doğrusal olmayan Schrödinger denklemine ve Kerr yasası nonlineerliğine sahip vektör çiftlenmiş doğrusal olmayan Schrödinger denklemine uygulanacaktır. Ayrıca, bu yöntem ile kademeli sistem ve titreşen solitonlar da incelenecektir.

$u(x,t)$ için verilen lineer olmayan kısmı diferensiyel denklem (NLPDE), P bir polinom olmak üzere

$$P\,(u_t, u_x, u_{xt,} u_{tt,} u_{xx,} \ldots) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde verilsin.

exp(-ϕ(ξ)) açılım yönteminin ana kısmı aşağıda sunulmaktadır:

1. Adım: (2.1) denkleminin hareket eden dalga çözümlerini bulmak için

$$u(x,t)=U(\xi), \quad \xi = x - vt \tag{2.2}$$

şeklinde dalga değişkeni belirlenir.

Burada v daha sonra belirlenecek bir sabittir. (2.2) denklemi, (2.1) denkleminde yerine koyulursa $U' = \frac{\partial U(\xi)}{\partial \xi}$

olmak üzere aşağıdaki adi diferensiyel denklem (ODE) elde edilir:

$$Q(U, U', U'', U''', \ldots) = 0. \tag{2.3}$$

2. Adım: (2.3) adi diferensiyel denkleminin çözümünün aşağıdaki gibi ifade edilebileceği varsayılsın.

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^{M} A_i e^{-i\phi(\xi)} \tag{2.4}$$

burada A_i $(0 \le i \le M)$, A_M sıfırdan farklı olacak şekilde daha sonra belirlenecek sabitlerdir ve $\phi(\xi)$ fonksiyonu

$$\phi'(\xi) = e^{-\phi(\xi)} + \mu e^{\phi(\xi)} + \lambda \tag{2.5}$$

denklemini sağlar.

(2.5) denklemi aşağıdaki gibi çözümlere sahiptir:

1. $\mu \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ iken

$$\phi(\xi) = ln\left(- \frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(\xi+c)\right)+\lambda}{2\mu} \right). \tag{2.6}$$

2. $\mu \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu < 0$ için

$$\phi(\xi) = ln\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\xi+c)\right)-\lambda}{2\mu} \right). \tag{2.7}$$

3. $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ ise

$$\phi(\xi) = -ln\left(\frac{\lambda}{\exp(\lambda(\xi+c)-1)} \right). \tag{2.8}$$

4. $\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda

$$\phi(\xi) = ln\left(- \frac{2(\lambda(\xi+c)+2)}{\lambda^2(\xi+c)} \right). \tag{2.9}$$

5. $\mu = 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ iken

$$\phi(\xi) = ln(\xi + c). \tag{2.10}$$

Burada c integrasyon sabitidir.

3. Adım: (2.3) denkleminde bulunan en yüksek dereceden türev ve lineer olmayan terimler arasında homojen balans göz önüne alınarak pozitif M tamsayısı belirlenebilir.

4. Adım: (2.4) denklemi (2.3) denkleminin içine koyularak ve $\exp(-\phi(\xi))^i$ $(i = 0,1,2,\dots)$ nin aynı dereceden olan tüm terimleri düzenlenerek $\exp(-\phi(\xi))$ nin bir polinomu elde edilir. Bu polinomun her bir katsayısı sıfıra eşitlenerek A_i , v, λ, μ için bir cebirsel denklemler sistemi elde edilir. Bu sistem çözülerek, (2.1) denklemi için çeşitli tam çözümler oluşturulabilir.

3. PERTÜRBE EDİLMİŞ LİNEER OLMAYAN SCHRÖDİNGER DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ

3.1. Analitik Çözümler

Kerr olmayan nonlineerliğe ve üçüncü dereceden dağılıma sahip negatif indeksli materyalde solitonların dinamiği lineer olmayan Schrödinger denklemi tarafından kontrol edilir ve bu denklem boyutsuz formda aşağıdaki gibi verilir (Zhou vd., 2015; Zhou vd., 2016):

$$iu_t + au_{xx} + bu_{xt} + cF(|u|^2)u = \\ -i\lambda u_x - is(|u|^2u)_x - i\mu(|u^2|)_x u - i\theta|u|^2u_x \\ -i\gamma u_{xxx} - \theta_1(|u|^2u)_{xx} - \theta_2|u|^2u_{xx} - \theta_3u^2u^*_{xx}. \quad (3.1)$$

Burada $u(x,t)$ karmaşık alan genliğidir. a, b ve c grup hız dağılımı, uzaysal-zamansal dağılım ve Kerr olmayan nonlineerliğin katsayılarıdır. Ve λ, s, μ, θ ve γ modlar arası dağılımı, kendiliğinden dikleşmeyi, Raman etkisini, doğrusal olmayan dağılımı ve üçüncü dereceden dağılımı açıklar. Son üç terim, negatif indeksli materyal bağlamında görünür (Zhou vd., 2015; Zhou vd., 2016; Biswas vd., 2014; Xu vd.,2016; Saha ve Sarma , 2013; Yang ve Zhang, 2011).

(3.1) denklemini çözmek için

$$u(x,t) = P(\xi)e^{i\phi(x,t)} \quad (3.2)$$

dalga dönüşümü kullanılır.

Burada $P(\xi)$ dalganın şeklini temsil eder ve

$$\xi = x - vt, \quad (3.3)$$

$$\phi(x,t) = \kappa x + wt + \zeta \quad (3.4)$$

dır. (3.2) denkleminde $\phi(x,t)$ fonksiyonu solitonun faz bileşenini verir. Bu durumda (3.4) denkleminde κ, w ve ζ sırasıyla frekansı, dalga sayısını ve faz sabitini temsil eder. Son olarak, (3.3) denkleminde v solitonun hızını gösterir. (3.2) denklemi (3.1) denkleminde yerine yazılarak (3.1) denkleminin reel ve imajiner kısımları oluşturulur. (3.1) denkleminde görünen terimler aşağıdaki gibi hesaplanır:

u_x=$P'e^{i\phi(x,t)} - i\kappa P e^{i\phi(x,t)} = (P' - i\kappa P)e^{i\phi(x,t)}$

u_{xx}=$(P''-i\kappa P')e^{i\phi(x,t)} - i\kappa(P' - i\kappa P)e^{i\phi(x,t)} = (P'' - 2i\kappa P' - \kappa^2)e^{i\phi(x,t)}$

au_{xx}== $(aP'' - 2ai\kappa P' - a\kappa^2)e^{i\phi(x,t)}$

$u_t = -vP'e^{i\phi(x,t)} + iwPe^{i\phi(x,t)} = (-vP' + iwP)e^{i\phi(x,t)}$

$iu_t = -(ivP' + wP)e^{i\phi(x,t)}$

$u_{xt} = (-vP' + i\kappa Pv)e^{i\phi(x,t)} + iw(P - i\kappa P)e^{i\phi(x,t)}$

$= (-vP'' + w\kappa P + i\kappa vP' + iwP')e^{i\phi(x,t)}$

$bu_{xt} = (-bvP'' + bw\kappa P + ib\kappa vP' + ibwP')e^{i\phi(x,t)}$

$i\lambda u_x = (\kappa P\lambda + i\lambda P')e^{\phi(x,t)}$

$(|u|^2u)_x = \left(P^2Pe^{i\phi(x,t)}\right)_x = \left(P^3e^{i\phi(x,t)}\right)_x$

$= 3P^2P'e^{i\phi(x,t)} + iP^3(-\kappa)e^{i\phi(x,t)}$ $is(|u|^2u)_x = (3sP^2P' + \kappa P^3s)e^{i\phi(x,t)}$

$(|u|^2)_x = (P^2)_x = 2PP'$

$i\mu(|u|^2)_xu = 2i\mu P^2P'e^{i\phi(x,t)}$

$|u|^2u_x = P^2\left(Pe^{i\phi(x,t)}\right)_x = (P^2P' - i\kappa P^3)e^{i\phi(x,t)}$

$i\theta|u|^2u_x = (i\theta P^2P' + \kappa P^3\theta)e^{i\phi(x,t)}$

$u_{xx} = (P'' - 2i\kappa P' - \kappa^2P)e^{i\phi(x,t)}$

$u_{xxx} = (P''' - 2i\kappa P'' - \kappa^2P')e^{i\phi(x,t)} - i\kappa(P'' - 2i\kappa P' - \kappa^2P)e^{i\phi(x,t)}$

$= (P''' - 3i\kappa P'' - \kappa^2P' - 2\kappa^2P' + i\kappa^3P)e^{i\phi(x,t)}$

$i\gamma u_{xxx} = (i\gamma P''' + 3\gamma\kappa P'' - 3i\gamma\kappa^2P' - \gamma\kappa^3)e^{i\phi(x,t)}$

$(|u|^2u)_x = (3P^2P' - i\kappa P^3)e^{i\phi(x,t)}$

$(|u|^2u)_{xx} = (6P(P')^2 + 3P^2P'' - 3i\kappa P^2P')e^{i\phi(x,t)} - i\kappa(3P^2P' - i\kappa P^3)e^{i\phi(x,t)}$

$\theta_1(|u|^2u)_{xx} = (6\theta_1P(P')^2 + 3\theta_1P^2P'' - 6i\kappa\theta_1P^2P' - \kappa^2P^3)e^{i\phi(x,t)}$

$|u|^2u_{xx} = (P^2P'' - 2i\kappa P^2P' - \kappa^2P^3)e^{i\phi(x,t)}$

$\theta_2|u|^2u_{xx} = (\theta_2P^2P'' - 2i\theta_2\kappa P^2P' - \theta_2\kappa^2P^3)e^{i\phi(x,t)}$

$u_{xx} = (P'' - 2i\kappa P' - \kappa^2 P)e^{i\phi(x,t)}$ eşleniği

$u_{xx}^* = (P'' + 2i\kappa P' - \kappa^2 P)e^{i\phi(x,t)}$

$u^2 u_{xx}^* = (P^2 P'' - \kappa^2 P^3 + 2i\kappa P^2 P')e^{i\phi(x,t)}$

$\theta_3 u^2 u_{xx}^* = (\theta_3 P^2 P'' - \theta_3 \kappa^2 P^3 + 2i\theta_3 \kappa P^2 P')e^{i\phi(x,t)}$.

Bulunan bu ifadeler (3.1) denkleminde yerine yazılarak reel kısım

$(a - bv + 3\kappa\gamma)P'' - \big((1 - b\kappa)\omega + a\kappa^2 - \lambda\kappa + \gamma\kappa^3\big)P + cF(P^2)P +$

$(s\kappa + \theta\kappa - \theta_1\kappa^2 - \theta_2\kappa^2 - \theta_3\kappa^2)P^3 + 6\theta_1 P(P')^2 + (3\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)P^2 P'' = 0$ (3.5)

ve imajiner kısım

$(-v - 2a\kappa + b\omega + b\kappa v + \lambda - 3\gamma\kappa^2)P' + \big(3s + 2\mu + \theta - 2\kappa(3\theta_1 + \theta_2 - \theta_3)\big)P^2 P' +$

$\gamma P''' = 0$ (3.6)

şeklinde oluşturulur. İmajiner kısım denklemi

$\gamma = 0,$ (3.7)

$v = -\frac{2a\kappa - b\omega - \lambda}{1 - b\kappa}$ (3.8)

$3s + 2\mu + \theta - 2\kappa(3\theta_1 + \theta_2 - \theta_3) = 0$ (3.9)

şeklindeki ilişkileri gerektirir.

Bu nedenle, (3.7) denklemi aracılığıyla (3.5) denklemi

$(a - bv)P'' - \big((1 - b\kappa)\omega + a\kappa^2 - \lambda\kappa\big)P + cF(P^2)P + (s\kappa + \theta\kappa - \theta_1\kappa^2 - \theta_2\kappa^2 -$

$\theta_3\kappa^2)P^3 + 6\theta_1 P(P')^2 + (3\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)P^2 P'' = 0$ (3.10)

denklemine indirgenir. Analitik çözüm elde etmek için biri (3.10) denkleminde

$(a - bv)P'' - \big((1 - b\kappa)\omega + a\kappa^2 - \lambda\kappa\big)P + cF(P^2)P = 0$ (3.11)

denklemini bulmak için $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = -\theta_3$ ve $s = -\theta$ dönüşümlerini uygular (Ekici vd., 2017).

Burada

$\theta - \mu - 2\theta_3\kappa = 0.$ (3.12)

3.2. Kerr Yasası

$$F(q) = q \tag{3.13}$$

Kerr yasası nonlineerliği için, (3.1) denklemi

$$\begin{aligned} &iu_t + au_{xx} + b|u|^2u + bu_{xt} + c|u|^2u = \\ &-i\lambda u_x - is(|u|^2u)_x - i\mu(|u^2|)_x u - i\theta|u|^2u_x \\ &-i\gamma u_{xxx} - \theta_1(|u|^2u)_{xx} - \theta_2|u|^2u_{xx} - \theta_3u^2u^*_{xx} \end{aligned} \tag{3.14}$$

denklemine indirgenir ve (3.11) denklemi

$$(a - bv)P'' - \big((1 - b\kappa)\omega + a\kappa^2 - \lambda\kappa\big)P + cP^3 = 0 \tag{3.15}$$

şeklinde sadeleşir.

Bu alt bölümde, (3.14) denklemine hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyon çözümler elde etmek için $\exp(-\phi(\xi))$ açılım metodu kullanılacaktır. Bu yöntem için başlangıç hipotezi aşağıdaki gibi alınır:

$$P(\xi) = \sum_{i=0}^{N} A_i e^{-i\phi(\xi)}$$

burada $\phi(\xi)$ fonksiyonu

$$\phi'(\xi) = e^{-\phi(\xi)} + \rho e^{\phi(\xi)} + \tau$$

denklemini sağlar.

$O(P) = N$ $\qquad P'(\xi) = \sum_{i=0}^{N} -iA_i\phi'(\xi)e^{-i\phi(\xi)} =$

$\sum_{i=0}^{N} -iA_i(e^{-\phi(\xi)} + \rho e^{\phi(\xi)} + \tau)e^{-i\phi(\xi)}$ $\qquad O(P') = N + 1$

$O(P'') = N + 2.$

Homojen balans yöntemine göre (3.15) denkleminin çözümü şu şekildedir:

$O(P'') \sim O(P^3)$

$N + 2 = 3N$

$N = 1$

olduğundan

$$P(\xi) = A_0 + A_1 e^{-\phi(\xi)}. \tag{3.16}$$

Burada A_0 ve A_1 daha sonra belirlenecektir. Öyleki A_1 sıfırdan farklı bir sabittir ve $\phi = \phi(\xi)$ fonksiyonu

$$\phi'(\xi) = e^{-\phi(\xi)} + \rho e^{\phi(\xi)} + \tau \tag{3.17}$$

ile verilen yardımcı adi diferensiyel denklemini sağlar. Buradaki esas amaç, (3.16) denklemini (3.17) ile birlikte (3.15) denklemine koyarak, exp $(-\phi(\xi))$ nin tüm kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitleyerek ve elde edilecek cebirsel denklem sistemini çözerek istenen sonucu elde etmektir.

(3.17) denklemi aşağıdaki formlarda çözümlere sahiptir. Bu formlar 5 durumda incelenir.

1) $\rho \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho > 0$ olduğunda

$$\Psi' = e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau$$

$$\frac{d\Psi}{e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau} = d\xi$$

$$\int \frac{e^{\Psi} d\Psi}{\rho e^{2\Psi} + \tau e^{\Psi} + 1} = \xi + \mathrm{c}$$

$$\frac{1}{\rho} \int \frac{e^{\Psi} d\Psi}{\left(e^{\Psi} + \frac{\tau}{2\rho}\right)^2 - \left(\frac{\tau^2 - 4\rho}{4\rho^2}\right)} = \xi + c$$

$$e^{\Psi} + \frac{\tau}{2\rho} = \sqrt{\frac{\tau^2 - 4\rho}{4\rho^2}}\, thu$$

dönüşümü yapılırsa

$$e^{\Psi}d\Psi = \sqrt{\frac{\tau^2-4\rho}{4\rho^2}}\,(1-th^2u)du$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{1}{\rho}\int \frac{du}{\sqrt{\frac{\tau^2-4\rho}{4\rho^2}}} = -(\xi+c)$$

$$u = -\frac{(\xi+c)\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}$$

$$argth\left(\frac{e^{\Psi}+\frac{\tau}{2\rho}}{\sqrt{\frac{\tau^2-4\rho}{4\rho^2}}}\right) = -\frac{(\xi+c)\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}$$

$$e^{\Psi}+\frac{\tau}{2\rho} = -\frac{\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2\rho}\,th\left(\frac{(\xi+c)\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}\right)$$

$$\Psi = ln\left(-\frac{\sqrt{\tau^2-4\rho}\,th\left(\frac{(\xi+c)\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}\right)+\tau}{2\rho}\right)$$

bulunur.

2) $\rho \neq 0$ ve $\tau^2-4\rho<0$ için

$$\Psi' = e^{-\Psi}+\rho e^{\Psi}+\tau$$

$$\frac{d\Psi}{e^{-\Psi}+\rho e^{\Psi}+\tau} = d\xi$$

$$\int \frac{e^{\Psi}d\Psi}{\rho e^{2\Psi}+\tau e^{\Psi}+1} = \xi + c$$

$$\frac{1}{\rho}\int \frac{e^{\Psi}d\Psi}{\left(e^{\Psi}+\frac{\tau}{2\rho}\right)^2+\left(\frac{4\rho-\tau^2}{4\rho^2}\right)} = \xi + c$$

$$e^{\Psi}+\frac{\tau}{2\rho} = \sqrt{\frac{4\rho-\tau^2}{4\rho^2}}\,tgu$$

dönüşümüyapılırsa

$$e^{\Psi}d\Psi = \sqrt{\frac{4\rho-\tau^2}{4\rho^2}}\,(1+tg^2u)du$$

bulunur.Böylece

$$\frac{1}{\rho}\int \frac{du}{\sqrt{\frac{4\rho-\tau^2}{4\rho^2}}} = (\xi + c)$$

$$u = \frac{(\xi+c)\sqrt{4\rho-\tau^2}}{2}$$

$$arctg\left(\frac{e^{\Psi}+\frac{\tau}{2\rho}}{\sqrt{\frac{4\rho-\tau^2}{4\rho^2}}}\right) = \frac{(\xi+c)\sqrt{4\rho-\tau^2}}{2}$$

$$e^{\Psi}+\frac{\tau}{2\rho} = \frac{\sqrt{4\rho-\tau^2}}{2\rho}\,tg\left(\frac{(\xi+c)\sqrt{4\rho-\tau^2}}{2}\right)$$

$$\Psi = ln\left(\frac{\sqrt{4\rho-\tau^2}\,tg\left(\frac{(\xi+c)\sqrt{4\rho-\tau^2}}{2}\right)-\tau}{2\rho}\right)$$

elde edilir.

3) $\rho = 0$, $\tau \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho > 0$ iken

$$\Psi' = e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau$$

$$\frac{d\Psi}{e^{-\Psi}+\tau}=d\xi$$

$$\int\frac{e^{\Psi}d\Psi}{\tau e^{\Psi}+1}=\xi+\mathrm{c}$$

$$ln(1+\tau e^{\Psi})=\tau(\xi+c)$$

$$e^{\Psi}=\frac{e^{\tau(\xi+c)}-1}{\tau}$$

$$\Psi=-ln\left(\frac{\tau}{e^{\tau(\xi+c)}-1}\ \right)$$

elde edilir.

4) $\rho\neq 0\ \ ,\tau\neq 0$ ve $\tau^2-4\rho=0$ ise

$$\Psi'=e^{-\Psi}+\rho e^{\Psi}+\tau$$

$$\frac{d\Psi}{e^{-\Psi}+\rho e^{\Psi}+\tau}=d\xi$$

$$\int\frac{e^{\Psi}d\Psi}{\rho e^{2\Psi}+\tau e^{\Psi}+1}=\xi+\mathrm{c}$$

$$\frac{1}{\rho}\int\frac{e^{\Psi}d\Psi}{\left(e^{\Psi}+\frac{\tau}{2\rho}\right)^2-\left(\frac{\tau^2-4\rho}{4\rho^2}\right)}=\xi+c$$

$$\frac{1}{\rho}\int\frac{e^{\Psi}d\Psi}{\left(e^{\Psi}+\frac{\tau}{2\rho}\right)^2}=\xi+c$$

$$-\frac{1}{\rho\left(e^{\Psi}+\frac{\tau}{2\rho}\right)}=\xi+c$$

$$\rho e^{\Psi}=-\frac{1}{\xi+c}-\frac{\tau}{2}$$

$$\frac{\tau^2}{4}e^{\Psi} = -\frac{1}{\xi + c} - \frac{\tau}{2}$$

$$\Psi = ln\left(-\frac{2(\xi + c) + 4}{\tau^2(\xi + c)}\right)$$

bulunur.

5) $\rho = 0, \tau = 0$ ve $\tau^2 - 4\rho = 0$ durumunda

$$\Psi' = e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau$$

$$\frac{d\Psi}{e^{-\Psi}} = d\xi$$

$$\int e^{\Psi} d\Psi = \xi + \mathrm{c}$$

$$e^{\Psi} = \xi + c$$

$$\Psi = ln(\xi + c)$$

elde edilir.

Burada c integrasyon sabitidir. (3.16) ve (3.17) denklemleri yardımıyla

$\phi(\xi) = \Psi(\xi)$ olmak üzere

$$P(\xi) = A_0 + A_1 e^{-\Psi}$$

$$\Psi' = e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau$$

$$P'(\xi) = -A_1 \Psi' e^{-\Psi}$$

$$P''(\xi) = -A_1[\Psi'' e^{-\Psi} - (\Psi')^2 e^{-\Psi}]$$

$$= -A_1[\Psi'' - (\Psi')^2]e^{-\Psi}$$

$$\Psi''(\xi) = (\rho - e^{-\Psi})(e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau)$$

$$P^3(\xi) = \left(A_0 + A_1 e^{-\Psi}\right)^3$$

$$\Psi'' - (\Psi')^2 = (\rho - e^{-\Psi})(e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau) - (e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau)^2$$

$$= (e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau)(\rho - 2e^{-\Psi} - \rho e^{\Psi} - \tau)$$

ifadeleri bulunur. Bu ifadelerin kullanılmasıyla

$\phi(\xi) = \Psi(\xi)$ olmak üzere

$$P(\xi) = A_0 + A_1 e^{-\psi}$$

$$\Psi' = e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau$$

$$P'(\xi) = -A_1 \Psi' e^{-\Psi}$$

$$P''(\xi) = -A_1[\Psi'' e^{-\Psi} - (\Psi')^2 e^{-\Psi}]$$

$$= -A_1[\Psi'' - (\Psi')^2] e^{-\Psi}$$

$$\Psi''(\xi) = (\rho - e^{-\Psi})(e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau)$$

$$P^3(\xi) = \left(A_0 + A_1 e^{-\psi}\right)^3$$

$$\Psi'' - (\Psi')^2 = (\rho - e^{-\Psi})(e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau) - (e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau)^2$$

$$= (e^{-\Psi} + \rho e^{\Psi} + \tau)(\rho - 2e^{-\Psi} - \rho e^{\Psi} - \tau)$$

ve gerekli düzenlemelerle

$$P(\xi) = A_0 + A_1 e^{-\phi(\xi)},\ \phi'(\xi) = e^{-\phi(\xi)} + \rho e^{\phi(\xi)} + \tau$$

$$P'(\xi) = -A_1 \phi'(\xi) e^{-\phi(\xi)}$$

$$P'(\xi) = -A_1\left[e^{-2\phi(\xi)} + \rho + \tau e^{-\phi(\xi)}\right]$$

$$P''(\xi) = -A_1\left[-2\phi'(\xi) e^{-2\phi(\xi)} - \tau\phi'(\xi) e^{-\phi(\xi)}\right]$$

$$P''(\xi) = -A_1\left[-2e^{-2\phi(\xi)} - \tau e^{-\phi(\xi)}\right]\phi'(\xi)$$

$$P''(\xi) = A_1\left[2e^{-2\phi(\xi)} + \tau e^{-\phi(\xi)}\right]\left[e^{-\phi(\xi)} + \rho e^{\phi(\xi)} + \tau\right]$$

$$P''(\xi) = A_1\left[2e^{-3\phi(\xi)} + 2\rho e^{-\phi(\xi)} + 2\tau e^{-2\phi(\xi)} + \tau e^{-2\phi(\xi)} + \tau^2 e^{-\phi(\xi)} + \rho\tau\right]$$

$$P''(\xi) = A_1\left[2e^{-3\phi(\xi)} + 2\rho e^{-\phi(\xi)} + 3\tau e^{-2\phi(\xi)} + \tau^2 e^{-\phi(\xi)} + \rho\tau\right]$$

$$P^3(\xi) = \left[A_0 + A_1 e^{-\phi(\xi)}\right]^3$$

$$P^3(\xi) = A_0^3 + 3A_0^2 A_1 e^{-\phi(\xi)} + 3A_0 A_1^2 e^{-2\phi(\xi)} + A_1^3 e^{-3\phi(\xi)}$$

$$(a - bv)P'' = 2A_1(a - bv)e^{-3\phi(\xi)} + 3A_1\tau(a - bv)e^{-2\phi(\xi)}$$

$$+ A_1(2\rho + \tau^2)(a - bv)e^{-\phi(\xi)} + \rho\tau A_1(a - bv)$$

$$[(1 - b\kappa)w + a\kappa^2 - \lambda\kappa]P$$

$$= [(1 - b\kappa)w + a\kappa^2 - \lambda\kappa]A_0 + [(1 - b\kappa)w + a\kappa^2 - \lambda\kappa]A_1 e^{-\phi(\xi)}$$

$$cP^3(\xi) = cA_0^3 + 3cA_0^2 A_1 e^{-\phi(\xi)} + 3cA_0 A_1^2 e^{-2\phi(\xi)} + cA_1^3 e^{-3\phi(\xi)}$$

elde edilir. Böylece (3.15) denklemi yani

$$(a-bv)P''-\big((1-b\kappa)\omega+a\kappa^2-\lambda\kappa\big)P+cP^3=0$$

denklemi

$$[2A_1(a-bv)+cA_1^3]e^{-3\phi(\xi)}$$
$$+[3A_1\tau(a-bv)+3cA_0A_1^2]e^{-2\phi(\xi)}$$
$$[+A_1(2\rho+\tau^2)(a-bv)+3cA_0^2A_1+\{(b\kappa-1)w-a\kappa^2+\lambda\kappa\}A_1]e^{-\phi(\xi)}$$
$$+\rho\tau A_1(a-bv)+\{(b\kappa-1)w-a\kappa^2+\lambda\kappa\}A_0+cA_0^3=0$$

denklemine indirgenir. Daha sonra exp (ϕ(ξ)) nin katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$2A_1(a-bv)+cA_1^3=0$$
$$3A_1\tau(a-bv)+3cA_0A_1^2=0$$
$$A_1(2\rho+\tau^2)(a-bv)+3cA_0^2A_1+\{(b\kappa-1)w-a\kappa^2+\lambda\kappa\}A_1=0$$
$$\rho\tau A_1(a-bv)+\{(b\kappa-1)w-a\kappa^2+\lambda\kappa\}A_0+cA_0^3=0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Mathematica ile çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlarbulunur:

$$A_0=\frac{\sqrt{\tau^2(bv-a)}}{\sqrt{2c}}$$

$$A_1=\pm\frac{2\sqrt{\tau^2(bv-a)}}{\sqrt{2c}\,\tau}$$

$$w=\frac{-2\kappa\lambda+bv(4p-\tau^2)+a(2\kappa^2-4p+\tau^2)}{2b\kappa-2} \qquad (3.23)$$

Burada ρ ve τ keyfi sabitlerdir. (3.23) ile verilen çözüm seti, (3.16) denkleminde yerine yazılarak (3.15) denkleminin çözüm formülü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P(\xi)=\pm\frac{\sqrt{\tau^2(bv-a)}}{\sqrt{2c}}\left\{1+\frac{2}{\tau}e^{-\phi(\xi)}\right\}. \qquad (3.24)$$

(3.17) denkleminin genel çözümleri (3.15) denkleminde yerine yazılarak ve çıkan sonuç hipotez (3.2) ye yerleştirilerek, (3.14) denkleminin hiperbolik, trigonometrik ve düzlem dalga çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$\rho\neq0$ ve $\tau^2-4\rho>0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$u(x,t) = \pm\frac{\sqrt{\tau^2(\mathrm{b}v-\mathrm{a})}}{\sqrt{2\mathrm{c}}}\left\{1-\frac{4\rho}{\tau\sqrt{\tau^2-4\rho}\ \mathrm{th}\left(\frac{\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}\ (\xi+\mathrm{c})\right)+\tau^2}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{(-2\kappa\lambda+\mathrm{b}v(4\rho-\tau^2)+\mathrm{a}(2\kappa^2-4\rho+\tau^2)}{2\mathrm{b}\kappa-2}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.25}$$

$\rho\neq0$ ve $\tau^2-4\rho<0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümler

$$u(x,t) = \pm\frac{\sqrt{\tau^2(\mathrm{b}v-\mathrm{a})}}{\sqrt{2\mathrm{c}}}\left\{1+\frac{4\rho}{\tau\sqrt{4\rho-\tau^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\rho-\tau^2}}{2}\ (\xi+\mathrm{c})\right)-\tau^2}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{(-2\kappa\lambda+\mathrm{b}v(4\rho-\tau^2)+\mathrm{a}(2\kappa^2-4\rho+\tau^2)}{2\mathrm{b}\kappa-2}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.26}$$

$\rho=0,\tau\neq0$ ve $\tau^2-4\rho>0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$u(x,t) = \pm\frac{\sqrt{\tau^2(\mathrm{b}v-\mathrm{a})}}{\sqrt{2\mathrm{c}}}\left\{1+\frac{2}{\mathrm{e}^{\tau(\xi+\mathrm{c})}-1}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{(-2\kappa\lambda-\mathrm{b}v\tau^2)+\mathrm{a}(2\kappa^2+\tau^2)}{2\mathrm{b}\kappa-2}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.27}$$

$\rho\neq0$, $\tau\neq0$ ve $\tau^2-4\rho=0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$u(x,t) = \pm\frac{\sqrt{\tau^2(\mathrm{b}v-\mathrm{a})}}{\sqrt{2\mathrm{c}}}\left\{1-\frac{2}{\tau(\xi+\mathrm{c})+2}\right\}e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{(-2\kappa\lambda+\mathrm{b}v(4\rho-\tau^2)+\mathrm{a}(2\kappa^2-4\rho+\tau^2)}{2\mathrm{b}\kappa-2}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.28}$$

$\rho=0$, $\tau=0$ ve $\tau^2-4\rho=0$ olduğunda düzlem dalga çözümler

$$u(x,t) = \pm\frac{\sqrt{\tau^2(\mathrm{b}v-\mathrm{a})}}{\sqrt{2\mathrm{c}}}\left\{1-\frac{2}{\tau(\xi+\mathrm{c})}\right\}e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{(-2\kappa\lambda+2\mathrm{a}\kappa^2}{2\mathrm{b}\kappa-2}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.29}$$

3.3. Kuvvet Yasası

Kuvvet yasası için doğrusal olmayan ortam

$$F(q)=q^n \tag{3.30}$$

şeklindedir. Bu nonlineerliğe dayanarak (1) denklemi

$$iu_t + au_{xx} + b|u|^2u + bu_{xt} + c|u|^{2n}u =$$

$$-i\lambda u_x - is(|u|^2u)_x - i\mu(|u^2|)_x u - i\theta|u|^2u_x$$
$$-i\gamma u_{xxx} - \theta_1(|u|^2u)_{xx} - \theta_2|u|^2u_{xx} - \theta_3u^2u^*_{xx} \quad (3.31)$$

denklemine indirgenir öyle ki (3.11) denklemi

$$(a - bv)P'' - \big((1 - b\kappa)\omega + a\kappa^2 - \lambda\kappa\big)P + cP^{2n+1} = 0 \quad (3.32)$$

şeklinde sadeleşir.

(3.32) denkleminde P'' ve P^{2n+1} terimleri balans edilerek

$$O(P'')\sim O(P^{2n+1})$$
$$N + 2 = (2n + 1)N$$

$$N = \frac{1}{n}$$

elde edilir. Analitik bir çözüm elde etmek için biri, aşağıdaki (3.34) denklemini bulmak için (3.32) denkleminde

$$P = U^{\frac{1}{2n}} \quad (3.33)$$

dönüşümünü kullanır.

$$(a - bv)((1 - 2n)(U')^2 + 2nUU'') - 4n^2((1 - b\kappa)w + a\kappa^2-\lambda\kappa)U^2 + 4cn^2U^3 = 0. \quad (3.34)$$

Bu alt bölümde, (3.31) denklemine hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel çözüm fonksiyon çözümler elde etmek için exp(-ϕ(ξ)) açılım yöntemi kullanılacaktır. Homojen balans metoduna göre (3.34) denkleminin çözümü

$$O(UU'')\sim O(U^3)$$
$$N + N + 2 = 3N$$

$$N = 2$$

olduğundan

$$U(\xi) = A_0 + A_1e^{-\Phi(\xi)} + A_2\big(e^{-\Phi(\xi)}\big)^2 \quad (3.35)$$

şeklindedir.

Burada A_i $(i = 0,1,2)$ daha sonra belirlenecektir. Öyleki A_2 sıfırdan farklı bir sabittir ve $\Phi = \Phi(\xi)$ fonksiyonu (3.17) denklemini sağlar. (3.17) denklemi ile birlikte (3.35) denklemi, (3.34) denkleminin içine koyularak ve exp (-ϕ(ξ)) nin tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi, Mathematica ile çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$A_0 = -\frac{\rho(1+n)(a-bv)}{cn^2}$$

$$A_1 = -\frac{\tau(1+n)(a-bv)}{cn^2}$$

$$A_2 = -\frac{(1+n)(a-bv)}{cn^2}$$

$$w = \frac{-4n^2\kappa\lambda + \mathrm{a}(4n^2\kappa^2 + 4\rho - \tau^2) + \mathrm{b}v(\tau^2 - 4\mathrm{p})}{4n^2(b\kappa - 1)}. \qquad (3.36)$$

Burada ρ ve τ keyfi sabitlerdir. (3.36) çözüm seti (3.35) denkleminde yerine yazılarak, (3.34) denkleminin çözüm formülü

$$U(\xi) = -\frac{(1+n)(a-bv)}{cn^2}\left\{\rho + \tau e^{-\phi(\xi)} + e^{-2\phi(\xi)}\right\} \qquad (3.37)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç olarak, (3.31) denklemine ait hiperbolik, trigonometrik ve düzlem dalga çözümler aşağıdaki formlardadır:

$\rho \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho > 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$u(x,t) = \left\{ \frac{(1+n)(a-bv)}{cn^2} \left(\rho - \frac{2\rho\tau}{\sqrt{\tau^2-4\rho}\,th\left(\frac{\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}(\xi+c)\right)+\tau} \right) + \frac{4\rho^2}{\left[\sqrt{\tau^2-4\rho}\,th\left(\frac{\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}(\xi+c)\right)+\tau\right]^2} \right\}^{\frac{1}{2n}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{-4n^2\kappa\lambda+a\left(4n^2\kappa^2+4\rho-\tau^2\right)+bv\left(\tau^2-4\rho\right)}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t+\theta\right\}}. \quad (3.38)$$

$\rho \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho < 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümler

$$u(x,t)= \left\{-\frac{(1+n)(a-bv)}{cn^2}\left(\rho+\frac{2\rho\tau}{\sqrt{4\rho-\tau^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\rho-\tau^2}}{2}(\xi+c)\right)-\tau}\right)+\frac{4\rho^2}{\left[\sqrt{4\rho-\tau^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\rho-\tau^2}}{2}(\xi+c)\right)-\tau\right]^2}\right\}^{\frac{1}{2n}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{-4n^2\kappa\lambda+a\left(4n^2\kappa^2+4\rho-\tau^2\right)+bv\left(\tau^2-4\rho\right)}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t+\theta\right\}}. \quad (3.39)$$

$\rho = 0$, $\tau \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho > 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$u(x,t) = \left\{-\frac{(1+n)(a-bv)}{cn^2}\left(\frac{\tau^2}{e^{\tau(\xi+c)}-1}+\frac{\tau^2}{[e^{\tau(\xi+c)}]^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2n}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{-4n^2\kappa\lambda+a\left(4n^2\kappa^2-\tau^2\right)+bv\tau^2}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t+\theta\right\}}. \quad (3.40)$$

$\rho \neq 0$, $\tau \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho = 0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$u(x,t) = \left\{-\frac{(1+n)(a-bv)}{cn^2}\left(\frac{\tau^2}{4}-\frac{\tau^2(\xi+c)}{2(\tau(\xi+c)+2)}+\frac{\tau^4(\xi+c)^2}{[2(\tau(\xi+c)+2)]^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2n}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{-4n^2\kappa\lambda+a\left(4n^2\kappa^2\right)bv}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t+\theta\right\}}. \quad (3.41)$$

$\rho = 0$, $\tau = 0$ ve $\tau^2 - 4\rho = 0$ olduğunda düzlem dalga çözümler

$$u(x,t) = \left\{ - \frac{(1+n)(a-bv)}{cn^2(\xi+c)^2} \right\}^{\frac{1}{2n}} e^{i\left\{-\kappa x + \left(\frac{-4n^2\kappa\lambda + 4an^2\kappa^2}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t + \theta\right\}}. \quad (3.42)$$

3.4. Parabolik Yasası

Bu durumda, η reel değerli sabit olmak üzere

$$F(q) = q + \eta q^2 \quad (3.43)$$

şeklindedir.

Bu nonlineerliğe dayalı olarak (3.1) denklemi

$$\begin{aligned} &iu_t + au_{xx} + b|u|^2u + bu_{xt} + c(|u|^2 + \eta|u|^4)u = \\ &-i\lambda u_x - is(|u|^2u)_x - i\mu(|u^2|)_x u - i\theta|u|^2u_x \\ &-i\gamma u_{xxx} - \theta_1(|u|^2u)_{xx} - \theta_2|u|^2u_{xx} - \theta_3u^2u^*_{xx} \end{aligned} \quad (3.44)$$

denklemine indirgenir ve böylece (3.11) denklemi

$$(a-bv)P'' - ((1-b\kappa)w + a\kappa^2 - \lambda\kappa)P + cP^3 + c\eta P^5 = 0 \quad (3.45)$$

denklemine sadeleşir.

P'' ile P^5 terimleri balans edilerek

$$O(P'') \sim O(P^5)$$
$$N + 2 = 5N$$

$$N = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

Analitik çözüm elde etmek için biri (3.45) denkleminde aşağıdaki (3.47) denklemini bulmak için

$$P = U^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

dönüşümünü kullanır.

$$(a - bv)(2UU'' - (U')^2) - 4((1 - b\kappa)w + a\kappa^2 - \lambda\kappa)U^2 + 4cU^3 + 4c\eta U^4 = 0.$$

(3.47)

Bu alt bölümde, (3.44) denklemine hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyon çözümler elde etmek için exp(-ϕ(ξ))- açılım yöntemi uygulanacaktır. Homojen denge yöntemine göre (3.47) denkleminin çözümü

$$O(UU'') \sim O(U^4)$$

$$N + N + 2 = 4N$$

$$N = 1$$

olduğundan

$$U(\xi) = A_0 + A_1 e^{-\Phi(\xi)} \tag{3.48}$$

şeklindedir.

Burada A_0, A_1 daha sonra belirlenecektir. Öyle ki A_1 sıfırdan farklı bir sabittir ve ϕ = ϕ(ξ) fonksiyonu (3.17) denklemini sağlar. (3.48) denklemi (3.17) ile birlikte (3.47) denkleminde yerine yazılarak ve exp(-ϕ(ξ)) nın tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi Mathematica programıyla çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$A_0 = -\frac{3\left(4\eta\rho - \eta\tau^2 + \sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2 - 4\rho)}\right)}{8\eta^2(4\rho - \tau^2)}$$

$$A_1 = -\frac{3\tau}{4\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2 - 4\rho)}}$$

$$w = \frac{-4\kappa\lambda - a\tau^2 + 4a(\kappa^2 + \rho) + bv(\tau^2 - 4\rho)}{4b\kappa - 4}$$

$$c = \frac{4}{3}\eta(a - bv)(4\rho - \tau^2). \tag{3.49}$$

Burada ρ ve τ keyfi sabitlerdir. (3.49) çözüm seti (3.48) denkleminde yerine koyularak, (3.47) denkleminin çözüm formülü

$$U(\xi) = -\frac{3\left(4\eta\rho - \eta\tau^2 + \sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}\right)}{8\eta^2(4\rho-\tau^2)} + \frac{3\tau}{4\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}}e^{-\Phi(\xi)} \tag{3.50}$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç olarak, biri (3.44) denklemine aşağıdaki formlarda hiperbolik, trigonometrik ve düzlem dalga çözümler elde eder:

$\rho \neq 0$, $\tau \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho > 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$U(x,t)= \left\{ -\frac{3\left(4\eta\rho-\eta\tau^2+\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}\right)}{8\eta^2(4\rho-\tau^2)} - \frac{3\tau}{4\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}}\left(\frac{2\rho}{\sqrt{\tau^2-4\rho}\,tanh\left(\frac{\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}(\xi+c)-\tau\right)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{-4\kappa\lambda-a\tau^2+4a(\kappa^2+\rho)+bv(\tau^2-4\rho)}{4b\kappa-4}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.51}$$

$\rho \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho < 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümler

$$U(x,t)= \left\{ -\frac{3\left(4\eta\rho-\eta\tau^2+\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}\right)}{8\eta^2(4\rho-\tau^2)} + \frac{3\tau}{4\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}}\left(\frac{2\rho}{\sqrt{4\rho-\tau^2}\,tan\left(\frac{\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}(\xi+c)+\tau\right)}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{-4\kappa\lambda-a\tau^2+4a(\kappa^2+\rho)+bv(\tau^2-4\rho)}{4b\kappa-4}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.52}$$

$\rho = 0$, $\tau \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho > 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$U(x,t) = \left\{ -\frac{3\left(4\eta\rho-\eta\tau^2+\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}\right)}{8\eta^2(4\rho-\tau^2)} + \frac{3\tau}{4\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}}\left(\frac{\tau}{\exp(\tau(\xi+c))-1}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{-4\kappa\lambda-a\tau^2+4a\kappa^2+bv\tau^2}{4b\kappa-4}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.53}$$

$\rho \neq 0$, $\tau \neq 0$ ve $\tau^2 - 4\rho = 0$, olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$U(x,t)=\left\{-\frac{3\left(4\eta\rho-\eta\tau^2+\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}\right)}{8\eta^2(4\rho-\tau^2)}+\frac{3\tau}{4\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}}\left(\frac{\tau^2(\xi+c)}{\exp(\tau(\xi+c))-1}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{-4\kappa\lambda-a\tau^2+4a\kappa^2+b\nu\tau^2}{4b\kappa-4}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.54}$$

$\rho = 0$, $\tau = 0$ ve $\tau^2 - 4\rho = 0$ olduğunda düzlem dalga çözümler

$$U(x,t)=\left\{-\frac{3\left(4\eta\rho-\eta\tau^2+\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}\right)}{8\eta^2(4\rho-\tau^2)}+\frac{3\tau}{4\sqrt{\eta^2\tau^2(\tau^2-4\rho)}}\left(\frac{1}{\xi+c}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{-4\kappa\lambda-a\tau^2+4a\kappa^2+b\nu\tau^2}{4b\kappa-4}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.55}$$

3.5. Çift Kuvvet Yasası

Bu durumda

$$F(q) = q^n + \eta q^{2n} \tag{3.56}$$

olup burada η reel değerli bir sabittir. Bu doğrusal olmayanlığa dayalı olarak (3.1) denklemi

$$\begin{aligned} &iu_t + au_{xx} + b|u|^2u + bu_{xt} + c(|u|^{2n} + \eta|u|^{4n})u = \\ &-i\lambda u_x - is(|u|^2u)_x - i\mu(|u^2|)_x u - i\theta|u|^2u_x \\ &-i\gamma u_{xxx} - \theta_1(|u|^2u)_{xx} - \theta_2|u|^2u_{xx} - \theta_3u^2u^*_{xx} \end{aligned} \tag{3.57}$$

denklemine indirgenir ve böylece (3.11) denklemi

$$(a - bv)P'' - ((1 - b\kappa)w + a\kappa^2 - \lambda\kappa)P + cP^{2n+1} + c\eta P^{4n+1} = 0 \tag{3.58}$$

şeklinde sadeleşir.

P'' ile P^{4n+1} balans edilerek $N = \frac{1}{2n}$ elde edilir. Analitik bir çözüm elde etmek için, biri (3.58) denkleminde, aşağıdaki (3.60) denklemini elde etmek için

$$P = U^{\frac{1}{2n}} \tag{3.59}$$

dönüşümünü kullanır.

$$(a - bv)(2nUU'' + (1 - 2n)(U')^2) - 4n^2\left((1 - b\kappa)w + a\kappa^2 - \lambda\kappa\right)U^2 + 4cn^2U^3$$

$$+4cn^2\eta U^4 = 0. \tag{3.60}$$

Bu alt bölümde, (3.57) denklemine hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel fonksiyon çözümler elde etmek için exp(-ϕ(ξ)) – açılım yöntemi uygulanacaktır. Homojen denge yöntemine göre (3.60) denkleminin çözümü

$$U(\xi) = A_0 + A_1 e^{-\Phi(\xi)} \tag{3.61}$$

şeklindedir.

Burada A_0, A_1 daha sonra belirlenecektir. Öyle ki A_1 sıfırdan farklı bir sabittir ve ϕ=ϕ(ξ) fonksiyonu (3.17) denklemini sağlar. (3.61) denklemi (3.17) denklemi ile birlikte (3.60) denkleminde yerine yazılarak ve exp(-ϕ(ξ)) nun tüm katsayılarını sıfıra eşitlenerek, bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica ile çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$A_0 = \frac{\ell - cn^2(1+n)(a-bv)(4\rho-\tau^2)}{4c^2n^4}$$

$$A_1 = \frac{\ell}{2c^2n^4\tau}$$

$$w = \frac{4n^2\kappa\lambda + a(4n^2\kappa^2 + 4\rho - \tau^2) + bv(\tau^2 - 4\rho)}{4n^2(b\kappa - 1)} \tag{3.62}$$

$$\eta = \frac{cn^2(1+n)}{(1+n)^2(a-bv)(4\rho-\tau^2)}.$$

Burada ρ, τ keyfi sabitlerdir ve ℓ kısaltması

$$\ell = \sqrt{c^2n^4(1+n)^2(a-bv)^2\tau^2(4\rho-\tau^2)} \tag{3.63}$$

ile verilir.

(3.62) çözüm seti, (3.61) denkleminde yerine koyularak, (3.60) denkleminin çözüm formülü

$$U(\xi) = \frac{\ell - cn^2(1+n)(a-bv)(4\rho-\tau^2)}{4c^2n^4} + \frac{\ell}{2c^2n^4\tau}\, e^{-\Phi(\xi)} \tag{3.64}$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç olarak, biri (3.57) denklemine aşağıdaki formlarda hiperbolik, trigonometrik ve düzlem dalga çözümler elde eder.

ρ ≠ 0 ve $\tau^2 - 4\rho > 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$U(x,t)=$$

$$\left\{\frac{\ell - cn^2(1+n)(a-bv)(4\rho-\tau^2)}{4c^2n^4} - \frac{\ell}{2c^2n^4\tau}\left(\frac{2\rho}{\sqrt{\tau^2-4\rho}\,tanh\left(\frac{\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}(\xi+c)\right)+\tau}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{4n^2\kappa\lambda+a\left(4n^2\kappa^2+4\rho-\tau^2\right)+bv(\tau^2-4\rho)}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.65}$$

ρ ≠ 0 ve $\tau^2 - 4\rho < 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümler

$$U(x,t)=$$

$$\left\{\frac{\ell - cn^2(1+n)(a-bv)(4\rho-\tau^2)}{4c^2n^4} + \frac{\ell}{2c^2n^4\tau}\left(\frac{2\rho}{\sqrt{\tau^2-4\rho}\,tan\left(\frac{\sqrt{\tau^2-4\rho}}{2}(\xi+c)\right)-\tau}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{4n^2\kappa\lambda+a\left(4n^2\kappa^2+4\rho-\tau^2\right)+bv(\tau^2-4\rho)}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.66}$$

ρ = 0 , τ ≠ 0 ve $\tau^2 - 4\rho > 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$U(x,t) = \left\{\frac{\ell + cn^2\tau^2(1+n)(a-bv)}{4c^2n^4} + \frac{\ell}{2c^2n^4\tau}\left(\frac{1}{exp(\tau(\xi+c))-1}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{4n^2\kappa\lambda+a\left(4n^2\kappa^2-\tau^2\right)+bv\tau^2}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t+\theta\right\}}. \tag{3.67}$$

ρ ≠ 0 , τ ≠ 0 ve $\tau^2 - 4\rho = 0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$U(x,t) = \left\{\frac{\ell}{4c^2n^4} - \frac{\ell}{2c^2n^4\tau}\left(\frac{1}{2(\tau(\xi+c))+2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{4n^2\kappa\lambda+4an^2\kappa^2}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t+\theta\right\}}. \quad (3.68)$$

ρ = 0 , τ= 0 ve $\tau^2 - 4\rho < 0$ olduğunda düzlem dalga çözümler

$$U(x,t) = \left\{\frac{\ell - cn^2(1+n)(a-bv)(4\rho-\tau^2)}{4c^2n^4} - \frac{\ell}{2c^2n^4\tau}\left(\frac{1}{\xi+c}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$e^{i\left\{-\kappa x+\left(\frac{4n^2\kappa\lambda+a\left(4n^2\kappa^2+4\rho-\tau^2\right)+bv(\tau^2-4\rho)}{4n^2(b\kappa-1)}\right)t+\theta\right\}}. \quad (3.69)$$

4. KERR NONLİNEERLİĞE SAHİP ÇİFT KIRILIMLI FİBERLERDE OPTİK SOLİTONLAR

4.1. Çift Kırılımlı Fiberlere Uygulama

Bu bölümde, Kerr yasası nonlineerliği ile optik fiberlerdeki parlak, koyu ve tekil solitonlar ele alınmaktadır. Mekansal-zamansal dağılım (STD) ve Kerr yasası nonlineerliği ile birleştirilmiş NLSE'nin boyutsuz formu aşağıdaki gibi verilir (Bhrawy vd., 2014; Biswas vd., 2012; Savescu vd., 2016; Bhrawy vd., 2014; Mirzazadeh vd., 2016).

$$iq_t + a_1 q_{xx} + b_1 q_{xt} + (c_1|q|^2 + d_1|r|^2)q$$
$$+i\{\alpha_1 q_x + \beta_1(|q|^2 q)_x + v_1(|q|^2)_x q + \theta_1|q|^2 q_x + \gamma_1 q_{xxx}\} = 0 \quad (4.1)$$
$$ir_t + a_2 r_{xx} + b_2 r_{xt} + (c_2|r|^2 + d_2|q|^2)r$$
$$+i\{\alpha_2 r_x + \beta_2(|r|^2 r)_x + v_2(|r|^2)_x r + \theta_2|r|^2 r_x + \gamma_2 r_{xxx}\} = 0. \quad (4.2)$$

(4.1) ve (4.2) denklemlerinde $q(x,t)$ ve $r(x,t)$, çift kırılımlı fiberlerdeki iki bileşen için soliton profillerini temsil eden karmaşık değerli fonksiyonlardır. $l = 1{,}2$ için a_l grup hız dağılımını (GVD) temsil eder ve b_l iki bileşen boyunca STD terimleridir. Daha sonra c_l ve d_l sırasıyla kendi kendine faz modülasyonu (SPM) ve çapraz faz modülasyonu (XPM) terimlerini temsil eder. Pertürbasyon terimlerinde, α_l modlar arası dispersiyonu temsil eder. β_l kendiliğinden dikleşen terimdir. v_l ve θ_l doğrusal olmayan dağılımlardır. Ve son olarak γ_l, GVD nin küçük olması durumunda dikkate alınması gereken üçüncü dereceden dağılımdır (Bhrawy vd., 2014; Biswas vd., 2012; Kohl vd., 2008).

Bu alt bölümde amaç, bu çiftlenmiş denklemler sistemine parlak, koyu ve tekil soliton çözümler elde etmektir. Bunun için, exp(-ϕ(ξ)) açılım yöntemi kullanılır. Başlangıç noktasını oluşturmak için solitonlar, faz-genlik formatında aşağıdaki gibi yazılır (Bhrawy vd., 2014; Savescu vd., 2013; Khan vd., 2013):

$$q(x,t) = P_1(x,t)\mathrm{e}^{i\phi_1(x,t)} = P_1(x,t)e^{i(-\kappa_1 x + w_1 t + \sigma_1)} \quad (4.3)$$

$$r(x,t) = P_2(x,t)\mathrm{e}^{i\phi_2(x,t)} = P_2(x,t)e^{i(-\kappa_2 x + w_2 t + \sigma_2)}. \quad (4.4)$$

Burada $l = 1{,}2$ için P_l solitonların genlik bileşenleridir. $\phi_l(x,t)$, solitonların faz bileşenleridir ve

$$\phi_l = -\kappa_l x + w_l t + \sigma_l \tag{4.5}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada κ_l, iki bileşenin her birindeki solitonların frekanslarıdır. σ_l faz sabitleri iken w_l dalga sayılarıdır. (4.3) ve (4.4) denklemleri (4.1) ve (4.2) denklemlerinde yerine yazılarak ve sonra elde edilen denklemi reel ve imajiner kısımlarına ayırarak, $l = 1,2$ ve $\bar{l} = 3 - l$ için

$$(w_l + a_l\kappa_l^2 - b_l\kappa_l w_l - \alpha_l\kappa_l + \gamma_l\kappa_l^3)\, P_l - d_l P_l P_{\bar{l}}^2$$

$$-(\beta_l\kappa_l + \theta_l\kappa_l + c_l)P_l^3 - (a_l + 3\gamma_l\kappa_l)\frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} - b_l\frac{\partial^2 P_l}{\partial x \partial t} = 0 \tag{4.6}$$

$$(1 - b_l\kappa_l)\frac{\partial P_l}{\partial t} - (2\alpha_l\kappa_l - b_l w_l - \alpha_l + 3\gamma_l\kappa_l^2)\frac{\partial P_l}{\partial x} + (3\beta_l + 2v_l + \theta_l)P_l^2\frac{\partial P_l}{\partial x} + \gamma_l\frac{\partial^3 P_l}{\partial x^3} = 0. \tag{4.7}$$

elde edilir (Ekici, 2017).

Hareket eden

$$P_l(x,t) = U_l(\xi),\ \xi = B(x - vt) \tag{4.8}$$

dalga dönüşümü altında (4.6) ve (4.7) denklemleri

$$(w_l + a_l\kappa_l^2 - b_l\kappa_l w_l - \alpha_l\kappa_l + \gamma_l\kappa_l^3)\, U_l - d_l U_l U_{\bar{l}}^2 - (\beta_l\kappa_l + \theta_l\kappa_l + c_l)U_l^3$$

$$-(a_l - b_l v + 3\gamma_l\kappa_l)B^2\frac{\partial^2 U_l}{\partial \xi^2} = 0 \tag{4.9}$$

$$-\left((1 - b_l\kappa_l)v + 2\alpha_l\kappa_l - b_l w_l - \alpha_l + 3\gamma_l\kappa_l^2\right)B\frac{\partial U_l}{\partial \xi} + (3\beta_l + 2v_l + \theta_l)BU_l^2\frac{\partial U_l}{\partial \xi} + \gamma_l B^3\frac{\partial^3 U_l}{\partial \xi^3} = 0 \tag{4.10}$$

denklemlerine indirgenir.

(4.10) denkleminden üçüncü terim

$$\gamma_l = 0 \tag{4.11}$$

olmasını gerektirir.

$l = 1,2$ için böylece (4.9) ve (4.10) denklemleri

$$(w_l + a_l\kappa_l^2 - b_l\kappa_l w_l - \alpha_l\kappa_l + \gamma_l\kappa_l^3\ )\ U_l - d_l U_l U_l^2 - (\beta_l\kappa_l + \theta_l\kappa_l + c_l)U_l^3$$

$$-(a_l - b_l v + 3\gamma_l\kappa_l)B^2\frac{\partial^2 U_l}{\partial\xi^2}=0 \tag{4.12}$$

$$-\Big((1 - b_l\kappa_l)v + 2\alpha_l\kappa_l - b_l w_l - \alpha_l + 3\gamma_l\kappa_l^2\Big)B\frac{\partial U_l}{\partial\xi}+(3\beta_l + 2v_l + \theta_l)BU_l^2\frac{\partial U_l}{\partial\xi}=0 \tag{4.13}$$

şeklini alır.

Bu nedenle üçüncü dereceden dağılım katsayısının sıfır olması koşulu sağlandığında çift kırılımlı fiberlerde Kerr yasası nonlineerliği durumu için tam çözümler mevcut olacaktır. Bu ilk kez yapılan önemli bir gözlemdir. Daha sonra, (4.13) denkleminde lineer bağımsız fonksiyonların katsayıları sıfıra eşitlenerek

$$v = \frac{2\alpha_l\kappa_l - b_l w_l - \alpha_l + 3\gamma_l\kappa_l^2}{b_l\kappa_l - 1} \tag{4.14}$$

ve

$$3\beta_l + 2v_l + \theta_l = 0 \tag{4.15}$$

bulunur.

(4.14) denklemi iki bileşen için soliton hızıdır ve (4.15) denklemi solitonun varlığı için kısıtlama koşulunu temsil eder. Ayrıca, (4.14) denkleminden, aşağıdaki bağıntının sağlanması gerekir:

$$b_l\kappa_l \neq\ 1. \tag{4.16}$$

Böylece, (4.14) denkleminden solitonların hızı eşitlenerek, aşağıda verilen kısıtlama koşullarına gidilir:

$$(2\alpha_1\kappa_1 - b_1 w_1 - \alpha_1 + 3\gamma_1\kappa_1^2)(b_2\kappa_2 - 1) = (2\alpha_2\kappa_2 - b_2 w_2 - \alpha_2 + 3\gamma_2\kappa_2^2)(b_1\kappa_1 - 1). \tag{4.17}$$

Sonuç olarak, reel kısım olan (4.9) denklemi

$$(w_1 + a_1\kappa_1^2 - b_1\kappa_1 w_1 - \alpha_1\kappa_1\ )U_1 - d_1 U_1 U_2^2 - (\beta_1\kappa_1 + \theta_1\kappa_1 + c_1)U_1^3$$

$$-(a_1 - b_1 v)B^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\xi^2}=0 \tag{4.18}$$

$$(w_2 + a_2\kappa_2^2 - b_2\kappa_2 w_2 - \alpha_2\kappa_2\ )U_2 - d_2 U_2 U_1^2 - (\beta_2\kappa_2 + \theta_2\kappa_2 + c_2)U_2^3$$

$$-(a_2 - b_2 v)B^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi^2}=0 \tag{4.19}$$

biçiminde değişir. Şimdi soliton çözümler elde etmek için (4.18) ve (4.19) denklem sistemi analiz edilecektir. Homojen balans metoduna göre, (4.18) ve (4.19) denklemleri

$$U_1(\xi) = A_0 + A_1 \exp(-\phi(\xi)) \tag{4.20}$$

$$U_2(\xi) = B_0 + B_1 \exp(-\phi(\xi)) \tag{4.21}$$

formunda çözümlere sahiptir.

(4.20) ve (4.21) denklemleri, (4.18) ve (4.19) denklemlerinde yerine konularak ve $\exp(-\phi(\xi))$ nin tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek, bir cebirsel denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sistemi çözülerek aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$A_0 = \frac{i\lambda B H_1}{\sqrt{2} H_3}, \quad A_{1=} \frac{2iBH_1}{\sqrt{2}H_3}$$

$$B_0 = \frac{i\lambda B H_2}{\sqrt{2} H_3}, \quad B_1 = \frac{2iBH_2}{\sqrt{2}H_3} \tag{4.22}$$

$$w_1 = \frac{B^2(\lambda^2 - 4\mu)(a_1 - b_1 v) + 2a_1\kappa_1^2 - 2\alpha_1\kappa_1}{2b_1\kappa_1 - 2}$$

$$w_2 = \frac{B^2(\lambda^2 - 4\mu)(a_2 - b_2 v) + 2a_2\kappa_2^2 - 2\alpha_2\kappa_2}{2b_2\kappa_2 - 2}$$

burada bazı kısaltmalar

$$H_1 = \sqrt{\kappa_2(\beta_2 + \theta_2)(a_1 - b_1 v) + a_1 c_2 - a_2 d_1 - b_1 c_2 v + b_2 d_1 V}$$

$$H_2 = \sqrt{\kappa_1(\beta_1 + \theta_1)(a_2 - b_2 v) + a_2 c_1 - a_1 d_2 - b_2 c_1 v + b_1 d_2 v}$$

$$H_3 = \sqrt{\kappa_1(\beta_1 + \theta_1) + c_1(\kappa_2(\beta_2 + \theta_2) + c_2) - d_1 d_2} \tag{4.23}$$

şeklindedir.

(4.22) çözüm seti (4.20) ve (4.21) denklemlerinde yerine yazılarak, (4.18) ve (4.19) denklemlerinin çözüm formülleri

$$U_1(\xi) = \frac{iBH_1}{\sqrt{2}H_3}\{\lambda + 2\exp(-\phi(\xi))\} \tag{4.24}$$

$$U_2(\xi) = \frac{iBH_2}{\sqrt{2}H_3}\{\lambda + 2\exp(-\phi(\xi))\} \tag{4.25}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.17) yardımcı adi diferensiyel denklemin genel çözümleri, (4.24) ve (4.25) denklemlerinde yerine konularak Kerr yasası nonlineerliğiyle ile çiftlenmiş NLSE nin hareket eden dalga çözümleri aşağıdaki gibidir:

1. Durum: $\mu \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda tekil soliton çözümler

$$q(x,t) = \frac{iBH_1}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda - \frac{4\mu}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left[B\left(x - \frac{2a_1\kappa_1 - b_1w_1 - \alpha_1}{b_1\kappa_1 - 1}\right) + c\right]\right) + \lambda}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x + \left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_1 - b_1 v) + 2a_1\kappa_1^2 - 2\alpha_1\kappa_1}{2b_1\kappa_1 - 2}\right)t + \theta_1\right\}} \tag{4.26}$$

$$r(x,t) = \frac{iBH_2}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda - \frac{4\mu}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left[B\left(x - \frac{2a_2\kappa_2 - b_2W_2 - \alpha_2}{b_2\kappa_2 - 1}\right) + c\right]\right) + \lambda}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x + \left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_2 - b_2 v) + 2a_2\kappa_2^2 - 2\alpha_2\kappa_2}{2b_2\kappa_2 - 2}\right)t + \theta_2\right\}}. \tag{4.27}$$

2. Durum: $\mu \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümler

$$q(x,t) = \frac{iBH_1}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda + \frac{4\mu}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left[B\left(x-\frac{2a_1\kappa_1-b_1w_1-\alpha_1}{b_1\kappa_1-1}\right)+c\right]\right)-\lambda}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x+\left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_1-b_1v)+2a_1\kappa_1^2-2\alpha_1\kappa_1}{2b_1\kappa_1-2}\right)t+\theta_1\right\}} \quad (4.28)$$

$$r(x,t) = \frac{iBH_2}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda + \frac{4\mu}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}tan\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left[B\left(x-\frac{2a_2\kappa_2-b_2w_2-\alpha_2}{b_2\kappa_2-1}\right)+c\right]\right)-\lambda}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x+\left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_2-b_2v)+2a_2\kappa_2^2-2a_2\kappa_2}{2b_2\kappa_2-2}\right)t+\theta_2\right\}}. \quad (4.29)$$

3. Durum: $\mu = 0$ ve $\lambda \neq 0$ $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$q(x,t) = \frac{iBH_1}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda + \frac{4\mu}{exp\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left[B\left(x-\frac{2a_1\kappa_1-b_1w_1-\alpha_1}{b_1\kappa_1-1}\right)+c\right]\right)-1}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x+\left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_1-b_1v)+2a_1\kappa_1^2-2\alpha_1\kappa_1}{2b_1\kappa_1-2}\right)t+\theta_1\right\}} \quad (4.30)$$

$$r(x,t) = \frac{iBH_1}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda + \frac{2\lambda}{\exp(\lambda\left(B\left(x-\frac{2a_2\kappa_2-b_2w_2-\alpha_2}{b_2\kappa_2-1}t\right)+c\right))-1}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x+\left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_2-b_2v)+2a_2\kappa_2^2-2a_2\kappa_2}{2b_2\kappa_2-2}\right)t+\theta_2\right\}}. \quad (4.31)$$

4. Durum: $\mu \neq 0$ ve $\lambda \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$q(x,t) = \frac{iBH_1}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda - \frac{\lambda^2\left(B\left(x-\frac{2a_1\kappa_1-b_1w_1-\alpha_1}{b_1\kappa_1-1}t\right)+c\right)}{\lambda\left(B\left(x-\frac{2a_1\kappa_1-b_1w_1-\alpha_1}{b_1\kappa_1-1}t\right)+c\right)+2}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x+\left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_1-b_1 v)+2a_1\kappa_1^2-2\alpha_1\kappa_1}{2b_1\kappa_1-2}\right)t+\theta_1\right\}} \tag{4.32}$$

$$r(x,t)=\frac{iBH_1}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda-\frac{\lambda^2\left(B\left(x-\frac{2a_2\kappa_2-b_2w_2-\alpha_2}{b_2\kappa_2-1}t\right)+c)\right)}{\lambda\left(B\left(x-\frac{2a_2\kappa_2-b_2w_2-\alpha_2}{b_2\kappa_2-1}t\right)+c)\right)+2}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x+\left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_2-b_2 v)+2a_2\kappa_2^2-2\alpha_2\kappa_2}{2b_2\kappa_2-2}\right)t+\theta_2\right\}}. \tag{4.33}$$

5. Durum: $\mu = 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$q(x,t)=\frac{iBH_1}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda-\frac{2}{B\left(x-\frac{2a_1\kappa_1-b_1w_1-\alpha_1}{b_1\kappa_1-1}\,t\right)+c}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x+\left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_1-b_1 v)+2a_1\kappa_1^2-2\alpha_1\kappa_1}{2b_1\kappa_1-2}\right)t+\theta_1\right\}} \tag{4.34}$$

$$r(x,t)=\frac{iBH_1}{\sqrt{2}H_3}\left\{\lambda+\frac{2}{B\left(x-\frac{2a_2\kappa_2-b_2w_2-\alpha_2}{b_2\kappa_2-1}t\right)+c}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x+\left(\frac{B^2(\lambda^2-4\mu)(a_2-b_2 v)+2a_2\kappa_2^2-2\alpha_2\kappa_2}{2b_2\kappa_2-2}\right)t+\theta_2\right\}}. \tag{4.35}$$

4.1.1. Kademeli Sistem

Kademeli sistemdeki solitonların dinamiği çiftlenmiş nonlineer Schrödinger denklemi tarafından kontrol edilir ve sistemin boyutsuz formu aşağıdaki gibi verilir (Bache vd., 2008; Bang vd., 2008; Bhrawy vd., 2014; Guzman vd., 2015; Zhou vd., 2015; Sarma ve Biswas, 2014):

$$ia_1 q_t + b_1 q_{xx} + |r|^2 q = 0 \tag{4.36}$$

$$ia_2 r_t + b_2 r_{xx} + (c_2|r|^2 + d_2|q|^2)r = 0. \tag{4.37}$$

(4.36) ve (4.37) denklemlerinde $q(x,t)$ ve $r(x,t)$ karmaşık değerli dalga profilini temsil eder. Bağımsız değişkenler, mekânsal değişken x ve zamansal değişken t dır. $j = 1,2$ için reel değerli a_j sabitleri, soliton itmeleri zamansal gelişimin katsayıları ve b_j, grup hız dağılımının katsayılarıdır. Daha sonra c_j, çapraz faz modülasyonunun katsayılarını (XPM) temsil eder ve (4.37) denkleminden d_2 kendi kendine faz modülasyonudur (SPM). Çalışmanın geri kalan kısmında, exp-fonksiyon yöntemi olarak bilinen bir integrasyon tekniği yardımıyla, (4.36) ve (4.37) denklemleri ile verilen boyutsuz sistemin çözümü tartışılacaktır. Ayrıntılar şimdi aşağıda tartışılmaktadır. (4.36) ve (4.37) denklemlerini çözmek için aşağıdaki dalga dönüşümleri seçilir (Bhrawy vd., 2014; Guzman vd., 2015; Zhou vd., 2015; Sarma ve Biswas, 2014):

$$q(x,t) = U_1(\xi)\mathrm{e}^{i\phi_1(x,t)} \tag{4.38}$$

$$r(x,t) = U_2(\xi)\mathrm{e}^{i\phi_2(x,t)}. \tag{4.39}$$

Burada $U_l(\xi)$ dalganın şeklini temsil eder ve

$$\xi = B(x - vt) \tag{4.40}$$

$$\phi_l = -\kappa_l x + w_l t + \theta_l, \quad l = 1,2 \tag{4.41}$$

şeklindedir.

(4.38) ve (4.39) denklemlerinde $\phi_l(x,t)$ fonksiyonları solitonun faz bileşenlerini temsil eder. Fazdan κ_l solitonun frekansları, w_l dalga sayıları ve θ_l faz sabitleridir.

Son olarak (4.40) denkleminde, v solitonun hızıdır. (4.38) ve (4.39) denklemleri, (4.36) ve (4.37) denklemlerinde yerine konularak ve daha sonra reel ve imajiner kısımlarına ayrılarak bir çift ilişkiye yol açar. İmajiner kısım

$$v = -\frac{2b_1\kappa_1}{a_1} \tag{4.42}$$

$$v = -\frac{2b_2\kappa_2}{a_2} \tag{4.43}$$

verir.

Daha sonra iki hızı birbirine eşitlemek, soliton parametreleri arasında solitonların var olması için bir kısıtlama koşulu olan aşağıdaki kısıtlama ilişkisine yol açar:

$$a_2 b_1 \kappa_1 = a_1 b_2 \kappa_2. \tag{4.44}$$

Şimdi reel kısım denklemler

$$B^2 b_1 U_1'' - (a_1 w_1 + b_1 \kappa_1^2) U_1 + c_1 {U_2}^2 U_1 = 0 \tag{4.45}$$

$$B^2 b_2 U_2'' - (a_2 w_2 + b_2 \kappa_2^2) U_2 + c_2 {U_1}^2 U_2 + d_2 {U_2}^3 = 0 \tag{4.46}$$

şeklinde yazılır.

Homojen balans metoduna göre, (4.45) ve (4.46) denklemleri

$$U_1(\xi) = A_0 + A_1 \exp(-\phi(\xi)) \tag{4.47}$$

$$U_2(\xi) = B_0 + B_1 \exp(-\phi(\xi)) \tag{4.48}$$

şeklinde çözümlere sahiptir.

(4.47) ve (4.48) denklemleri (4.45) ve (4.46) denklemlerinde yerine yazılarak ve $\exp(-\phi(\xi))$ nin tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek, bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica ile çözülerek

$$A_0 = \frac{\lambda B \sqrt{b_1 d_2 - b_2 c_1}}{\sqrt{2c_1}\sqrt{c_2}}, \quad B_0 = \frac{\lambda B \sqrt{-b_1}}{\sqrt{2c_1}}$$

$$A_1 = \frac{2B \sqrt{b_1 d_2 - b_2 c_1}}{\sqrt{2c_1}\sqrt{c_2}}, \quad B_1 = \frac{2B \sqrt{-b_1}}{\sqrt{2c_1}}$$

$$w_1 = -\frac{b_1 [B^2(\lambda^2 - 4\mu) + 2\kappa_1^2]}{2a_1}$$

$$w_2 = -\frac{b_2 [B^2(\lambda^2 - 4\mu) + 2\kappa_2^2]}{2a_2} \tag{4.49}$$

elde edilir. Burada λ ve μ keyfi sabitlerdir. (4.49) çözüm seti, (4.47) ve (4.48) denklemlerinde yerine koyularak, (4.45) ve (4.46) denklemlerinin çözüm formülleri

$$U_1(\xi) = \frac{B\sqrt{b_1 d_2 - b_2 c_1}}{\sqrt{2c_1}\sqrt{c_2}}\{\lambda + 2\exp(-\phi(\xi))\} \tag{4.50}$$

$$U_2(\xi) = \frac{B\sqrt{-b_1}}{\sqrt{2c_1}}\{\lambda + 2\exp(-\phi(\xi))\} \tag{4.51}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.17) yardımcı adi diferensiyel denklemin genel çözümleri, (4.50) ve (4.51) denklemlerinde yerine yazılarak aşağıdaki gibi kademeli sisteme beş tür hareket eden dalga çözüm elde edilir:

1. Durum: $\mu \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda tekil soliton çözümler

$$q(x,t) = \frac{B\sqrt{b_1 d_2 - b_2 c_1}}{\sqrt{2c_1}\sqrt{c_2}}\left\{\lambda - \frac{4\mu}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left[B\left(x + \frac{2b_1\kappa_1}{a_1}t\right) + c\right] + \lambda\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x - \frac{b_1\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_1^2\right]}{2a_1}t + \theta_1\right\}} \tag{4.52}$$

$$r(x,t) = \frac{B\sqrt{-b_1}}{\sqrt{2c_1}}\left\{\lambda - \frac{4\mu}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}\left[B\left(x + \frac{2b_2\kappa_2}{a_2}t\right) + c\right] + \lambda\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x - \frac{b_2\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_2^2\right]}{2a_2}t + \theta_2\right\}}. \tag{4.53}$$

2. Durum: $\mu \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu < 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümler

$$q(x,t) = \frac{B\sqrt{b_1 d_2 - b_2 c_1}}{\sqrt{2c_1}\sqrt{c_2}}\left\{\lambda + \frac{4\mu}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left[B\left(x + \frac{2b_1\kappa_1}{a_1}t\right) + c\right] - \lambda\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x - \frac{b_1\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_1^2\right]}{2a_1}t + \theta_1\right\}} \tag{4.54}$$

$$r(x,t)=\frac{B\sqrt{-b_1}}{\sqrt{2c_1}}\left\{\lambda+\frac{4\mu}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left[B\left(x+\frac{2b_2\kappa_2}{a_2}t\right)+c\right]-\lambda\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x-\frac{b_2\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_2^2\right]}{2a_2}t+\theta_2\right\}}. \tag{4.55}$$

3. Durum: $\mu=0$, $\lambda\neq 0$ ve $\lambda^2-4\mu>0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$q(x,t)=\frac{B\sqrt{b_1d_2-b_2c_1}}{\sqrt{2c_1}\sqrt{c_2}}\left\{\lambda+\frac{4\mu}{exp\left(\lambda\left[B\left(x+\frac{2b_1\kappa_1}{a_1}t\right)+c\right]-1\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x-\frac{b_1\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_1^2\right]}{2a_1}t+\theta_1\right\}} \tag{4.56}$$

$$r(x,t)=\frac{B\sqrt{-b_1}}{\sqrt{2c_1}}\left\{\lambda+\frac{4\mu}{exp\left(\lambda\left[B\left(x+\frac{2b_2\kappa_2}{a_2}t\right)+c\right]-1\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x-\frac{b_2\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_2^2\right]}{2a_2}t+\theta_2\right\}}. \tag{4.57}$$

4. Durum: $\mu\neq 0$, $\lambda\neq 0$ ve $\lambda^2-4\mu=0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$q(x,t)=\frac{B\sqrt{b_1d_2-b_2c_1}}{\sqrt{2c_1}\sqrt{c_2}}\left\{\lambda-\frac{\lambda^2\left[B\left(x+\frac{2b_1\kappa_1}{a_1}t\right)+c\right]}{\lambda\left[B\left(x+\frac{2b_1\kappa_1}{a_1}t\right)+c\right]+2}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x-\frac{b_1\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_1^2\right]}{2a_1}t+\theta_1\right\}} \tag{4.58}$$

$$r(x,t)=\frac{B\sqrt{-b_1}}{\sqrt{2c_1}}\left\{\lambda-\frac{\lambda^2\left[B\left(x+\frac{2b_2\kappa_2}{a_2}t\right)+c\right]}{\lambda\left[B\left(x+\frac{2b_2\kappa_2}{a_2}t\right)+c\right]+2}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x-\frac{b_2\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_2^2\right]}{2a_2}t+\theta_2\right\}}. \tag{4.59}$$

5. Durum: $\mu=0$, $\lambda=0$ ve $\lambda^2-4\mu=0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$q(x,t) = \frac{B\sqrt{b_1 d_2 - b_2 c_1}}{\sqrt{2c_1}\sqrt{c_2}} \left\{ \lambda + \frac{2}{B\left(x + \frac{2b_1\kappa_1}{a_1}\ t\right) + c} \right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x - \frac{b_1\left[B^2(\lambda^2 - 4\mu) + 2\kappa_1^2\right]}{2a_1} t + \theta_1\right\}} \tag{4.60}$$

$$r(x,t) = \frac{B\sqrt{-b_1}}{\sqrt{2c_1}} \left\{ \lambda + \frac{2}{B\left(x + \frac{2b_2\kappa_2}{a_2}\ t\right) + c} \right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x - \frac{b_2\left[B^2(\lambda^2 - 4\mu) + 2\kappa_2^2\right]}{2a_2} t + \theta_2\right\}}. \tag{4.61}$$

4.1.2. Titreşen Solitonlar

Kerr yasası nonlineerliğine sahip çift kırılımlı fiberlerde solitonlar için ana denklem, aşağıdaki vektör çiftlenmiş lineer olmayan Schrödinger denklemi ile verilir (Biswas vd., 2014):

$$iq_t + a_1 q_{xx} + (\alpha_1|q|^2 + b_1|r|^2)q = 0 \tag{4.62}$$

$$ir_t + a_2 r_{xx} + (\alpha_2|r|^2 + b_2|q|^2)r = 0. \tag{4.63}$$

(4.62) ve (4.63) denklemlerinde $q(x,t)$ ve $r(x,t)$, fiberin iki bileşeni boyunca dalga profilini temsil eder. Burada x ve t bağımsız değişkenleri, sırasıyla mekansal ve zamansal değişkenleri gösterir. $j = 1{,}2$ için reel değerli a_j sabitleri, grup hız dağılımı (GVD) ve α_j, kendi kendine faz modülasyonudur (SPM). b_j, çapraz faz modülasyonunun katsayılarını (XPM) temsil eder. Titreşen solitonlar için (SPM) ihmal edilebilir ve bu yüzden işlem dışında bırakılır. Böylece $\alpha_j = 0$ dır. Bu nedenle (4.62) ve (4.63) denklemleri sırasıyla

$$iq_t + a_1 q_{xx} + b_1|r|^2 q = 0 \tag{4.64}$$

$$ir_t + a_2 r_{xx} + b_2|q|^2 r = 0 \tag{4.65}$$

denklemlerine indirgenir. (4.64) ve (4.65) denklemleri birlikte, titreşen solitonların dinamiklerini tanımlayan modeli oluşturur. (4.64) ve (4.65) denklemlerinin integrallenebilme yönü, bu çalışmanın ana odak noktası olacaktır. Parlak, koyu ve tekil solitonların varlığını sağlayacak uygun kısıtlama ilişkileri ile parlak, koyu ve tekil solitonlar elde etmek için exp (-ϕ(ξ)) açılım metodu uygulanacaktır. (4.64) ve (4.65) denklemlerini çözmek için başlangıç hipotezi

$$q(x,t) = P_1(x,t)^{i\phi_1(x,t)} = P_1(x,t)^{i(-\kappa_1 x + w_1 t + \theta_1)} \tag{4.66}$$

$$r(x,t) = P_2(x,t)^{i\phi_2(x,t)} = P_2(x,t)^{i(-\kappa_2 x + w_2 t + \theta_2)} \tag{4.67}$$

şeklinde alınır.

Burada P_l, l = 1, 2 için genlik bileşenlerini temsil eder ve

$$\phi_l(x,t) = -\kappa_l x + w_l t + \theta_l \tag{4.68}$$

ile tanımlanan $\phi_l(x,t)$ fonksiyonları solitonların uygun faz bileşenleridir.

Burada κ_l iki bileşendeki solitonların frekansları, w_l dalga sayıları ve θ_l faz sabitleridir. (4.66) ve (4.67) denklemleri, (4.64) ve (4.65) denklemlerinde yerine yazılarak, imajiner kısımlar iki bileşende

$$v = -2a_1\kappa_1 \tag{4.69}$$

$$v = -2a_2\kappa_2 \tag{4.70}$$

şeklinde soliton hızına yol açar.

Şimdi iki bileşenden solitonların hızını eşitleyerek, solitonların var olması için kısıtlama koşulu olarak yardımcı olan

$$a_1\kappa_1 = a_2\kappa_2 , \tag{4.71}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi reel kısım denklemleri, $l = 1, 2$ ve $\bar{l} = 3 - l$ için

$$(w_l + a_l\kappa_l^2)\, P_l + b_l P_l P_{\bar{l}}^2 - a_l \frac{\partial^2 P_l}{\partial x^2} = 0 \tag{4.72}$$

şeklinde yazılır.

Hareket eden

$$P_l(x,t) = U_l(\xi), \quad \xi = B(x - vt) \tag{4.73}$$

dalga dönüşümü altında

$$(w_1 + a_1\kappa_1^2)\, U_1 + b_1 U_1 U_2^2 - a_1 B^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} = 0 \tag{4.74}$$

$$(w_2 + a_2\kappa_2^2)\, U_2 + b_2 U_2 U_1^2 - a_2 B^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi^2} = 0 \tag{4.75}$$

elde edilir.

Şimdi, soliton çözümler elde etmek için (4.74) ve (4.75) denklem sistemi analiz edilecektir. Homojen balans metoduna göre, (4.74) ve (4.75) denklemlerinin

$$U_1(\xi) = A_0 + A_1 \exp(-\phi(\xi)) \tag{4.76}$$

$$U_2(\xi) = B_0 + B_1 \exp(-\phi(\xi)) \tag{4.77}$$

şeklinde çözümleri vardır. (4.76) ve (4.77) denklemleri, (4.74) ve (4.75) denklemlerinde yerine koyularak ve $\exp(-\phi(\xi))$ nin tüm katsayıları sıfıra eşitlenerek, bir cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem Mathematica ile çözülerek

$$A_0 = \pm\frac{\lambda B\sqrt{a_2}}{2\sqrt{b_2}}, \qquad A_1 = \pm\frac{\lambda B\sqrt{2a_1}}{2\sqrt{b_1}}$$

,

$$B_0 = \pm\frac{B\sqrt{2a_2}}{2\sqrt{b_2}}, \quad B_1 = \pm\frac{B\sqrt{2a_1}}{\sqrt{b_1}}$$

$$w_1 = -\frac{a_1[B^2(\lambda^2 - 4\mu) + 2\kappa_1^2]}{2}$$

$$w_2 = -\frac{a_2[B^2(\lambda^2 - 4\mu) + 2\kappa_2^2]}{2} \tag{4.78}$$

elde edilir. Burada λ ve μ keyfi sabitlerdir. (4.78) çözüm seti, (4.76) ve (4.77) denklemlerinde yerine yazılarak (4.74) ve (4.75) denklemlerinin çözüm formülleri

$$U_1(\xi) = \pm\frac{B\sqrt{2a_2}}{2\sqrt{b_2}}\{\lambda + 2\exp(-\phi(\xi))\} \tag{4.79}$$

$$U_2(\xi) = \pm\frac{B\sqrt{2a_1}}{\sqrt{b_1}}\{\lambda + 2\exp(-\phi(\xi))\} \tag{4.80}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.17) yardımcı adi diferensiyel denklemin genel çözümleri, (4.79) ve (4.80) denklemlerinde yerine koyularak (4.79) ve (4.80) denklemlerine aşağıdaki gibi beş tür hareket eden dalga çözümler türetilir:

1. Durum: $\mu \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olduğunda tekil soliton çözümler

$$q(x,t) = \pm\frac{B\sqrt{2a_2}}{2\sqrt{b_2}}\left\{\lambda - \frac{4\mu}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}[B(x+2a_1\kappa_1 t)+c]+\lambda\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x - \frac{a_1\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_1^2\right]}{2}t+\theta_1\right\}} \tag{4.81}$$

$$r(x,t) = \pm\frac{B\sqrt{2a_1}}{\sqrt{b_1}}\left\{\lambda - \frac{4\mu}{\sqrt{\lambda^2-4\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}[B(x+2a_2\kappa_2 t)+c]+\lambda\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x - \frac{a_2\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_2^2\right]}{2}t+\theta_2\right\}}. \tag{4.82}$$

2. Durum: $\mu \neq 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu < 0$ olduğunda trigonometrik fonksiyon çözümler

$$q(x,t) = \pm\frac{B\sqrt{2a_2}}{2\sqrt{b_2}}\left\{\lambda + \frac{4\mu}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tanh\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left[B(x+2a_1\kappa_1\, t)+c\right]-\lambda\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x-\frac{a_1\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_1^2\right]}{2}t+\theta_1\right\}} \tag{4.83}$$

$$r(x,t) = \pm\frac{B\sqrt{2a_1}}{\sqrt{b_1}}\left\{\lambda + \frac{4\mu}{\sqrt{4\mu-\lambda^2}\tanh\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left[B(x+2a_2\kappa_2\, t)+c\right]-\lambda\right)}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x-\frac{a_2\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_2^2\right]}{2}t+\theta_2\right\}}. \tag{4.84}$$

3. Durum: $\mu=0,\ \lambda\neq 0$ ve $\lambda^2-4\mu<0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümler

$$q(x,t) = \pm\frac{B\sqrt{2a_2}}{2\sqrt{b_2}}\left\{\lambda + \frac{2\lambda}{\exp(\lambda[B(x+2a_1\kappa_1\, t)+c]-1}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x-\frac{a_1\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_1^2\right]}{2}t+\theta_1\right\}} \tag{4.85}$$

$$r(x,t) = \pm\frac{B\sqrt{2a_1}}{\sqrt{b_1}}\left\{\lambda + \frac{2\lambda}{\exp(\lambda[B(x+2a_2\kappa_2\, t)+c]-1}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x-\frac{a_2\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_2^2\right]}{2}t+\theta_2\right\}}. \tag{4.86}$$

4. Durum: $\mu\neq 0, \lambda\neq 0$ ve $\lambda^2-4\mu=0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$q(x,t) = \pm\frac{B\sqrt{2a_2}}{2\sqrt{b_2}}\left\{\lambda - \frac{\lambda^2[B(x+2a_1\kappa_1\, t)+c]}{\lambda[B(x+2a_1\kappa_1\, t)+c]+2}\right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x-\frac{a_1\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_1^2\right]}{2}t+\theta_1\right\}} \tag{4.87}$$

$$r(x,t) = \pm \frac{B\sqrt{2a_1}}{\sqrt{b_1}} \left\{ \lambda - \frac{\lambda^2[B(x+2a_2\kappa_2\, t)+c]}{\lambda[B(x+2a_2\kappa_2\, t)+c]+2} \right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x - \frac{a_2\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_2^2\right]}{2} t+\theta_2\right\}}. \tag{4.88}$$

5. Durum: $\mu = 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$ olduğunda rasyonel fonksiyon çözümler

$$q(x,t) = \pm \frac{B\sqrt{2a_2}}{2\sqrt{b_2}} \left\{ \lambda + \frac{2}{B(x+2a_1\kappa_1\, t)+c} \right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_1 x - \frac{a_1\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_1^2\right]}{2} t+\theta_1\right\}} \tag{4.89}$$

$$r(x,t) = \pm \frac{B\sqrt{2a_1}}{\sqrt{b_1}} \left\{ \lambda - \frac{2}{B(x+2a_2\kappa_2\, t)+c} \right\}$$

$$e^{i\left\{-\kappa_2 x - \frac{a_2\left[B^2(\lambda^2-4\mu)+2\kappa_2^2\right]}{2} t+\theta_2\right\}}. \tag{4.90}$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Nonlineer negatif indeksli materyalde ultra kısa optik darbenin yayılmasını açıklayan nonlineer matematiksel fiziksel denklem, exp(-$\phi(\xi)$) açılım şeması olarak adlandırılan bir integrasyon aracı yardımıyla analitik olarak incelendi. Kerr yasası, kuvvet yasası, parabolik yasası ve çift kuvvet yasası olmak üzere dört tip nonlineerlik durumu dikkate alındı. Ayrıca, modlar arası dağılım, nonlineer dağılım, kendiliğinden dikleşme, üçüncü dereceden dağılım ve Raman etkisi de göz önünde bulunduruldu. Bu takdirde, bazı tam hareketli çözümler rapor edildi.

Dahası, bu çalışmada, Kerr yasası nonlineerliği ile ortaya çıkan çift kırılımlı fiberlerdeki optik solitonların dinamikleri incelendi. Titreşen solitonların ve kademeli sistemlerin özel durumları da dahil edildi. Bu şemayla ortaya çıkarılan çözümler sadece tekil solitonlardır. Elde edilen diğer çözümler, optikte yer almayan düzlem dalgalar ve tekil periyodik çözümlerdir. Bu durum integrasyon şemasının yetersizliğini gösterir.

Sunulan sonuçlar, çeşitli Kerr yasası olmayan nonlineer negatif indeksli materyallerde ultra kısa optik soliton kontrolünde bir yöntem ve teknik sağlayabilir. Ayrıca, bu araştırmanın sonuçları, mekansal-zamansal dağılımlı nonlineer Schrödinder denkleminin gelecekteki çalışmalarında yardımcı olabilir. Örneğin, bu çalışmaları yoğun dalga boyu bölümlü çoklamalı sistemler durumuna genişletmek mümkündür. Ek olarak, bu modellerin modifiye edilmiş versiyonları farklı integrasyon algoritmaları kullanılarak da çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR

Abassy, T. A., El-Tawil, M. A., Saleh, H. K. (2004). The solution of KdV and mKdV equations using Adomian Pade approximation. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 5,* 327-340.

Abdou, M. A., Soliman, A. A. (2005). *New applications of variational iteration method. Physica D* ,211, 1-8.

Ablowitz, M. J., Clarkson, P. A. (1991). Solitons: Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. *Cambridge University Press*, Cambridge.

Antonova, M., Biswas, A. (2009). Adiabatic parameter dynamics of perturbed solitary waves. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14,* 734-748.

Bache, M., Bang, O., Krolikowski, W., Moses, J., Wise, F. W. (2008). Limits to compression with cascaded quadratic soliton compressors. *Optics Express, 16 (5*), 3273–3287.

Bache, M., Bang, O., Moses, J., Wise, F. W., Krolikowski, W. (2008). Accurate nonlocal theory for cascaded quadratic soliton compression. *Proc. SPIE* , 6801 6801109.

Bhrawy, A.H., Alshaery, A.A., Hilal, E.M., Jovanoski, Z., Biswas, A. (2014). Bright and dark solitons in cascaded system. *Optik, 125 (20),* 6162–6165.

Bhrawy, A. H., Alshaery, A. A., Hilal, E.M., Savescu, M., Milovic, D., Khan, K. R., Mahmood, M.F., Jovanoski, Z., Biswas, A. (2014). Optical solitons in birefingent fibers with spatio-temporal dispersion *Optik, 125 (17),* 4935–4944.

Bhrawy, A. H., Alshaery, A. A., Hilal, E. M., Savescu, M., Milovic, D., Khan, K. R., Mahmood, M. F., Jovanoski, Z., Biswas, A. (2014). Optical solitons in birefringent fibers with spatio-temporal dispersion. *Optik, 125* , 4935–4944.

Biswas, A., Bhrawy, A. H., Alshaery, A. A., Hilal, E. M. (2014). Thirring optical solitons with Kerr law nonlinearity. *Optik, 125 (17)* , 4932–4934.

Biswas, A., Khan, K. R., Mahmood, M. F. (2014). Bright and dark solitons in optical metamaterials. *Optik 125,(3),* 3299-3302.

Biswas, A., Khan, K. R., Rahman, A., Yildirim, A., Hayat, T., Aldossary, O.M. (2012). Bright and dark optical solitons in birefingent fibers with Hamiltonian perturbations and Kerr law nonlinearity. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, 14 (7–8)* , 571–576.

Ekici, M. (2017). Investigation of exact solutions of perturbed nonlinear Schrödinger's equation by exp(-Φ(ξ))-expansion method. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Entitüsü Dergisi Cilt 21,*Sayı 2,373-379.

Ekici, M., Mirzazadeh, M., Sonmezoglu, A., Zhou, Q., Triki, H., Ullah, M. Z., Moshokoa, S.P., Biswas, A. (2017). Optical solitons in birefringent fibers with Kerr nonlinearity by exp-function method. *Optik,131,*964-976.

Guzman, J. V., Zhou, Q., Alshaery, A. A., Hilal, E. M., Bhrawy, A.H., Biswas, A. (2015). Optical solitons in cascaded system with spatio-temporal dispersion. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, 17 (1–2)* ,74–81.

Guzman, J. V., Zhou, Q., Alshaery, A. A., Hilal, E. M., Bhrawy, A.H., Biswas, A. (2015). Optical solitons in cascaded system with spatio-temporal dispersion by ansatz approach. *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, 17 (1–2)* , 165–171.

He, J. H. (2005). Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation 6,* 207-208.

He, J. H. (2004). Variational principles for some nonlinear partial differential equations with variable coefficients. *Chaos, Solitons and Fractals, 19,* 847-851.

He, J. H., Wu, X. H. (2006). Exp-function method for nonlinear wave equations. *Chaos, Solitons and Fractals 30,* 700-708.

Hirota, R. (1973). Exact N-soliton of the wave equation of long waves in shallow water and in nonlinear lattices. *Journal of Mathematical Physics, 14,* 810-814.

Kaplan, M., Bekir, A. (2016). A novel analytical method for time-fractional differential equations. *Optik 127,* 8209-8214.

Kara, A.H., Biswas, A., Belic, M. (2016). Conservation laws for optical solitons in birefringent fibers and magneto-optic waveguides. *Optik ,127 (24)* ,11662–11673.

Khan, K., Akbar, M. A. (2013). Application of exp(F(x))-expansion method to find the exact solutions of modified Benjamin-Bona-Mahony equation. *World Applied Sciences Journal , 24(10),* 1373-1377.

Kohl, R., Biswas, A., Milovic, D., Zerrad, E. (2008). Optical soliton perturbation in a non-Kerr law media. *Optics&Laser Technology, 40 (4),* 647–662.

Kumar, S., Zhou, Q., Bhrawy, A., Zerrad, E., Biswas, A., Belic, M. (2016). Optical solitons in birefringent fibers by Lie symmetry analysis. *Romanian Report in Physics, 68 (1)* , 341–352.

Liu, S. K., Fu, Z. T., Liu, S. D., Zhao, Q. (2001). Jacobi elliptic function expansion method and periodic wave solutions of nonlinear wave equations. *Physics Letters A, 289,* 69-74.

Manafian, J., Lakestani, M., Bekir, A., (2016). Study of the analytical treatment of the (2+1)-dimensional Zoomeron, the Duffing and the SRLW equations via a new analytical approach. *International Journal of Applied and Computational Mathematics, 2(2),* 243-268.

Mirzazadeh, M., Ekici, M., Sonmezoglu, A., Zhou, Q., Triki, H., Moshokoa, S. P., Biswas, A., Belic, M. (2016). Optical solitons in birefringent fibers by extended trial equation method. *Optik, 127 (23),* 11311–11325.

Mirzazadeh, M., Mahmood, M. F., Majid, F. B., Biswas, A., Belic, M. (2015). Optical solitons in birefringent fibers with Riccati equation method. *Optoelectronics and Advanced Materials, Rapid Communications, 9 (7–8),*1032–1036.

Ozis, T., Aslan, I. (2009). Symbolic computation and exact and explicit solutions of some nonlinear evolution equation in mathematical physics. *Communications in Theoretical Physics, 51,* 577-580.

Roshid, H.O., Kabir, M. R., Bhowmik, R. C., Datta, B. K. (2014). Investigation of solitary wave solutions for Vakhnenko-Parkes equation via exp-function and exp(F(x))-expansion method. *SpringerPlus 3*: 692.

Saha, M., Sarma, A. K. (2013). Modulation instability in nonlinear metamaterials induced by cubic-quintic nonlinearities and higher order dispersive effects. *Optics Communications, 291,* 321-325.

Sardar, A., Rizvi, S. T. R., Younis, M., Milovic, D., Majid, F. B., Biswas, A., Belic, M. (2016). Thirring Optical solitons in birefringent fibers with parabolic law nonlinearity. *Optoelectronics and Advanced Materials,Rapid Communications, 10 (5–6)* , 327–331.

Sarma, A. K., Biswas, A. (2014). Solitary wave solution to the nonlinear evolution equation in cascaded quadratic media beyond the slowly varying envelope approximations. *Optica Applicata, 41(2),* 205–212.

Savescu, M., Khan, K. R., Kohl, R.W., Moraru, L., Yildirim, A., Biswas, A. (2013). Optical soliton perturbation with improved nonlinear Shrödinger's equation in nano fibers. *Journal of Nanoelectronics and Optoelectronics, 8 (2),* 208–220.

Savescu, M., Khan, K. R., Naruka, P., Jafari, H., Moraru, L., Biswas, A. (2013). Optical solitons in photonic nano waveguides with an improved nonlinear Shrödinger's equation. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience, 10 (5)* ,1182–1191.

Savescu, M., Zhou, Q., L. Moraru, L., Biswas, A., S.P. Moshokoa, S. P., Belic, M. (2016). Singular optical solitons in birefringent nano-fibers. *Optik, 127 (20),* 8995–9000.

Tascan, F., Bekir, A., (2009). Analytic solutions of the (2+1)-dimensional nonlinear evolution equations using the sine-cosine method. *Applied Mathematics and Computation 215,* 3134-3139.

Triki, H., Biswas, A., Milovic, D., M. Belic, M. (2016). Chirped Optical Solitons in Birefringent Fibers with Parabolic Law Nonlinearity and Four-Wave Mixing. *Acta Physica Polonica A, 130 (3)* , 718–726.

Wang, M. L. (1995). Solitary wave solutions for variant Boussinesq equations. *Physics Letters A, 199,* 169-172.

Xu, Y., Savescu, M., Khan, K. R., Mahmood, M. F., Biswas, A., Belic, M.(2016). Soliton propagation through nanoscale waveguides in optical metamaterials. *Optics and Laser Technology 77,* 177-186.

Yang, R., Zhang, Y., (2011). Exact combined solitary wave solutions in nonlinear metamaterials. *Journal of the Optical Society of America B 28(1*), 123-127.

Yomba, E. (2005). Construction of new solutions to the fully nonlinear generalized Camassa-Holm equations by an indirect F-function method. *Journal of Mathematical Physics 46,* 123504-123512.

Zhou, Q., Liu, L., Liu, Y., Yu, H., Yao, P., Wei, C., Zhang, H. (2015). Exact optical solitons in metamaterials with cubic-quintic nonlinearity and third-order dispersion. *Nonlinear Dynamics, 80(3),* 1365-1371.

Zhou, Q., Liu, L., Zhang, H., Wei, C., Lu, J., Yu, H., Biswas, A. (2015). Analytical study of thirring optical solitons with parabolic law nonlinearity and spatio-temporal dispersion. *The European Physical Journal Plus, 130 (138).*

Zhou, Q., Mirzazadeh, M., Ekici, M., Sonmezoglu, A. (2016). Analytical study of solitons in non-Kerr nonlinear negative-index materials. *Nonlinear Dynamics, 86,* 623-638.