T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

TAM DİSKRİMİNANT SİSTEM YÖNTEMİYLE KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİ

İsmail YAĞAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2020

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi

TAM DİSKRİMİNANT SİSTEM YÖNTEMİYLE KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİ

İsmail YAĞAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

Yozgat 2020

T.C.
YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı 70111315001 numaralı öğrencisi İsmail YAĞAN'ın hazırladığı "**Tam Diskriminant Sistem Yöntemiyle Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin İncelenmesi** " başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 04/09/2020 Cuma günü saat 13:30'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

Başkan **:** Doç. Dr. Yusuf GÜREFE

Jüri Üyesi **:** Doç. Dr. Yusuf PANDIR

(Danışman)

Jüri Üyesi **:** Dr. Öğr. Üyesi Funda TAŞDEMİR

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun ……../……../….. tarih ve …… sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

…...../...../**.....**

Prof. Dr. Mustafa SAÇMACI

Müdür

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **iii**

ABSTRACT ..... **iv**

TEŞEKKÜR ..... **v**

ŞEKİLLER LİSTESİ……..…… **vi**

1. GİRİŞ **1**

1.1. Temel Tanımlar……..……. 3

1.1.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler……..……..…….….... 3

1.1.2. Hareketli Dalga Kavramı ……..…….……..… 5

2. YÖNTEM…….....……...……..…. **7**

2.1. Tam Diskriminant Sistem Yöntemi……..….... 7

2.2. Üçüncü Dereceden Polinomlar İçin Tam Diskriminant Sistem Yöntemi…... 8

3. BULGULAR……..……..... **15**

3.1. Sine-Gordon Denklemi ve Uygulaması……... 15

3.2. KdV (Korteweg-de Vries) Denklem Sistemi ve Uygulaması ……...……. 22

SONUÇ **28**

KAYNAKLAR..... **30**

ÖZGEÇMİŞ..... **33**

TAM DİSKRİMİNANT SİSTEM YÖNTEMİYLE KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN İNCELENMESİ

İsmail YAĞAN

Yozgat Bozok Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2020; Sayfa: 43

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf PANDIR

ÖZET

Bu çalışmada, tam diskriminant sistem yöntemi incelenmiştir. Bu yöntemin üçüncü dereceden polinomlar için olanı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesini sağlar. İncelenen bu yöntem; Sine-Gordon denklemi ve KdV denklem sistemine uygulanmış ve bu denklemlerin yeni farklı tam çözümleri elde edilmiştir. Elde edilen bu yeni tam çözümlerin denklemlerin literatürde yer almayan çözümleri olduğunu ifade edilebilir. Elde edilen bu yeni tam çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri çizilerek fiziksel davranışları hakkında bilgi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Tam diskriminat sistem yöntemi, Üçüncü dereceden polinomlar için tam diskriminat sistem yöntemi, Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler, Sine-Gordon denklemi, KdV (Korteweg-de Vries) denklem sistemi

INVESTIGATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH THE COMPLETE DISCRIMINANT SYSTEM METHOD

İsmail YAĞAN

Yozgat Bozok University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Master of Science Thesis

2020; Page: 43

Thesis Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf PANDIR

ABSTRACT

In this study, the complete discriminate system is explored. This method for third order polynomials allows to obtain exact solutions of nonlinear partial differential equations. This method is applied to the Sine-Gordon equation and coupled KdV the equation and new different exact solutions of these equations are obtained. It can be stated that these new exact solutions are the solutions of the equations that are not included in the literature. Information about the physical behaviors of these new exact solutions is given by drawing two and three dimensional graphs.

Keywords: Complete discriminate system method, Complete discriminate system method for third order polynomials, Nonlinear partial differential equations, Sine-Gordon equation, coupled KdV (Korteweg-de Vries) equation

TEŞEKKÜR

Çalışmamda bana olan desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, bilgi ve becerisini aktarmak adına özveri ile çalışan, tecrübelerinden her zaman istifade ettiğim Sayın Doç. Dr. Yusuf PANDIR hocama şükranlarımı sunarım. Ayrıca bu süreçte bana her zaman destek olan eşim Sebiha YAĞAN'a, anneme, babama ve bütün aileme çok teşekkür ederim.

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1: Örnek bir dalga modeli ……..……..... 5

Şekil 3.1: (3.4) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu reel kısmının grafik gösterimi..…….. 17

Şekil 3.2: (3.5) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu sanal kısmının grafik gösterimi..…….…….…….... 17

Şekil 3.3: (3.6) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu reel kısmının grafik gösterimi..……. 18

Şekil 3.4: (3.7) denklemindeki çözümün $q=r=\gamma=2,\ \alpha=b=1,\ \beta=5$ değerleri için üç ve iki boyutlu sanal kısmının grafik gösterimi…...…… 19

Şekil 3.5: (3.9) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu reel kısmının grafik gösterimi……..……. 20

Şekil 3.6: (3.10) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu sanal kısmının grafik gösterimi..…….. 20

Şekil 3.7: (3.11) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu reel kısmının grafik gösterimi...……..…….. 21

Şekil 3.8: (3.12) denklemindeki çözümün $q=r=\gamma=2,\ \alpha=b=1,\ \beta=5$ değerleri için üç ve iki boyutlu sanal kısmının grafik gösterim…….. 22

Şekil 3.9: (3.17) denklemindeki çözümün $q=r=\lambda_1=2,\ a_3=\sqrt{2},\ \lambda_2=1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi…… 24

Şekil 3.10: (3.18) denklemindeki çözümün $q=r=\lambda_1=2,\ a_3=\sqrt{2},\ \lambda_2=1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi……...……. 24

Şekil 3.11: (3.19) denklemindeki çözümün $q=r=\lambda_1=2,\ a_3=\sqrt{2},\ \lambda_2=1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi……. 25

Şekil 3.12: (3.23) denklemindeki çözümün $q = r = \lambda_3 = 2,\ \lambda_1 = 0,\ a_3 = \lambda_2 = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi…… 26

Şekil 3.13: (3.24) denklemindeki çözümün $q = r = \lambda_3 = 2,\ \lambda_1 = 0,\ a_3 = \lambda_2 = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi……. 27

1. GİRİŞ

Belirli bir uyum içerisinde olan dünya ile tüm evren, süregelen yaşamımızda bir düzen ve bu düzenin oluşturduğu yasalar dâhilindedir. Matematiksel ifadeler ile bu yasalar izah edildiğinde dünyadaki bu karmaşıklık daha da bir açıklanır hale gelir. Evrendeki bu karmaşık düzeni ve fiziksel olayları, mantığa yatkın anlamlı bir şekilde açıklayabilmek ve matematik dili ile izah edip anlaşılır hale getirmek için diferansiyel denklemlerden yararlanılabilir. Genel anlamda diferansiyel denklemler uygulamalı bilimlerde ve ekonomi gibi bilimsel alanlarda oluşan problemleri açıklamaya yardımcı olur. Bu fiziksel olaylar zamanla değişerek türevi, bu türevlerde diferansiyel denklemleri oluşturur. Diferansiyel denklemler bilinmeyen fonksiyon ile türevlerini kapsayan denklemlerdir.

Doğadaki olayları mantığa yatkın izah edebilmemiz için diferansiyel denklemleri çözüme kavuşturmak gerekir. Son yıllarda diferansiyel denklemlerin çözümlerine yönelik yapılan araştırmalar bilim insanlarının dikkatini çekmiştir. Bu tip diferansiyel denklemlerin çözümüne yönelik çeşitli yöntemler bilim insanları tarafından bulunup geliştirilmiştir. Bulunan bu yöntemler birçok çözüme ulaşılmasına olanak sağlamıştır. Ulaşılan bu çözümler fiziksel olaylara daha mantıklı yaklaşmamızı sağlamıştır. Bu tür fiziki olayların anlaşılır olabilmesi için lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunup, bu çözümlerden ulaşılan dalga kavramına gereksinim vardır. Bu dalgalar farklılık gösterebilir. Bu dalgalardan hareketli dalga olarak adlandırılan dalga hareketi, lineer olamayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü ile elde edilir. Bilim insanları bu tip hareketli dalga türlerinin elde edilebilmesi için analitik yöntemler tavsiye etmişlerdir. Bu şekilde farklı hareketli dalga türlerini elde etmek için analitik yöntemler kullanılıp literatüre kazandırılmıştır.

Son zamanlarda yapılan araştırmalarda lineer olmayan diferansiyel denklemlere ayrılan pay artış göstermektedir. Mühendislik ve Fen bilimleri gibi bilimlerin uygulamalarında bu tip denklemlerin çeşitli türleri ortaya çıkmıştır. Fizik ve doğa olaylarının incelenmesinde bu denklemlerin genel çözümlerine ulaşılması önem arz etmektedir. Bu lineer olmayan fizik ve doğa olayları başlıca şu alanlarda

görülmüştür: Biyoloji, optik fiberler, katı hal fiziği, mühendislik, kimyasal fizik, plazma fiziği, kimyasal kinematik, jeokimya vs. Farklı bilim insanları tarafından uygulama kapsamı geniş olan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasına imkân sağlayan güvenilir yöntemler bulunmuştur. Tavsiye edilen yeni yöntemlerle yeni çözüm fonksiyonlarının bulunması birçok fiziksel olayı daha da anlaşılır duruma getirecektir. Bu sebeple tavsiye edilen yeni yöntemler geliştirilmiş ve tam çözümlerinin bulunmasına imkân sağlamıştır.

Literatürde hâlihazırda olan tam çözüm yöntemlerine örnek verecek olursak; tanh fonksiyon yöntemi [1-7], genişletilmiş eliptik fonksiyon yöntemi [8], alt denklem yöntemi [9], deneme denklem yöntemi [10-13] verilebilir.

Cheng-Shi Liu 2010 yılında lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini elde etmek için tam diskriminat sistemine dayalı bir yöntem sundu [14]. Buradaki temel amacı, integre edilemeyen diferansiyel denklemleri uygun dönüşüm kullanıp, tam diskriminat sistemine uyarlayarak denklemlerin çözümlerini elde edilmesiydi. Daha sonra Liu bu yöntemi geliştirerek deneme denklem yöntemi olarak literatüre kazandırdı [16-18]. Son zamanlarda birçok araştırmacı Liu tarafından önerilen yöntemi daha da geliştirilerek genişletilmiş deneme denklem yöntemi olarak literatüre sunulmuştur.

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerinin sınıflandırılması için tam diskriminat sistem yönteminin incelenmesi yapılmıştır. Öncelikle Liu'nun önerdiği tam diskriminant sistem yönteminin izahı yapılmış ve sonrasında ise önerilen bu yöntemin lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulaması yapılmıştır. Önerilen yöntem sırasıyla Sine-Gordon denklemine ve KdV denklem sistemine uygulanmıştır. Uygulanan yöntem için ilgili algoritmalar oluşturulmuş, yazılan kodlar ile uygulanan denklemlerin çözüme kavuşturulması sağlanmış ve literatürde bulunmayan denklemlerin yeni tam çözümleri elde edilmiştir. Ele alınan denklemlerin oluşturulan algoritmaya göre hazırlanması ve elde edilen hareketli dalga çözümlerinin iki ve üç boyutlu grafikleri Mathematica 10 paket programı ile yapılmıştır.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde temel tanımlar ile kavramlar açıklanmıştır. İkinci bölümünde tam diskriminant sistem yöntemi genel hatlarıyla anlatılmıştır. Üçüncü bölümde ise tam diskriminant sistem yönteminin Sine-Gordon denklemine ve KdV denklem sistemine uygulaması verilmiştir. Son bölümde de uygulanan yöntem ile elde edilen tam hareketli dalga çözümlerinin diğer yöntemlerle elde edilen çözümlerin karşılaştırılması yapılarak farklılıklar ortaya konulmuştur.

1.1. Temel Tanımlar

Bu kısımda kısmi türevli diferansiyel denklemler ve hareketli dalga kavramları ile alakalı bazı tanımlara yer verilip ayrıntılarından bahsedilmiştir.

1.1.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Doğada meydana gelen olaylar ile oluşan oranlar arasındaki ilişki, bu olayların sonucunda yasaları anlamamı kolaylaşır. Değişim oranı ile sürekli değişken arasındaki bu ilişkiyi diferansiyel kavramı ifade eder. Matematiksel bir algoritma ile modellenen bir diferansiyel denklem, birçok fiziksel doğa olaylarının sonucundaki ilişkilerdir. Oluşturulan diferansiyel denklemlerin çözümü, fizik, kimya gibi doğa bilimleri, ekonomi ve mühendislik bilimlerindeki problemlerin modellenmesi ile mümkündür. Bu çözümler sayesinde fiziksel olayların daha da iyi kavranması sağlanacaktır. Tüm bilimsel araştırmalarda bu diferansiyel denklemlerin çözüme kavuşturulması önemlidir.

Tanım 1.1: x bağımsız değişken olmak üzere, $\varphi = \varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyonu için bir adi diferansiyel denklem

$$\Phi\left(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots \varphi^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde ifade edilir. Bilinmeyen fonksiyon ile onun türevlerinden oluşan denklem diferansiyel denklem olarak tanımlanır. Bilinmeyen fonksiyon birçok bağımsız değişkene bağlı olduğu durumda bu denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir.

$x, y, t, \ldots$ bağımsız değişkenler ve $\phi = \phi(x, y, t, \ldots)$ bilinmeyen fonksiyon olsun. Kısmi türevli bir diferansiyel denklem

$$K\left(x, y, t, \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_t, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{tt}, \phi_{xy}, \ldots\right) = 0 \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2: Denklemin mertebesi, diferansiyel denklem içerisindeki en yüksek mertebeden türevin mertebesidir. Denklemin derecesi ise, bu en yüksek mertebeden türevin derecesidir.

Bu duruma örnek verecek olursak, diferansiyel denklemin lineer olup olmamasına veya en yüksek mertebeden türevin mertebesine veya derecesine bağlı farklı sınıflandırma yapılabilir. Denklemdeki bağımlı değişken ve onun türevlerinin derecesi bir olur ise lineer diferansiyel denklem, diğer durumlar için ise lineer olamayan diferansiyel denklem denir. Bu sınıflandırmalar denklemdeki katsayılara göre sabit, değişken ve kompleks katsayılı olarak da yapılabilir.

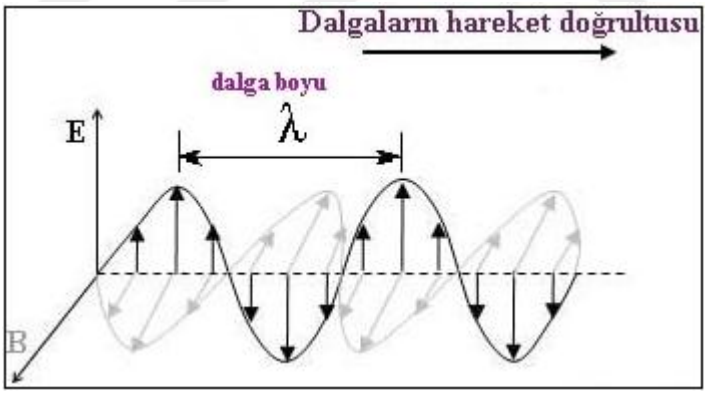
Kısmı türevli diferansiyel denklemler için de farklı sınıflandırmalar vardır. Kısmi türevli diferansiyel en yüksek türevli terimler lineer olduğunda denkleme yarı lineer denir. Şayet denklemdeki en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece değişkenlerin fonksiyonları olduğu durumlarda ise hemen hemen lineer olarak ifade edilir.

Bu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde uygulanacak yöntemlerin seçimi için denklemdeki bağımsız değişkenlerin sayısı ile denklemin mertebesi önem arz etmektedir. Bu duruma istinaden denklemin tek bir çözümüne, bazı durumlarda birçok çözümüne, bazı durumlarda ise hiçbir çözümüne ulaşılamayabilir. Bir de denklemin bütün çözümlerini içeren genel çözümünün bulunamadığı durumlarda bazı özel çözümleri elde edilebilir.

Bu özel çözümlerde daha çok başlangıç ve sınır şartları eklenip çözüme kavuşturulması istenir.

1.1.2. Hareketli Dalga Kavramı

Uygulamalı bilimlerde birden fazla olayın izah edilmesinde dalga kavramı ile karşılaşılır. Belli bir ortamda yayılan enerjinin yer değiştirmesine imkan sağlayan titreşimler dalga hareketi olarak ifade edilir. Bu dalgalara su yüzeyinde oluşan dalgalar, belli ortamda yayılan ses dalgaları, denizin derinliğinde oluşan dalgalar, ışık demeti şeklindeki parçacıklar ve deprem anında meydana gelen sarsıntılar örnek olarak verilebilir. Salınımının şiddeti genliğini ve iki tepesi veya iki çukuru arasındaki mesafe (λ) dalga boyu, dalganın salınımın sıklığı ise (f) frekans olarak ifade edilir. Dalganın oluşmasına imkan sağlayan titreşimlere göre dalgalar, periyodik veya periyodik olamama şeklinde sınıflandırılır. Kemandaki nota sesi periyodik dalgalara, patlama sonucu oluşan ses ise periyodik olmayan dalgalara örnek verilebilir. Hareketli dalga ve duran dalga olarak iki çeşit dalga vardır. Hareketli dalga belli iki nokta arasındaki enerjinin taşınması ile hareket eden dalgadır. Duran dalga ise ortamın hareketine göre hareket yapıp sabit bir pozisyonda kalan dalgadır.



Şekil 1.1. Örnek bir dalga modeli

İskoç mühendis John Scott Rusell tarafından ilk kez 1834'te tek dalga hareketi gözlemlenmiştir. Gözlemlenen bu dalga hareketinde periyodik bir dalga olmadığı ve şeklini bozmadan tümsek bir hareket ile yayılan bir dalga olduğunu tespit etmiştir. Bu gözlem sonrasında gerekli bir teorik yapı oluşturularak bu tarz doğa olayları modellenmiştir ve Diederik Johannes Korteweg ile öğrencisi Gustav de Vries 1895'te hareketli dalga kavramı teorisinin başlangıcı sayılan Korteweg de Vries

(KdV) denklemini oluşturmuşlardır. Fazla derinliği bulunmayan sularda oluşan dalgaların yayılması KdV denklemi ile ifade edilerek tasarlanmıştır. Bu denklem standart olarak

$$\phi_t + 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0 \tag{1.3}$$

ifade edilir.

γ, x konumunda t zamanında dalganın yerden yüksekliğini ifade etsin. (1.3) denkleminin genel çözümü

$$\phi(x,t) = k\,\mathrm{sech}^2\left(\delta\left(x-ct\right)\right),\ c = 2k = 4\delta^2 \tag{1.4}$$

olarak elde edilmiştir. Burada oluşan dalgalar lineer olmayan bir biçimde verilmiştir. Hareketli dalgalar olarak adlandırılan bu lineer olamayan dalgalar; şekil, hız ve enerjilerini koruyarak yayılırlar [15]. Hareketli dalgalar herhangi bir etkileşim durumundan sonra ve çarpışmalarında özelliklerini kaybetmezler. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin izahında fiziksel olayların modellenmesi ile oluşan hareketli dalgalar önemli bir yere sahiptir. Hareketli dalgalar, lineer olamayan sistemlerin anlaşılmasına önemli katkılar sunar. Hareketli dalga teorisi, uygulamalı matematik ve matematiksel fiziğin önemli bir dalıdır. Biyolojik sistemlerde, akışkanlar mekaniğinde ve parçacık fiziğinde karşılaştığımız hareketli dalgalar teknolojinin de gelişmesi ile birçok sahada uygulama alanı bulmuştur. Hareketli dalgalar özellikle son yıllarda sağlık bilimlerinde nöronların ilettiği sinyaller işlendiğinde oluştuğu izlenmiştir.

2. YÖNTEM

Bu bölümde Cheng-Shi Liu [14] tarafından geliştirilen tam diskriminat sistem yönteminin açıklaması yapılarak genel hatları ile izahı yapılmıştır.

2.1. Tam Diskriminant Sistem Yöntemi

Kısmi türevli diferansiyel denklemine hareketli dalga dönüşümü uygulandığında bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem $\vartheta_1,...,\vartheta_n$ ler parametre olmak üzere

$$\phi'(\eta) = G(\phi, \vartheta_1, ..., \vartheta_n) \tag{2.1}$$

elde edilir. (2.1) denkleminin çözümlerini bulabilmek için

$$\eta - \eta_0 = \int \frac{d\phi}{H(\phi, \vartheta_1, ..., \vartheta_n)} \tag{2.2}$$

(2.2) integralini hesaplamak gerekir. Başka bir ifade ile söyleyecek olursak bu tip denklemleri çözüme kavuşturmak için (2.2) denklemini integre etmek lazımdır. Bu integralin farklı çözümlerini farklı parametrelere göre çözülebiliriz. Burada öncelikle yapılacak iş parametrelerin kapsamını belirleyip bu parametrelere karşılık gelen integrali çözmek gerekir. Kolay bir şekilde parametrelerin kapsamını belirleyebilmek için polinoma tam diskriminant sistemi adı verilen bir yöntem uygulanır. $ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden bir polinom olmak üzere tam diskriminant sistemi $\Delta = b^2 - 4ac$ dir. Fakat yüksek dereceli polinomlarda bir tam diskriminant sisteminin oluşturulması kolay olmayabilir. 2010 yılında Cheng-Shi Liu tarafından tam diskriminant sistemine bir öneri getirildi [14]. Yüksek dereceli polinomlar için tam diskriminant sistem yönteminin algoritmasının oluşturması Liu tarafından gerçekleştirildi. Örneğin üçüncü dereceden bir polinom $G(\omega) = \omega^3 + e_2\omega^2 + e_1\omega + e_0$ için tam disikriminant sistem yöntemi

$$\Delta = -27\left(\frac{2e_2^3}{27} + e_0 - \frac{e_1 e_2}{3}\right)^2 - 4\left(e_1 - \frac{e_2^2}{3}\right)^3$$
$$D_1 = e_1 - \frac{e_2^2}{3} \tag{2.3}$$

şeklindedir. Dördüncü dereceden farklı bir polinom $g(\omega) = \omega^4 + k\omega^2 + l\omega + m$ için tam disikriminant sistem yöntemi Liu tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$D_1 = 4,\ D_2 = -k,\ \ D_3 = 8mk - 2k^3 - 9l^2,$$
$$D_4 = 4k^4 m - k^3 l^2 + 36kml^2 - 32m^2 k^2 - \frac{27}{4}l^4 + 64m^3,\ F_2 = 9l^2 - 32km. \tag{2.4}$$

Son yıllarda Liu tarafından önerilen tam diskriminant sistem yöntemi lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam çözümlerine ulaşmak ve yeni tam çözümler bulabilmek için birçok farklı araştırmacı tarafından kullanılmıştır [16-22]. Liu tarafından önerilen tam diskriminant sistem yönteminin ilk hali [14] Wang ve Li [23] tarafından geliştirilerek, bazı lineer olmayan denklemlerin tek ve hareketli dalga çözümlerini elde etmek için uygulanmıştır. Birçok lineer olmayan diferansiyel denklem [10-12] dikkate alındığında bunların hareketli dalga çözümlerini direkt olarak (2.2) denklemiyle bağlantılı olmadığını ifade etmemiz gerekir. Bu denklemlerin hareketli dalga çözümleri ile deneme denklemi yönteminin çözümleri [10-12] dolaylı olarak (2.2) integrali ile bağlantılıdır.

2.2. Üçüncü Dereceden Polinomlar İçin Tam Diskriminant Sistem Yöntemi

Birinci mertebeden integrallenebilen bir adi diferansiyel denklemi

$$(\phi')^2 = b_3\phi^3 + b_2\phi^2 + b_1\phi + b_0 \tag{2.5}$$

şeklinde kabul edelim. Bu denkleminin bütün çözümlerinin sınıflandırılmasını tam diskriminant sistem yöntemini kullanarak aşağıdaki gibi sınıflandırılabiliriz.

$$\omega = (b_3)^{\frac{1}{3}}\phi \tag{2.6}$$

dönüşümler dikkate alındığında,

$\phi = (b_3)^{-\frac{1}{3}}\omega,\ \phi' = \dfrac{\omega'}{(b_3)^{\frac{1}{3}}},\ (\phi')^2 = \left(\dfrac{d\omega}{(b_3)^{\frac{1}{3}}}\right)^2$ bulunur. Bulunanlar (2.5) denkleminde yerine yazıldığında,

$e_2 = b_2(b_3)^{-\frac{2}{3}}$, $e_1 = b_1(b_3)^{-\frac{1}{3}}$, $e_0 = b_0$ olmak üzere,

$$\pm(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta - \eta_0) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^3 + e_2\omega^2 + e_1\omega + e_0}} \tag{2.7}$$

şekline indirgenir. $G(\omega) = \omega^3 + e_2\omega^2 + e_1\omega + e_0$ olmak üzere (2.3)'de ifade edilen tam diskriminant sistem yöntemi uygulandığında dört farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıda ayrıntılı olarak ifade edilmiştir.

Durum 1: $\Delta = 0,\ D_1 < 0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27\left(\dfrac{2e_2^3}{27} + e_0 - \dfrac{e_1e_2}{3}\right)^2 - 4\left(e_1 - \dfrac{e_2^2}{3}\right)^3 = 0$ ve $e_1 - \dfrac{e_2^2}{3} < 0$ alındığında α iki katlı ve β tek katlı kök olmak üzere,

$$G(\omega) = (\omega - \alpha)^2(\omega - \beta),\ \alpha \neq \beta \tag{2.8}$$

yazılır. Bu durumda $\omega > \beta$ olduğunda, gibi bulunur. (2.7) integrali dikkate alınarak (2.8) ifadesi yerine yazılırsa aşağıdaki tam çözümler

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta - \eta_0) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega - \alpha)^2(\omega - \beta)}} \tag{2.9}$$

bulunur. (2.9) denklemine $\omega = t^2 + \beta$ dönüşümü uygulandığında $d\omega = 2tdt$

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\mu - \eta_0) = \int \frac{2tdt}{(t^2 + \beta - \alpha)t} = 2\int \frac{dt}{t^2 + \beta - \alpha} \tag{2.10}$$

yazılır. Daha sonra tekrardan $t=(\sqrt{\beta-\alpha})x$ dönüşümü uygulanırsa $dt=(\sqrt{\beta-\alpha})dx$

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)=2\int\frac{\sqrt{\beta-\alpha}dx}{(\beta-\alpha)x^2+\beta-\alpha}=\frac{2}{\sqrt{\beta-\alpha}}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{2}{\sqrt{\beta-\alpha}}(\arctan x+c) \quad (2.11)$$

elde edilir. Yapılan dönüşümler dikkate alınarak ters dönüşümler uygulandığında,

$$\omega=t^2+\beta,\ t=\left(\sqrt{\beta-\alpha}\right)x,\ \omega=(b_3)^{\frac{1}{3}}\phi$$

$$\tan\left(\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)\right)=x=\frac{t}{\sqrt{\beta-\alpha}}=\frac{\sqrt{\omega-\beta}}{\sqrt{\beta-\alpha}} \quad (2.12)$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\phi_1=(b_3)^{-\frac{1}{3}}\left[(\beta-\alpha)\tan^2\left(\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)\right)+\beta\right],\ \beta>\alpha \quad (2.13)$$

elde edilir.

$\alpha>\beta$ için (2.13) denklemindeki ϕ_1 fonksiyonu

$$\phi_2=(b_3)^{-\frac{1}{3}}\left[(\beta-\alpha)\tan^2\left(\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\beta-\alpha}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)\right)+\beta\right] \quad (2.14)$$

olur ve $\sqrt{-1}=i$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\phi_2=(b_3)^{-\frac{1}{3}}\left[(\beta-\alpha)\tanh^2\left(\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)\right)+\beta\right],\ \alpha>\beta \quad (2.15)$$

elde edilir.

(2.10) denklemine $t=(-\sqrt{\beta-\alpha})x$ dönüşümü uygulandığında, $dt=(-\sqrt{\beta-\alpha})dx$

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)=2\int\frac{-\sqrt{\beta-\alpha}dx}{(\beta-\alpha)x^2+\beta-\alpha}=\frac{2}{\sqrt{\beta-\alpha}}\int\frac{-dx}{x^2+1}=\frac{2}{\sqrt{\beta-\alpha}}(\operatorname{arccot}x+c) \quad (2.16)$$

elde edilir. Yapılan dönüşümler dikkate alınarak ters dönüşümler uygulandığında,

$$\omega=t^2+\beta, t=\left(-\sqrt{\beta-\alpha}\right)x, \omega=(b_3)^{\frac{1}{3}}\phi$$

$$\cot\left(\frac{\sqrt{\beta-\alpha}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)\right)=x=\frac{-t}{\sqrt{\beta-\alpha}}=-\frac{\sqrt{\omega-\beta}}{\sqrt{\beta-\alpha}} \quad (2.17)$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında $\alpha>\beta$ için

$$\phi_3=(b_3)^{-\frac{1}{3}}\left[(\beta-\alpha)\cot^2\left(\frac{\sqrt{-1}\sqrt{\alpha-\beta}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)\right)+\beta\right] \quad (2.18)$$

olur ve $\sqrt{-1}=i$ eşitliği yerine yazılırsa,

$$\phi_3=(b_3)^{-\frac{1}{3}}\left[(\beta-\alpha)\coth^2\left(\frac{\sqrt{\alpha-\beta}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)\right)+\beta\right], \alpha>\beta \quad (2.19)$$

elde edilir.

Durum 2: $\Delta=0,\ D_1=0$, olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre

$-27\left(\frac{2e_2^3}{27}+e_0-\frac{e_1e_2}{3}\right)^2-4\left(e_1-\frac{e_2^2}{3}\right)^3=0$ ve $e_1-\frac{e_2^2}{3}=0$ alındığında α üç katlı kök olmak üzere,

$$G(\omega)=(\omega-\alpha)^3 \quad (2.20)$$

yazılır. Bu durumda tam çözümü aşağıdaki gibi bulunur. (2.7) integrali dikkate alınarak (2.20) ifadesi yerine yazıldığında,

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)=\int\frac{d\omega}{\sqrt{(\omega-\alpha)^3}} \tag{2.21}$$

olur. (2.21) denklemine $\omega-\alpha=x^2$ dönüşümü uygulandığında $d\omega=2xdx$

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)=\int\frac{2xdx}{x^3}=2\int\frac{dx}{x^2}=2\int x^{-2}dx=-2x^{-1}+c \tag{2.22}$$

yazılır. Burada integral sabiti $c=0$ alınırsa,

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)=\frac{-2}{x} \tag{2.23}$$

elde edilir. Yapılan dönüşümler dikkate alınarak ters dönüşümler uygulandığında,

$$\omega-\alpha=x^2,\omega=(b_3)^{\frac{1}{3}}\phi$$

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)=\frac{-2}{\sqrt{\omega-\alpha}} \tag{2.24}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\phi_4=4(b_3)^{-1}(\eta-\eta_0)^{-2}+\alpha(b_3)^{-\frac{1}{3}} \tag{2.25}$$

elde edilir.

Durum 3: $\Delta>0,\ D_1<0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre

$-27\left(\frac{2e_2^3}{27}+e_0-\frac{e_1e_2}{3}\right)^2-4\left(e_1-\frac{e_2^2}{3}\right)^3>0$ ve $e_1-\frac{e_2^2}{3}<0$ alındığında $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ tek katlı kökler olmak üzere,

$$G(\omega)=(\omega-\alpha)(\omega-\beta)(\omega-\gamma) \tag{2.26}$$

yazılır. Bu durumda tam çözümü aşağıdaki gibi bulunur. $\alpha<\beta<\gamma,\ \alpha<\omega<\beta$ olmak üzere (2.7) integrali dikkate alınarak (2.26) ifadesi yerine yazıldığında,

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)=\int\frac{d\omega}{\sqrt{(\omega-\alpha)(\omega-\beta)(\omega-\gamma)}} \tag{2.27}$$

olur. (2.27) denklemine $\omega-\alpha=t^2$ dönüşümü uygulandığında $d\omega=2tdt$ olur. Daha sonra bir kez daha $t=\sqrt{\alpha-\beta}\tan x$ dönüşümü uygulandığında $dt=\sqrt{\alpha-\beta}\,\dfrac{dx}{(\cos x)^2}$

olmak üzere (2.27) integralinin sağ tarafı

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-\dfrac{(\beta-\gamma)(\sin x)^2}{(\alpha-\gamma)}}} \tag{2.28}$$

bulunur ki bu da bizi jakobi eliptik fonksiyon çözümüne götürür. Sadeleştirme adına gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$\phi_5=(b_3)^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha+(\beta-\alpha)sn^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0),n\right)\right] \tag{2.29}$$

elde edilir.

(2.29) çözümünde $\omega>\gamma$ olması durumu dikkate alındığında (2.29) çözümü

$$\phi_6=(b_3)^{-\frac{1}{3}}\left[\frac{\gamma-\beta sn^2\left(\dfrac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0),n\right)}{cn^2\left(\dfrac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0),n\right)}\right] \tag{2.30}$$

şeklinde bulunur.

Durum 4: $\Delta < 0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre

$-27\left(\frac{2e_2^3}{27}+e_0-\frac{e_1e_2}{3}\right)^2-4\left(e_1-\frac{e_2^2}{3}\right)^3<0$ alındığında α reel kök ve diğer kökler kompleks ve $k^2-4l<0$ olmak üzere,

$$G(\omega)=(\omega-\alpha)(\omega^2+k\omega+l) \tag{2.31}$$

yazılır. Bu durumda tam çözümü aşağıdaki gibi bulunur. (2.7) eşitliğinde (2.31) denklemi yerine yazılırsa,

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)=\int\frac{d\omega}{\sqrt{(\omega-\alpha)(\omega^2+k\omega+l)}} \tag{2.32}$$

elde edilir. (2.32) denklemine $\omega-\alpha=x^2$ dönüşümü uygulandığında $d\omega=2xdx$ olur. Daha sonra bir kez daha $x=\sqrt{\alpha+\frac{l}{1+k}}\tan t$ dönüşümü uygulanırsa $dx=\sqrt{\alpha+\frac{l}{1+k}}\frac{1}{\cos^2 t}dt$ olmak üzere,

$$(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0)=\int\frac{dt}{\sqrt{1-(\sin t)^2}} \tag{2.33}$$

bulunur ki bu da bizi jakobi eliptik fonksiyon çözümüne götürür. (2.33) çözümünde gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $n^2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha+\frac{k}{2}}{\sqrt{\alpha^2+k\alpha+l}}\right)$ olmak üzere,

$$\phi_7=(b_3)^{-\frac{1}{3}}\left[\alpha-\sqrt{\alpha^2+k\alpha+l}+\frac{2\sqrt{\alpha^2+k\alpha+l}}{1+cn\left((\alpha^2+k\alpha+l)^{\frac{1}{4}}(b_3)^{\frac{1}{3}}(\eta-\eta_0),n\right)}\right] \tag{2.34}$$

elde edilir.

3. BULGULAR

Bu bölümde Sine-Gordon denklemi ile KdV (Korteweg-de Vries) denklem sistemi genel hatlarıyla incelenip sonrasında ise tam diskriminant sistem yönteminin bu denklemlere uygulamaları incelenmiştir.

3.1. Sine-Gordon Denklemi ve Uygulaması

Sine-Gordon denklemi, d'Alembert operatörünü ve bilinmeyen sinüs fonksiyonunu içeren (1+1) boyutlu doğrusal olmayan hiperbolik kısmi türevli bir diferansiyel denklemdir.

İlk kez Edmond Bour (1862) tarafından sabit negatif eğrilik yüzeylerinin incelenmesi esnasında 3 boşlukta −1 eğrilik yüzeyleri için Gauss-Codazzi denklemi olarak tanıtılmıştır [24]. Daha sonra Frenkel ve Kontorova (1939) tarafından kristal çıkıkları araştırmalarında Frenkel-Kontorova modeli olarak adlandırılarak yeniden tanımlanmıştır. Bu denklem 1970'lerden sonra soliton çözümlerinin varlığı sebebiyle bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir [25].

Mühendislik ve fizik alanlarında yaygın olarak kullanılan Sine-Gordon denkleminin genel hali

$$\phi_{xt} = b\sin\phi \tag{3.1}$$

olarak bilinir.

Farklı fonksiyon formları olarak bilinen bazı yeni hareketli dalga çözümleri farklı yöntemler kullanılarak elde edilmiştir [26-31]. Bunlar arasında bazı yöntemler [31] vardır ki çok karmaşıktır. Fakat doğal ve gereksiz değildir. Bununla birlikte, tüm atom çözümlerini Sine-Gordon denklemi ile göstermenin çok kolay olduğunu ifa etmek gerekir. (3.1) denklemini $\phi = \phi(\eta),\ \eta = qx + rt$ dalga dönüşümü uyguladıktan sonra bir kez integre ettiğimizde, c herhangi bir sabit sayı olmak üzere,

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{-\frac{b}{qr}(\cos\phi - c)}} \tag{3.2}$$

elde edilir. $-1 \le \omega \le 1$ olmak üzere, (3.2) denklemine $\phi = \arccos\omega$ dönüşümü uygulandığında $d\phi = -\dfrac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}}$

$$\pm(\eta - \eta_0) = \int \frac{d\omega}{\sqrt{\dfrac{b}{qr}(\omega-1)(\omega+1)(\omega-c)}} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) denklemine (2.3)'de ifade edilen tam diskriminant sistem yöntemi uygulandığında üç farklı durum vardır. Bu durumlar aşağıda ayrıntılı olarak ifade edilmiştir.

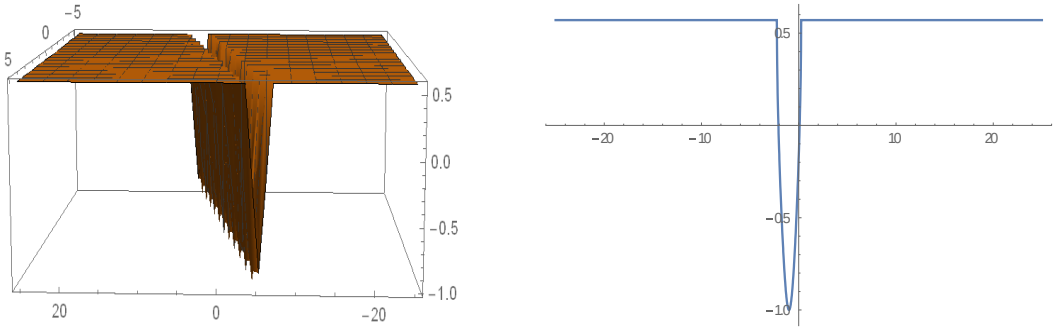
Durum 1: $\dfrac{b}{qr} > 0$**,** $c = 1$ olmak üzere $\Delta = 0,\ D_1 < 0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27\left(\dfrac{2e_2^3}{27} + e_0 - \dfrac{e_1 e_2}{3}\right)^2 - 4\left(e_1 - \dfrac{e_2^2}{3}\right)^3 = 0$ ve $e_1 - \dfrac{e_2^2}{3} < 0$ alındığında 1 iki katlı ve -1 tek katlı kök olmak üzere ve $\eta_0 = 0$ olarak alındığında karanlık(dark) soliton çözümü

$$\phi_{1,1} = \arcsin\left\{2\tanh^2\left(\sqrt{\frac{b}{2qr}}(qx+rt)\right) - 1\right\} \tag{3.4}$$

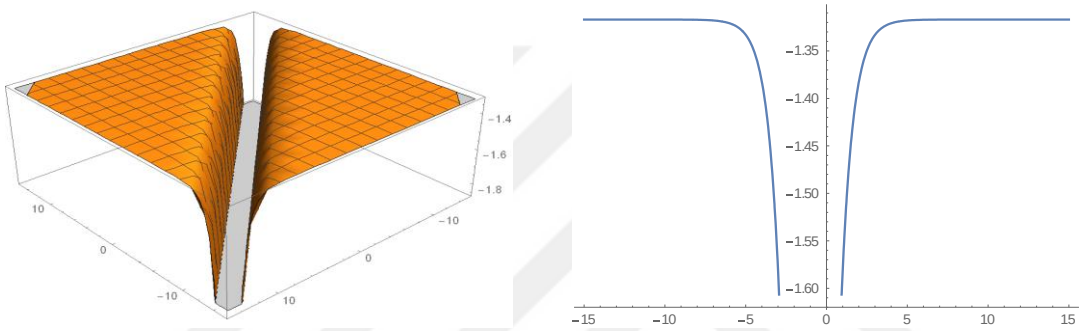
ve singüler(singular) soliton çözümü

$$\phi_{1,2} = \arcsin\left\{2\coth^2\left(\sqrt{\frac{b}{2qr}}(qx+rt)\right) - 1\right\} \tag{3.5}$$

elde edilir.



Şekil 3.1. (3.4) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu reel kısmının grafik gösterimi.

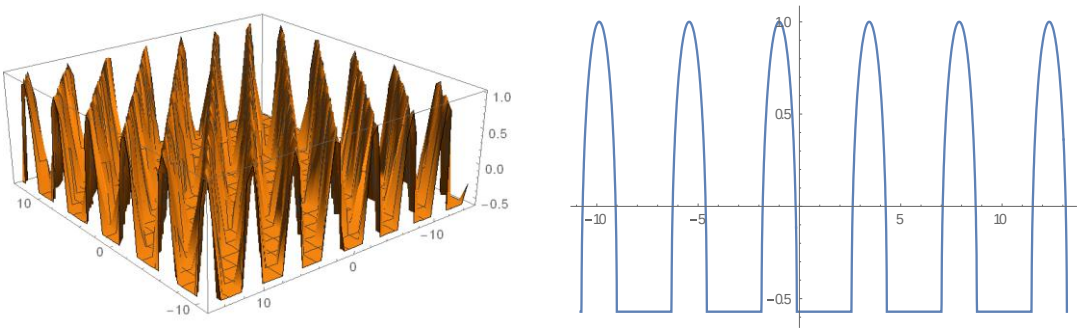


Şekil 3.2. (3.5) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu sanal kısmının grafik gösterimi.

Durum 2: $\frac{b}{qr}>0, c=-1$ olmak üzere $\Delta=0,\ D_1<0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27\left(\frac{2e_2^3}{27}+e_0-\frac{e_1e_2}{3}\right)^2-4\left(e_1-\frac{e_2^2}{3}\right)^3=0$ ve $e_1-\frac{e_2^2}{3}<0$ alındığında -1 iki katlı ve 1 tek katlı kök olmak üzere ve $\eta_0=0$ olarak alındığında periyodik soliton çözümü

$$\phi_2=\arcsin\left\{-2\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b}{qr}}\left(qx+rt\right)\right)+1\right\} \tag{3.6}$$

elde edilir.

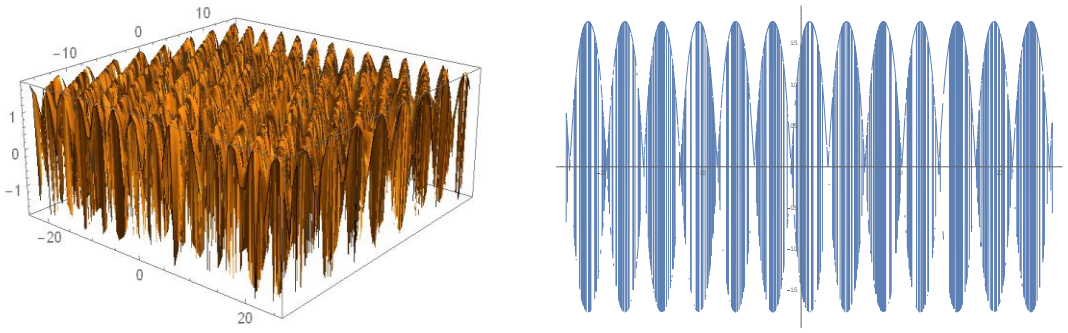


Şekil 3.3. (3.6) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu reel kısmının grafik gösterimi.

Durum 3: $\frac{b}{qr}>0$**,** $c\neq\pm1$ olmak üzere, $1,\ -1,\ c$'yi tekrardan sıralayarak $\alpha<\beta<\gamma$ ile gösterilim. Esasında $-1<c<1$ ve $1<c$ alınır ve $\Delta>0,\ D_1<0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27\left(\frac{2e_2^3}{27}+e_0-\frac{e_1e_2}{3}\right)^2-4\left(e_1-\frac{e_2^2}{3}\right)^3>0$ ve $e_1-\frac{e_2^2}{3}<0$ olur ki $1,\ -1,\ c$ kökleri tek katlı köktür ve iki durum söz konusudur. $\alpha<\omega<\beta$ olduğunda $n^2=\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}$ olmak üzere ve $\eta_0=0$ olarak alındığında çift periyotlu hareketli dalga çözümü

$$\phi_3=\arcsin\left\{\alpha+(\beta-\alpha)sn^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\sqrt{\frac{2b}{qr}}(qx+rt),n\right)\right\} \tag{3.7}$$

elde edilir.



Şekil 3.4. (3.7) denklemindeki çözümün $q=r=\gamma=2,\ \alpha=b=1,\ \beta=5$ değerleri için üç ve iki boyutlu sanal kısmının grafik gösterimi.

(3.3) integralinde $\frac{b}{qr}<0$ alınıp ve $\omega=-u$ dönüşümü uygulandığında (3.3) integrali aşağıdaki integrale

$$\pm(\eta-\eta_0)=\int\frac{du}{\sqrt{-\frac{b}{qr}(u-1)(u+1)(u+c)}} \tag{3.8}$$

dönüşür. (3.8) denkleminin çözümü için de üç farklı durum vardır.

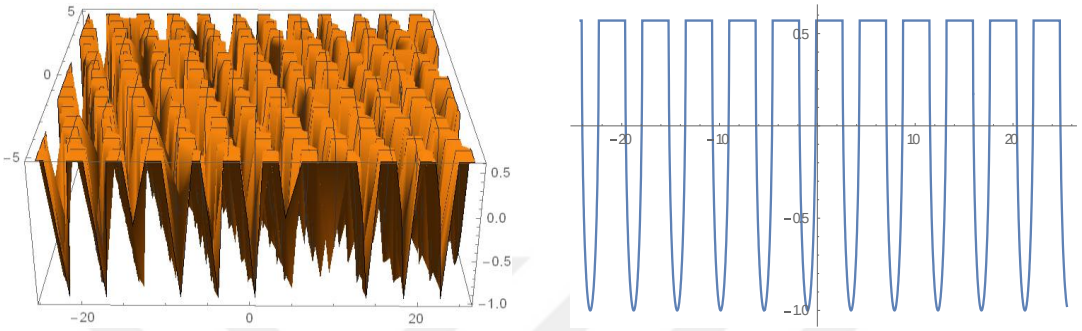
Durum 4: $\frac{b}{qr}<0$, $c=1$ olmak üzere $\Delta=0,\ D_1<0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27\left(\frac{2e_2^3}{27}+e_0-\frac{e_1e_2}{3}\right)^2-4\left(e_1-\frac{e_2^2}{3}\right)^3=0$ ve $e_1-\frac{e_2^2}{3}<0$ alındığında -1 iki katlı ve 1 tek katlı kök olmak üzere ve $\eta_0=0$ olarak alındığında karanlık(dark) soliton çözümü

$$\phi_{4,1}=-\arcsin\left\{2\tanh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2b}{qr}}(qx+rt)\right)-1\right\} \tag{3.9}$$

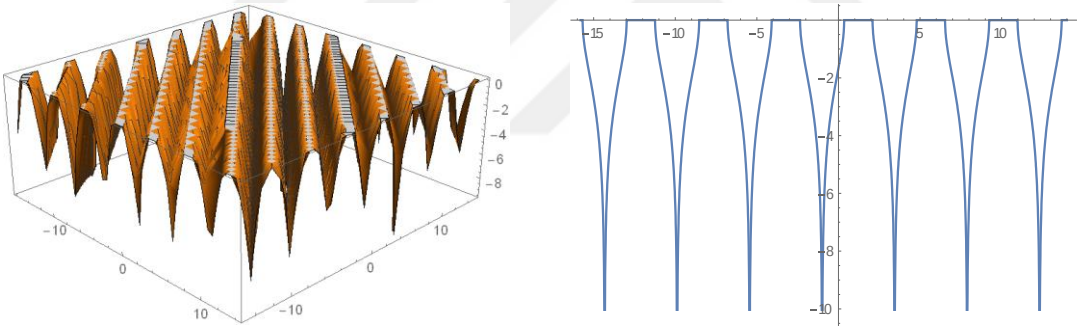
ve singüler(singular) soliton çözümü

$$\phi_{4,2} = -\arcsin\left\{2\coth^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2b}{qr}}\left(qx+rt\right)\right)-1\right\} \tag{3.10}$$

elde edilir.



Şekil 3.5. (3.9) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu reel kısmının grafik gösterimi.

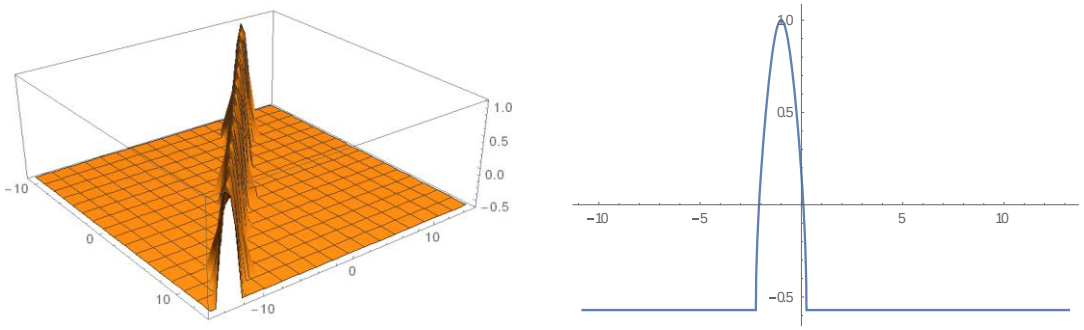


Şekil 3.6. (3.10) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu sanal kısmının grafik gösterimi.

Durum 5: $\dfrac{b}{qr}<0$, $c=-1$ olmak üzere $\Delta=0,\ D_1<0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27\left(\dfrac{2e_2^3}{27}+e_0-\dfrac{e_1e_2}{3}\right)^2-4\left(e_1-\dfrac{e_2^2}{3}\right)^3=0$ ve $e_1-\dfrac{e_2^2}{3}<0$ alındığında 1 iki katlı ve -1 tek katlı kök olmak üzere ve $\eta_0=0$ olarak alındığında periyodik soliton çözümü

$$\phi_5 = -\arcsin\left\{-2\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2b}{qr}}\left(qx+rt\right)\right)+1\right\} \tag{3.11}$$

elde edilir.

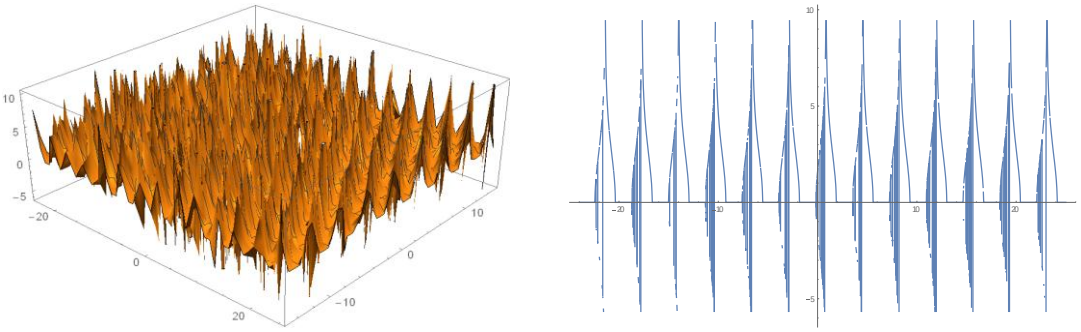


Şekil 3.7. (3.11) denklemindeki çözümün $q=r=2,\ b=1,$ değerleri için üç ve iki boyutlu reel kısmının grafik gösterimi.

Durum 6: $\frac{b}{qr}<0$, $c\neq\pm1$ olmak üzere, $1,\ -1,\ c$'yi tekrardan sıralayarak $\alpha<\beta<\gamma$ ile gösterilim. Burada $-1<c<1$ ve $1<c$ alınır ve $\Delta>0,\ D_1<0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27\left(\frac{2e_2^3}{27}+e_0-\frac{e_1e_2}{3}\right)^2-4\left(e_1-\frac{e_2^2}{3}\right)^3>0$ ve $e_1-\frac{e_2^2}{3}<0$ olur ki $1,\ -1,\ c$ kökleri tek katlı köktür. $\alpha<u<\beta$ olduğunda $n^2=\frac{\beta-\alpha}{\lambda-\alpha}$ olmak üzere ve $\eta_0=0$ olarak alındığında çift periyotlu hareketli dalga çözümü

$$\phi_6=-\arcsin\left\{\alpha+(\beta-\alpha)\,sn^2\left(\frac{\sqrt{\gamma-\alpha}}{2}\sqrt{-\frac{2b}{qr}}\,(qx+rt),n\right)\right\} \qquad (3.12)$$

elde edilir.



Şekil 3.8. (3.12) denklemindeki çözümün $q = r = \gamma = 2,\ \alpha = b = 1,\ \beta = 5$ değerleri için üç ve iki boyutlu sanal kısmının grafik gösterimi.

3.2. KdV (Korteweg-de Vries) Denklem Sistemi ve Uygulaması

Literatürde, KdV denklem sistemleri sığ tabakalı sıvıdaki iki rezonansla etkileşen iç-yerçekimi-dalga hareketin iki normal modunu tarif eden denklem sistemidir [32].

İki katmanlı bir akışkan modelinden bazı keyfi parametrelerle atmosferik tıkanmalar, atmosfer ve okyanus arasındaki etkileşimler [33], okyanus sirkülasyonları ve hatta kasırgalar ve tayfunlar [34] gibi atmosferik ve okyanus olaylarını tanımlamak için bazı yeni tip KdV denklem sistemleri türetilerek kullanılır.

KdV denklem sisteminin genel hali

$$\begin{aligned} &\phi_t + \alpha\psi_x + \beta\phi^2\phi_x + \gamma\psi_{xxx} = 0, \\ &\psi_t + \omega\left(\phi\psi\right)_x + \varepsilon\psi\psi_x = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

şeklindedir.

(3.13) denklemine $\phi = \phi(\eta),\ \psi = \psi(\eta),\ \eta = qx + rt$ dalga dönüşümü uyguladığımızda c_0, c_1 integrasyon sabitleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\gamma q^3\varphi'' + \frac{q\beta}{2}\varphi^2 - \frac{q\alpha}{2}\psi^2 + r\phi + c_0 = 0, \\ &\phi = -\frac{\varepsilon}{2\omega}\psi - \frac{c_1}{\omega q\psi} - \frac{r}{\omega q} \end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. Burada iki durum vardır.

Durum 1: $c_1 = 0$ olduğunda $\phi = -\frac{\varepsilon}{2\omega}\psi - \frac{r}{\omega q} - \frac{\omega}{\omega q}$ kabul edersek

$$\left(\psi'\right)^2 = a_3\psi^3 + a_2\psi^2 + a_1\psi + a_0 \tag{3.15}$$

olur. Burada $a_3 = \frac{2\omega}{\gamma q^2 \varepsilon}\left\{\frac{\alpha q}{3} + \frac{\beta q \varepsilon^2}{12\omega^2}\right\}$, $a_2 = \frac{\beta r\omega - \varepsilon r\omega}{\gamma q^{\varepsilon}\omega^2}$, $a_1 = \frac{2\omega}{\gamma q^2 \varepsilon}\left\{\frac{\beta r^2}{q\omega^2} - \frac{2r^2}{q\omega} + 2c_0\right\}$

ve b_0 keyfi sabittir. Burada $e_2 = \frac{a_2}{a_3}$, $e_1 = \frac{a_1}{a_3}$, $e_0 = \frac{a_0}{a_3}$ alalım.

$G\left(\psi\right) = \psi^3 + e_2\psi^2 + e_1\psi + e_0$ fonksiyonu için tam diskriminant sistemi $\Delta = -27{e_0}^2 - 4\left(-\frac{2e_1}{3}\right)^3\left(-\frac{2e_2}{5}\right)^{-1}$, $D_1 = -\frac{2e_1}{3}\left(-\frac{2e_2}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$ olur. (3.15) denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi olur.

Durum 1.1: $\Delta = 0,\ D_1 < 0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27{e_0}^2 - 4\left(-\frac{2e_1}{3}\right)^3\left(-\frac{2e_2}{5}\right)^{-1} = 0$ ve $-\frac{2e_1}{3}\left(-\frac{2e_2}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} < 0$ alındığında λ_1 iki katlı ve λ_2 tek katlı kök olmak üzere,

$$G(\psi) = (\psi - \lambda_1)^2(\psi - \lambda_2),\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \tag{3.16}$$

yazılır. Eğer $\psi > \lambda_2$ olursa ve $\eta_0 = 0$ olarak alındığında

$$\psi_{1,1} = \left(\lambda_1 - \lambda_2\right)\tanh^2\left(\frac{a_3\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}{2}\left(qx + rt\right)\right) + \beta,\ \lambda_1 > \lambda_2 \tag{3.17}$$

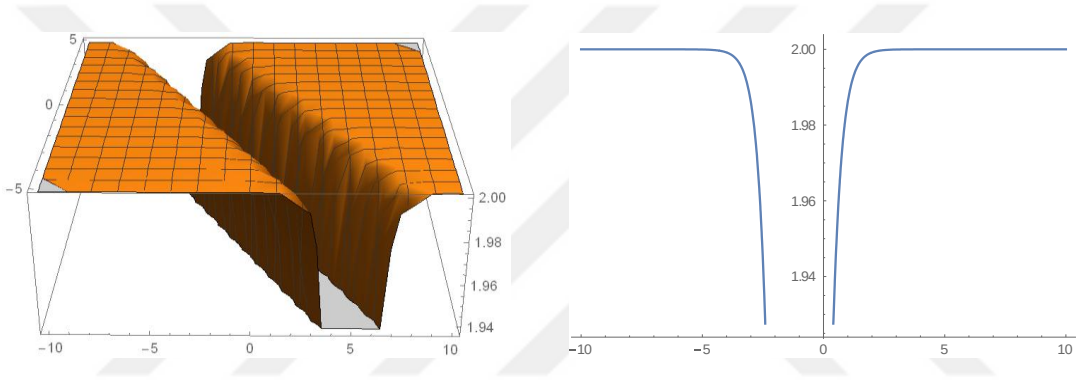
karanlık(dark) soliton çözümü,

$$\psi_{1,2} = (\lambda_1 - \lambda_2)\coth^2\left(\frac{a_3\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}{2}(qx + rt)\right) + \beta,\ \lambda_1 > \lambda_2 \qquad (3.18)$$

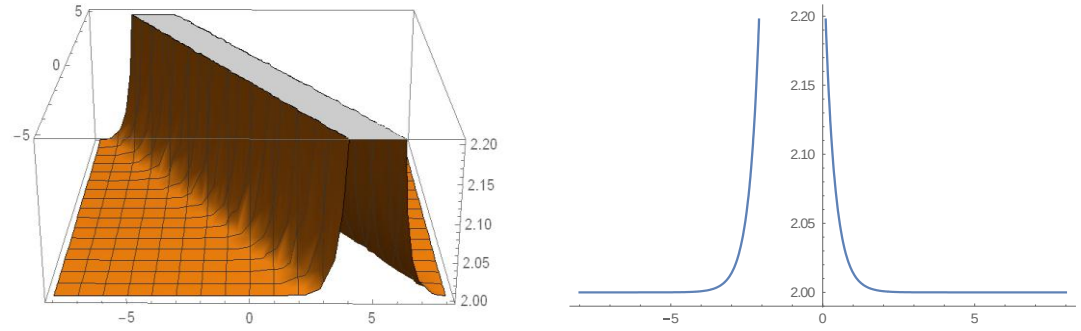
singüler(singular) soliton çözümü ve

$$\psi_{1,3} = (\lambda_1 - \lambda_2)\sec^2\left(\frac{a_3\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}}{2}(qx + rt)\right) + \beta,\ \lambda_1 < \lambda_2 \qquad (3.19)$$

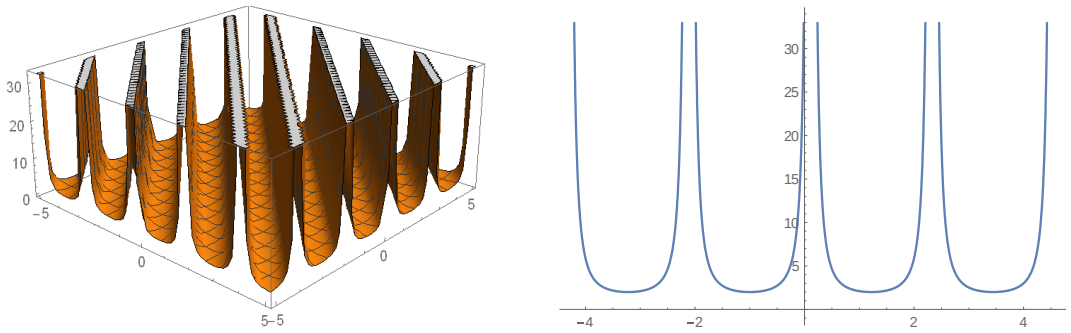
periyodik soliton çözümü elde edilir.



Şekil 3.9. (3.17) denklemindeki çözümün $q = r = \lambda_1 = 2,\ a_3 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



Şekil 3.10. (3.18) denklemindeki çözümün $q = r = \lambda_1 = 2,\ a_3 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.



Şekil 3.11. (3.19) denklemindeki çözümün $q=r=\lambda_1=2,\ a_3=\sqrt{2},\ \lambda_2=1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Durum 1.2: $\Delta=0,\ D_1=0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27e_0{}^2-4\left(-\frac{2e_1}{3}\right)^3\left(-\frac{2e_2}{5}\right)^{-1}=0$ ve $-\frac{2e_1}{3}\left(-\frac{2e_2}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}=0$ alındığında λ_1 tek katlı kök olmak üzere,

$$G(\psi)=(\psi-\lambda_1)^3 \tag{3.20}$$

yazılır. Buradan $\eta_0=0$ olarak alındığında rasyonel çözümü

$$\psi_2=4a_3\left(qx+rt\right)^{-2}+\lambda_1 \tag{3.21}$$

elde edilir.

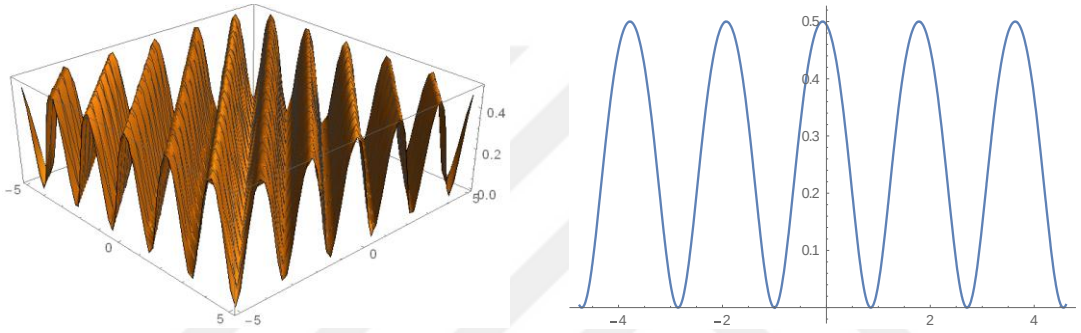
Durum 1.3: $\Delta>0,\ D_1<0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre $-27e_0{}^2-4\left(-\frac{2e_1}{3}\right)^3\left(-\frac{2e_2}{5}\right)^{-1}>0$ ve $-\frac{2e_1}{3}\left(-\frac{2e_2}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}<0$ alındığında $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ tek katlı kökler ve $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ olmak üzere,

$$G(\psi)=(\psi-\lambda_1)(\psi-\lambda_2)(\psi-\lambda_3),\ \lambda_1<\lambda_2<\lambda_3 \tag{3.22}$$

yazılır. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ olduğunda $n = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1}$ olmak üzere ve $\eta_0 = 0$ olarak alındığında çift periyotlu hareketli dalga çözümü

$$\psi_3 = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\, sn^2\left(\frac{a_3\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}}{2}(qx + rt), n\right) \tag{3.23}$$

elde edilir.

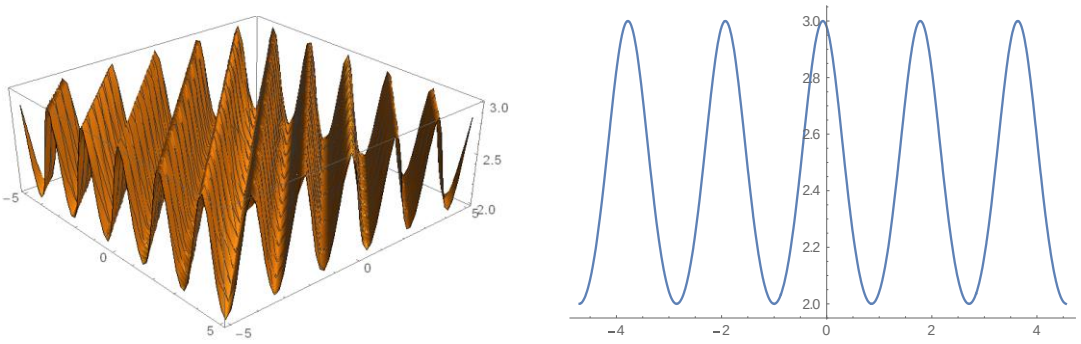


Şekil 3.12. (3.23) denklemindeki çözümün $q = r = \lambda_3 = 2,\ \lambda_1 = 0,\ a_3 = \lambda_2 = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

$\psi > \lambda_3$ olduğunda $n^2 = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1}$ olmak üzere ve $\eta_0 = 0$ olarak alındığında çift periyotlu hareketli dalga çözümü

$$\psi_4 = \frac{\lambda_3 - \beta sn^2\left(\dfrac{a_3\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}}{2}(qx + rt), n\right)}{cn^2\left(\dfrac{a_3\sqrt{\lambda_3 - \lambda_1}}{2}(qx + rt), n\right)} \tag{3.24}$$

elde edilir.



Şekil 3.13. (3.24) denklemindeki çözümün $q = r = \lambda_3 = 2,\ \lambda_1 = 0,\ a_3 = \lambda_2 = 1$ değerleri için üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Durum 1.4: $\Delta < 0$ olduğunda tam diskriminant sistem yöntemine göre

$-27\left(\frac{2e_2^3}{27} + e_0 - \frac{e_1 e_2}{3}\right)^2 - 4\left(e_1 - \frac{e_2^2}{3}\right)^3 < 0$ alındığında λ_1 reel kök ve diğer kökler kompleks ve $k^2 - 4l < 0$ olmak üzere,

$$G(\omega) = (\omega - \lambda_1)(\omega^2 + k\omega + l) \tag{3.25}$$

yazılır. $n^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda_1 + \frac{k}{2}}{\sqrt{\lambda_1{}^2 + k\lambda_1 + l}}\right)$ olmak üzere ve $\eta_0 = 0$ olarak alındığında,

$$\psi_5 = \lambda_1 - \sqrt{\lambda_1{}^2 + k\lambda_1 + l} + \frac{2\sqrt{\lambda_1{}^2 + k\lambda_1 + l}}{1 + cn\left((\lambda_1{}^2 + k\lambda_1 + l)^{\frac{b_3}{4}}(qx + rt), n\right)} \tag{3.26}$$

elde edilir.

SONUÇ

Bu tez çalışmasında tam diskriminant sistem yöntemi kullanılarak lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesi hedeflenmiştir. Bu yöntem sayesinde birçok fiziksel olayların modellenmesiyle oluşturulan problemlerin çözümlerinin bulunması ve anlaşılması sağlanmıştır. Çözümlerin bulunması için önerilen bu yöntem ilk kez Liu tarafından geliştirilmiş ve literatüre tam diskriminant sistem yöntemi olarak adlandırılarak kazandırılmıştır. Tam diskriminant sistem yöntemi lineer olmayan Sine-Gordon denklemi ve KdV (Korteweg-de Vries) denklem sistemine ayrı ayrı uygulanmış ve elde edilen tam çözümler değişik durumlar altında ifade edilmiştir. Elde edilen çözümler literatürde bulunmayan yeni farklı tam çözüm fonksiyonlarıdır. Hareketli dalgaların karmaşık durumlarına yeni tam çözüm fonksiyonları karşılık gelmektedir. Bu çözümlerin daha iyi izah edilebilmesi için, bu yeni farklı tam çözümleri özel olarak seçilen farklı katsayılara göre iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir. Bunun sonucunda yeni farklı tam çözümlerin fiziksel davranışları ile ilgili bilgi sahibi olunmuştur. Bu yeni farklı tam çözümlerin fiziksel davranışları istenildiği durumda başka araştırmacılar tarafından incelenebilir. Çizilen grafikler incelendiğinde görülecek ki bu yeni farklı tam çözüm fonksiyonları farklı hareketli dalgalara karşılık gelmektedir. Literatürde bulunan çeşitli hareketli dalgaların (dark, bright) dışında birçok farklı hareketli dalga çeşidinin bir arada bulunduğu hareketli dalgalar çizilen grafiklerle anlatılmaya çalışılmıştır. Bunun sonucunda fiziksel olayların daha iyi anlaşılabileceğini söyleyebiliriz. Tam diskriminant sistem yöntemi kullanılarak incelenen denklemlerin yeni tam çözüm fonksiyonları farklı polinom dereceleri(dördüncü, beşinci ve daha yüksek dereceli) alındığında farklı tam çözümler elde edilebilecektir. Buradan daha genel tam çözüm fonksiyonlarının elde edileceğini söyleyebiliriz. Tam diskriminant sistem yöntemi geliştirilip, diğer analitik yöntemlere uyarlanarak uygulanabilir. Buda lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler ile integre edilemeyen denklemlere uygulanarak yeni farklı tam çözümlerin bulunmasına olanak sağlayabilir. Böylece literatürde bulunmayan çoklu soliton, çoklu karanlık soliton,

çoklu aydınlık soliton, çoklu jakobi eliptik fonksiyon ve çoklu periyodik soliton çözümleri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

1. Hereman, W., Exact Solitary Wave Solutions of Coupled Nonlinear Evolution Equations Using MACSYMA, Comput. Phys. Commun., 65(1-3), 143-150, 1991.

2. Parkes E.J., Duffy B.R., An Automated Tanh-Function Method for Finding Solitary Wave Solutions to Non-Linear Evolution Equations, Comput. Phys. Commun, 98(3), 288-300, 1996.

3. Fan E., Dai H., A Direct Approach with Computerized Symbolic Computation Forfinding a Series of Traveling Waves to Nonlinear Equations, Comput. Phys. Commun., 153(1), 17-30, 2003.

4. Li Z., Liu Y., RATH: A Maple Package for Finding Travelling Solitary Wave Solutions to Nonlinear Evolution Equations, Comput. Phys. Commun., 148(2), 256-266, 2002.

5. Liu Y., Li Z., A Maple Package for Finding Exact Solitary Wave Solutions of Coupled Nonlinear Evolution Equations, Comput. Phys. Commun., 155(1), 65-76, 2003.

6. Baldwin D., Göktas Ü., Hereman W., Symbolic Computation of Hyperbolic Tangent Solutions for Nonlinear Differential–Difference Equations, Comput. Phys. Commun., 162(3), 203-217, 2004.

7. Li Z., Liu Z., RAEEM: A Maple Package for Finding a Series of Exact Traveling Wave Solutions for Nonlinear Evolution Equations, Comput. Phys. Commun., 163(3), 191-201, 2004.

8. Liu S.K., Fu Z.T., Liu S.D., Zhao Q., New Jacobi Elliptic Function Expansion and New Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations, Phys. Lett. A, 290(1-2), 72-76, 2001.

9. Fan E.G., Uniformly Constructing a Series of Explicit Exact Solutions to Nonlinear Equations in Mathematical Physics, Chaos Solitons Fractals, 16(5), 819-839, 2003.

10. Liu C.S., Trial Equation Method and İts Applications to Nonlinear Evolution Equations, Acta Phys. Sinica, 54(6), 2505-2509, 2005.

11. Liu C.S., Using Trial Equation Method to Solve the Exact Solutions for Two Kinds of KdV Equations with Variable Coefficients, Acta Phys. Sinica, 54(10), 4506-4510, 2005.

12. Liu C.S., New Exact Envelope Traveling Wave Solutions of High-Order Dispersive Cubic-Quintic Nonlinear Schrodinger Equation, Comm. Theoret. Phys., 44(5), 799-801, 2005.

13. Liu C.S., A New Trial Equation, Comm. Theoret. Phys. 45(3), 395-397, (2006).

14. Liu C.S**.,** Applications of Complete Discrimination System for Polynomial for Classificationsof Traveling Wave Solutions to Nonlinear Differential Equations, Comput. Phys. Commun., 181(2), 317-324, 2010.

15. Wadati, M., Sogo, K., Gauge Transformations in Soliton Theory, J. Phys. Soc. Japan, 52(2), 394-398, 1983.

16. Liu C.S., Du X.H., New Exact Solutions of Coupled Klein-Gordon-Schrödinger Equations, Acta Phys. Sinica, 54(3), 1039-1043, 2005.

17. Liu C.S., Travelling Wawe Solutions of Triple Sine-Gordon Equation, Chin. Phys. Lett., 21(12), 2369-2371, 2004.

18. Liu C.S., All Single Traveling Wawe Solutions to (3+1)-Dimensional Nizhnok-Novikov-Veselov Equations, Comm. Theoret. Phys. 45(6),991-992, 2006.

19. Liu C.S., The Classification of Travelling Wave Solutions and Superposition of Multi-Solutions to Camassa–Holm Equation with Dispersion, Chin. Phys., 16(7), 1832-1837, 2007.

20. Du X-H., Liu C-S., New Exact Traveling Wave Solutions for Compound KdV-Type Equation with Nonlinear Terms of Any Order, Comm. Theoret. Phys., 46(5), 787-792, 2006.

21. Liu C-S., Trial Equation Method to Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous: Mathematical Discussions and Its Applications, Comm. Theoret. Phys., 45(2),219-223, 2006.

22. Liu C-S., Exact Travelling Wave Solutions for (1+1)-Dimensional Dispersive Long Wave Equation, Chin. Phys., 14(9), 1710-1715, 2005.

23. Wang D.S., Li H.B., Single and Multi-Solitary Wave Solutions to A Class of Nonlinear Evolution Equations, J. Math. Anal. Appl., 343(1), 273–298, 2008.

24. Bour E., Théorie de la Déformation Des Surfaces, J. Ecole Imperiale Polytechnique, 19, 1–48, 1862.

25. Frenkel J., Kontorova T., On the Theory of Plastic Deformation and Twinning, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Seriya Fizicheskaya, 1, 137–149, 1939.

26. Panigrahi M., Dash P.C., Mixing Exponential and Double Sine-Gordon Equation, Phys. Lett. A, 321(5-6), 330-334, 2004.

27. Fan E.G., Applications of the Jacobi Elliptic Function Method to Special-Type Nonlinear Equations, Phys. Lett. A, 305(6),383-392, 2002.

28. Peng Y.Z., Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations, Phys. Lett. A, 314, 401-408, 2003.

29. Sirendaoreji, Sun J., A Direct Method for Solving Sine-Gordon Type Equations, Phys. Lett. A, 298(2-3), 133-139. 2002.

30. Chou K.W., A Class of Doubly Periodic Waves for Nonlinear Evolution Equation, Wave Motion, 35(1), 71-90, 2002.

31. Fu Z.T., Yao Z.H., Liu S.K., Liu S.D., Exact Jacobian Elliptic Function Solutions to Sine-Gordon Equation, Comm. Theoret. Phys., 44(1), 23-30, 2005.

32. Gear J.A., Grimshaw R, Stud. Appl. Math., 70, 235, 1984.

33. Pedlosky J., Geophysical Fluid Dynamics, New York: Springer, 1979.

34. Lou S.Y., Tang X.Y., Jia M., Huang F., Vortices, Circumfluence, Symmetry Groups and Darboux Transformations of the Euler equations, Phys. Rev. E 75, 056318, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Yozgat'ta doğan İsmail YAĞAN, orta öğrenimini Karakız Beldesi Veli Uyar İlköğretim Okulunda ve lise öğrenimini Sorgun Lisesinde tamamlamıştır. 2006 yılında kazandığı Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2010 yılında bitirmiştir. 2011 yılında da Kırşehir Ahi Evran Üniversitesinde Pedagojik Formasyon eğitimini tamamlayıp mezun olmuştur. 2014 yılında Milli Eğitim Bakanlığına atanıp ilk görev yeri olan Yozgat'ın Akdağmadeni ilçesinde Matematik öğretmenliği görevine başlamıştır. Halen Akdağmadeni ilçesi Şöhrettin Duygu Anadolu Lisesinde görev yapmaktadır.

2015 yılında yüksek lisans eğitimine Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda başlamıştır.

İletişim Bilgileri:

Telefon: 546 677 32 25

E-posta: ismailyagann@gmail.com