T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FIBONACCI VE CHEBYSHEV POLİNOMLARININ TÜREV VE İNTEGRALLERİ ÜZERİNE

MELEK ELİF GÖREN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

YOZGAT – 2023

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FIBONACCI VE CHEBYSHEV POLİNOMLARININ TÜREV VE İNTEGRALLERİ ÜZERİNE

MELEK ELİF GÖREN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR

YOZGAT – 2023

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Melek Elif GÖREN

19/01/2023

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FIBONACCI VE CHEBYSHEV POLİNOMLARININ TÜREV VE İNTEGRALLERİ ÜZERİNE

MELEK ELİF GÖREN

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. FUNDA TAŞDEMİR

Bu tez çalışmasında, Fibonacci polinomları ve Chebyshev polinomlarının türev ve integralleri ile ilgili detaylı bir inceleme yapılmıştır. Bu anlamda, Fibonacci ve Chebyshev polinomları incelenerek bu polinomların türev ve integralleriyle ilgili literatürde yer alan özdeşlikler araştırılmıştır. Ayrıca bu tezde Fibonacci polinomları ile Pascal üçgeni arasındaki ilişkiye yer verilmiştir. Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde, tez konusu ile ilgili yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışma ile ilgili temel bilgilere, tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Fibonacci polinomları detaylı olarak incelenmiştir. Fibonacci polinomu ile ilgili özdeşlikler, Fibonacci polinomlarının birinci ve ikinci türevleri ve integralleri çalışılmıştır. Dördüncü bölümde, Chebyshev polinomlarının dört farklı çeşitinin türev ve integralleri ayrıntılı olarak verilmiştir. Yine birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomlarının trigonometri ile ilişkileri verilmiştir. Beşinci bölüm olan Sonuç ve Öneriler bölümünde ise yapılan çalışma özetlenmiş, değerlendirmeler yapılmış ve ileride yapılabilecek çalışmalar ile ilgili bazı önerilerde bulunulmuştur.

2023, x+41 SAYFA.

ANAHTAR KELİMELER: Fibonacci polinomu, Chebyshev polinomu, Fibonacci polinomunun türevi, Pascal üçgeni.

ABSTRACT

MASTER THESIS

ON DERIVATIVES AND INTEGRALS OF FIBONACCI AND CHEBYSHEV POLYNOMIALS

MELEK ELİF GÖREN

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. FUNDA TAŞDEMİR

The derivatives and integrals of Fibonacci polynomials and Chebyshev polynomials have both been thoroughly examined in this thesis. In this sense, by examining the Fibonacci and Chebyshev polynomials, the identities in the literature related to the derivatives and integrals of these polynomials have been investigated. In addition, in this thesis, the relationship between Fibonacci polynomials and Pascal's triangle is given. The researches on the thesis subject are mentioned in the first section of this study, which consists of five sections. Fundamental knowledge regarding the study, definitions, and theorems are provided in the second section. Fibonacci polynomials are fully examined in the third section. Fibonacci polynomial identities, their first and second derivatives, and their integrals are investigated. The fourth section provides detailed information on the derivatives and integrals of four different kinds of Chebyshev polynomials. The relationships between the first and second kinds of Chebyshev polynomials and trigonometry are also shown. The study was summarized, evaluated, and some recommendations for future research were made in the fifth section, which is titled Conclusion and Suggestions.

2023, x+41 PAGE.

KEYWORDS: Fibonacci polynomial, Chebyshev polynomial, Derivative of Fibonacci polynomial, Pascal triangle.

ÖNSÖZ

Öğrencisi olmaktan onur duyduğum danışmanım Doç. Dr. Funda TAŞDEMİR'e en içten saygılarımla teşekkür ederim. Değerli deneyimlerinden yararlandığım Yozgat Bozok Üniversitesi Matematik Bölümündeki tüm hocalarıma da ayrıca teşekkür ederim. Son olarak, hayatım boyunca yanımda olan, aldığım kararları her zaman destekleyen, sadece bu çalışma sırasında değil, beni her zaman cesaretlendiren annem Fatma Gören'e, babam Muhittin Gören'e ve kardeşlerime sonsuz şükranlarımı sunuyorum.

Melek Elif GÖREN

19/01/2023

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Tez Onay Sayfası……. ii

Tez Beyanı…… iii

Özet…….. iv

Abstract…… v

Önsöz…… vi

İçindekiler……. vii

Tablolar Listesi……. ix

Simgeler ve Kısaltmalar Listesi……... x

1. GİRİŞ……... 1

2. GENEL BİLGİLER…….. 3

3. FIBONACCI POLİNOMLARI…… 6

3.1. Fibonacci Polinomları ile İlgili Bazı Özdeşlikler…….. 6

3.2. Fibonacci Polinomlarının Türevi…….. 10

3.3. Fibonacci Polinomlarının İntegrali…… 22

4. CHEBYSHEV POLİNOMLARI……. 24

4.1. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomları…… 24

4.1.1. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomunun Türevi……... 25

4.1.2. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomunun İntegrali…… 26

4.1.3. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomu ve Trigonometri İlişkisi……. 27

4.2. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomları…….. 29

4.2.1. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomunun Türevi…… 30

4.2.2. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomunun İntegrali……. 31

4.2.3. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomu ve Trigonometri İlişkisi……... 32

4.3. Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomları……... 33

4.3.1. Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomunun İntegrali…….. 35

4.4. Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomları……... 36

4.4.1. Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomunun İntegrali……... 37

5. SONUÇ ve ÖNERİLER……... 39

6. KAYNAKLAR……. 40
ÖZGEÇMİŞ

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo		**Sayfa**
Tablo 3.1.	Türevin Pascal-2 üçgeni	12
Tablo 3.2.	Yarı köşegen üçgeni ve Pascal üçgeni	12
Tablo 3.3.	Ters yarı köşegen üçgeni	13
Tablo 3.4	İkinci türevin Pascal-2 üçgeni	13
Tablo 3.5.	İkinci türevin üçgeni ve Pascal üçgeni	14
Tablo 4.1.	Farklı n değerleri için $\cos n\theta$ fonksiyonu	28

SİMGELER ve KISALTMALAR

Tez çalışması boyunca kullanılmış olan simgeler ve kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{F_n}$	**:** n. Fibonacci Sayısı
$\boldsymbol{f_n(x)}$	**:** n. Fibonacci Polinomu
$\boldsymbol{L_n}$	**:** n. Lucas Sayısı
$\boldsymbol{l_n(x)}$	**:** n. Lucas Polinomu
$\boldsymbol{T_n(x)}$	**:** Birinci Çeşit Chebyshev Polinomu
$\boldsymbol{U_n(x)}$	**:** İkinci Çeşit Chebyshev Polinomu
$\boldsymbol{V_n(x)}$	**:** Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomu
$\boldsymbol{W_n(x)}$	**:** Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomu

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
LHS	**:** Eşitliğin Sol Tarafı
RHS	**:** Eşitliğin Sağ Tarafı

1. GİRİŞ

Fibonacci, 1170 yılında İtalya'nın Pisa kentinde, Bonacci adlı zengin bir tüccar ailede doğdu ("Fibonacci" adı, "Filius Bonacci"nin kısaltmasıdır ve Bonacci'nin oğlu anlamına gelir). Babası Afrika'nın kuzey kıyısında Bugia'de gümrük tahsildarıyken Fibonacci'yi Hint - Arap sayı sistemi ve hesaplama yöntemleri ile tanıştırdı.

Yaygın seyahat ve hesaplama sistemleri üzerine kapsamlı araştırmaların ardından Fibonacci, önde gelen eseri Liber Abaci'yi (Abaküs Kitabı) 1202'de yazdı. Kitap, cebir ve aritmetiğin temellerini içerir. Fibonacci, tavşan çiftliği sahibi bir arkadaşıyla ilgili olduğunu söylediği bir soruna kitabında dikkat çeker. Bu soruna göre arkadaşının çiftliğindeki tavşanlar doğumdan sonraki ilk iki ayda yavru veremezler. Üçüncü aydan itibaren, her tavşan çifti her ay bir çift yavru verir. Bu nedenle, belirli bir aydaki çift sayısı, önceki iki ayın toplamına eşittir. Tavşanların asla ölmediği ideal varsayımı altında, çiftlikte herhangi bir ayda kaç çift vardır? Bu durumda tavşan çifti sayısı aylara göre yılda 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 olur. Hintli matematikçiler bunu 6. yüzyıldan beri biliyorlardı ama bunu Avrupa'ya ilk getiren Fibonacci oldu. Fibonacci'nin kendisi bu sayı dizisi üzerinde çalışmadı. Hatta bu sayı dizisinin 19. yüzyılın başına kadar ciddi bir şekilde incelenmediği bile ileri sürülmüştür. 19. yüzyılda Fransız matematikçi Edouard Lucas bu sayı şemasını Fibonacci dizisi olarak adlandırdı. Edouard Lucas, mevcut Fibonacci sayı dizisinin başlangıç değerlerini değiştirerek Lucas sayılarını oluşturdu. Bunlar; 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ... tür.

Fibonacci sayıları üç nedenden dolayı önemlidir. Birincisi, dizinin ilk terimleri bitkilerde, böceklerde, kısacası doğanın birçok yerinde çok sık görülmektedir. İkincisi, Fibonacci sayısının bir terimini bir önceki terime bölersek her zaman aynı oranı verir. "Altın oran" olarak bilinen bu sayı, vücudumuzun boyutlarından Mısır piramitlerine kadar sayısız yerde karşımıza çıkıyor. Üçüncüsü, bu sayıların sayı teorisinde çok ilginç özellikleri vardır.

Fibonacci dizisinin yalnızca başlangıç koşulları veya yalnızca yineleme ilişkisi veya her ikisi değiştirilerek elde edildiği çeşitli diziler ve polinomlar tanımlanmıştır. Bu diziler ve polinomlar üzerinde çok çalışma yapılmış ve birçok özdeşlik bulunmuştur. Fibonacci polinomları ilk olarak 1883 yılında Belçikalı matematikçi E. Charles Catalan ve ardından Alman matematikçi E. Jacobsthal tarafından incelenmiştir.

Catalan tarafından incelenen Fibonacci polinomları sonraları M. N. S. Swamy' in çalışmaları ile devam etmiştir. Fibonacci'nin polinomu olarak kabul edilen polinom Catalan'ın tanımladığı polinomdur.

Chebyshev polinomları matematikte ilk olarak sayılar teorisi ve onun adını taşıyan polinom serileri üzerinde çalışan ünlü Rus matematikçi Pafnut Lvovich Chebyshev (1821-1894) tarafından tanımlandı. Chebyshev polinomları matematiğin birçok alanında çok önemlidir ve bu alanda birçok makale ve kitap yazılmıştır (Rivlin 1990; Mason 2003). Literatürde Fibonacci ve Chebyshev polinomlarının türevleri ve integralleri üzerine birçok yazar tarafından yapılmış çalışmalar bulunmaktadır.

Zhang (1997) Fibonacci dizisi ile ilgili bazı özdeşlikler gösterdi. Zhang ve Ma (2002) Fibonacci sayılarının ve Fibonacci polinomlarının özelliklerini incelediler. Falcon ve Plaza (2009) Fibonacci polinomu ve birinci ve ikinci türevlerini ispatlayarak verdi. Zhang ve Ma (2018) Fibonacci sayılarının ve Fibonacci polinomlarının yapısal özelliklerini incelediler. Zhang (2002) Chebyshev polinomları için bazı özdeşlikler verdi. Zhang (2004) Chebyshev polinomlarının türevini kullanarak bazı teoremleri kanıtladı. Çalık (2010) dört farklı Chebyshev polinomunu detaylı olarak inceleyip bazı temel özellikler verdi. Wang ve Zhang (2012) Chebyshev polinomlarının kuvvetlerinin toplamlarını içeren bir problem üzerinde çalıştılar. Yang (2014) Falcon ve Zhang 'ın fikirlerini birleştirerek Chebyshev polinomu ve Fibonacci polinomunun türetilmesi üzerinde çalıştı. Wang ve Zhang (2015) Chebyshev polinomlarının birinci çeşidinin bir türevini verdiler. Cesarano (2015) Chebyshev polinomunun integrali üzerinde çalıştı. Whang (2015) Chebyshev polinomları, Fibonacci polinomları ve Lucas polinomları arasındaki ilişkiyi gösterdi. Zhang ve Wang (2017), Chebyshev polinomunun birinci çeşidinin integralini içeren problemi inceledi. Wang ve Hu (2018) Zang ve Wang tarafından önerilen açık soruyu çözdü.

Bu tezin amacı, Fibonacci ve Chebyshev polinomlarının türevlerini ve integrallerini ayrıntılı olarak incelemektir. Bu anlamda özel sayı dizileri ile oluşturulan polinomlar olan Fibonacci ve Chebyshev polinomları ele alınıp bu polinomların literatürde yer alan türev ve integralleri ile ilgili özdeşlikleri araştırılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde özel sayı dizileri olan Fibonacci ve Lucas sayılarından bahsedilecektir.

Tanım 2.1. (Fibonacci Sayıları)

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Fibonacci sayıları denir ve n. Fibonacci sayısı F_n ile gösterilir.

Başlıca Fibonacci sayıları:

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$ şeklindedir.

Tanım 2.2. (Lucas Sayıları)

$L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $n \geq 2$ için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ yineleme bağıntısı ile tanımlanan tamsayılar dizisindeki sayılara Lucas sayıları denir ve n. Lucas sayısı L_n ile gösterilir.

Başlıca Lucas sayıları:

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, … şeklindedir.

Tanım 2.3. (Altın Oran)

Altın oran, ahenk açısından en mükemmel boyutu ürettiği düşünülen, matematik ve sanatta bulunan bir bütünün parçaları arasındaki geometrik ve sayısal ilişkidir. İlk kimin keşfettiği bilinmemekle birlikte konu hakkında Mısırlılar ve Yunanlılar tarafından yapılan bazı araştırmalar bulunmaktadır. Öklid, MÖ 300'lerde yazdığı "Elementler" adlı çalışmasında altın oranı "uç ve mühim oranda bölmek" şeklinde tanımlamıştır. Mısırlılarca Keops Piramidinde ve Leonardo da Vinci tarafından "İlahi Oran" isimli resimde kullanılan "altın oran" , aynı zamanda "Fibonacci Sayıları" olarak da tanınmaktadır.

Bu oranın kısaca gösterimi:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

şeklindedir.

Bir Fibonacci sayısını bir önceki Fibonacci sayısına bölmenin sonucu 1.618... olup 6765 / 4181 = 1.618… sonucunu vermektedir. Bu, 89'un altındaki Fibonacci sayıları için 0.01 gibi küçük bir farkla gerçekleşebilse de sonuç tüm büyük sayılar için aynıdır. Yani

serideki ardışık iki sayının oranı, sayılar arttıkça altın orana yani 1.618'e yaklaşır ve 89/55 ve sonrasında 1.618'de sabitlenir.

Teorem 2.1. (Binet Formülleri)

$x^2 - x - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri α ve β olsun. F_n ve L_n için Binet formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir (Koshy, 2001). Burada

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

dir. F_n ve L_n için Binet formüllerinden

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n \text{ ve } L_{-n} = (-1)^n L_n$$

elde edilir.

Tanım 2.4. (Pascal Üçgeni)

Üçgensel bir binom katsayıları kümesidir. Adını Fransız matematikçi Blaise Pascal'dan almasına rağmen Pascal'dan önce Hintli, İranlı, Çinli, Alman ve İtalyan matematikçiler tarafından çalışılmıştır. Ömer Hayyam tarafından düzenlenmiştir. Aşağıda Pascal Üçgeni verilmiştir.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\quad\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\quad\binom{2}{1}\quad\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\quad\binom{3}{1}\quad\binom{3}{2}\quad\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\quad\binom{4}{1}\quad\binom{4}{2}\quad\binom{4}{3}\quad\binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\quad\binom{5}{1}\quad\binom{5}{2}\quad\binom{5}{3}\quad\binom{5}{4}\quad\binom{5}{5}$$
$$\begin{array}{cccccc} . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{array}$$

Pascal üçgenin birçok ilginç özelliği de vardır. Bunlardan bazıları:

-Her satır 1 ile başlayıp 1 ile biter.

-Her satırdaki herhangi bir sayı, bir önceki satırdaki o sayının hemen solundaki ve sağındaki sayıların toplamıdır. Bu, Pascal'ın özdeşliğinden de doğrulanır.

-n. satırdaki sayıların toplamı 2^n 'dir.

3. FIBONACCI POLİNOMLARI

$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ ve $n \geq 3$ olmak üzere,

$$f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan polinomlara Fibonacci polinomu denir ve n. Fibonacci polinomu $f_n(x)$ ile gösterilir (Koshy, 2019). Fibonacci polinomlarının ilk on tanesi aşağıda verilmiştir:

$f_1(x) = 1$

$f_2(x) = x$

$f_3(x) = x^2 + 1$

$f_4(x) = x^3 + 2x$

$f_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1$

$f_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x$

$f_7(x) = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$

$f_8(x) = x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x$

$f_9(x) = x^8 + 7x^6 + 15x^4 + 10x^2 + 1$

$f_{10}(x) = x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x$

3.1.Fibonacci Polinomları İle İlgili Bazı Özdeşlikler

Önerme 3.1.1. (Binet Formülü)

$$\sigma = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

için n. Fibonacci polinomu

$$f_n(x) = \frac{\sigma^n - (-\sigma)^{-n}}{\sigma + \sigma^{-1}} \tag{3.1}$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

İspat:

Fibonacci polinomunun $r^2 - xr - 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri (3.1) formülünden yararlanarak

$$r_1 = \sigma = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ve

$$r_2 = -\sigma^{-1}$$

olarak bulunur.

Önerme 3.1.2. (Ardışık Terimlerin Oranının Asimptotik Davranışı)

$$\sigma = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \sigma$$

dır (Falcon ve Plaza, 2009).

Önerme 3.1.3. (Catalan Özdeşliği)

n, r tamsayıları ve $n > r$ için

$$f_{n-r}(x) f_{n+r}(x) - f_n^2(x) = (-1)^{n-r-1} f_r^2(x)$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

İspat:

Verilen eşitlikte LHS (eşitliğin sol tarafı) ve RHS (eşitliğin sağ tarafı) olmak üzere Binet formülü uygulanırsa;

$$(\text{LHS}) = \frac{\sigma^{n-r} - (-1)^{n-r}\sigma^{-n+r}}{\sigma + \sigma^{-1}} \cdot \frac{\sigma^{n+r} - (-1)^{n+r}\sigma^{-n-r}}{\sigma + \sigma^{-1}} - \left(\frac{\sigma^n - (-1)^n \sigma^{-n}}{\sigma + \sigma^{-1}}\right)^2$$

$$= \frac{\sigma^{2n} - (-1)^{n+r}\sigma^{-2r} - (-1)^{n-r}\sigma^{2r} + \sigma^{-2n}}{(\sigma + \sigma^{-1})^2} - \frac{\sigma^{2n} - 2(-1)^n + \sigma^{-2n}}{(\sigma + \sigma^{-1})^2}$$

$$= \frac{(-1)^{n-r-1}\sigma^{-2r} + (-1)^{n-r-1}\sigma^{2r} - 2(-1)^{n-1}}{(\sigma + \sigma^{-1})^2}$$

$$= \left(\frac{\sigma^r - \sigma^{-r}}{\sigma + \sigma^{-1}}\right)^2 (-1)^{n-r-1} = (\text{RHS})$$

elde edilir.

Önerme 3.1.4. (İlk n Fibonacci Polinomunun Toplamı)

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \frac{f_{n+1}(x) + f_n(x) - 1}{x}$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

Ömer Hayyam tarafından düzenlenen Pascal üçgeni ile Fibonacci polinomları arasında aşağıda verilen bir ilişki vardır. Bunun için ilk olarak Pascal üçgeni aşağıda verilmiştir:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Fibonacci polinomları matris biçiminde $f = B.X$ denklemi ile yazılabilir. Burada $f = (f_1(x),\ f_2(x), \dots)^T$, $X = (1, x, x^2, x^3, \dots)^T$ ve B; Fibonacci polinomlarının katsayılarında x'in artan kuvvetlerinin oluşturduğu alt üçgensel matristir.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 5 & 0 & 1 & \\ 0 & 4 & 0 & 10 & 0 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B matrisinde sıfır olmayan elemanlar tam olarak Pascal üçgeninin köşegenlerini oluşturur ve aynı sıradaki elemanlar klasik Fibonacci polinom dizisinin katsayılarını verir. B matrisi tersinir olup B matrisinin tersi aşağıda verilmiştir.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & 0 & 1 & & & & \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 5 & 0 & -4 & 0 & 1 & & \\ -5 & 0 & 9 & 0 & -5 & 0 & 1 & \\ 0 & -14 & 0 & 14 & 0 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorem 3.1.1.

Her $n \geq 1$ tamsayısı ve $\binom{n}{-1} = 0$ olmak üzere x^{n-1} terimi, ilk n Fibonacci polinomunun lineer kombinasyonu olarak yazılır. Yani

$$x^{n-1} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (-1)^i \left[\binom{n}{i} - \binom{n}{i-1} \right] f_{n-2i}(x) \tag{3.2}$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

İspat:

Tümevarım yöntemi kullanılarak (3.2) denklemi $n = 1$ için sağlanır. (3.2) denkleminin $n - 1$'den küçük veya eşit her tamsayı için doğru olduğu kabul edilirse

$$x^{n-2} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^i \left[\binom{n-1}{i} - \binom{n-1}{i-1} \right] f_{n-1-2i}(x)$$

olur. Burada son eşitlik x ile çarpılırsa ve $xf_{n-2i-1}(x) = f_{n-2i}(x) - f_{n-2i-2}$ eşitliği kullanılırsa ikinci terimden itibaren tüm terimler birbirini yok eder. Böylece (3.2) denklemi her n için sağlanır.

x^n, Fibonacci polinomlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir.

$1 = f_1(x)$

$x = f_2(x)$

$x^2 = f_3(x) - f_1(x)$

$x^3 = f_4(x) - 2f_2(x)$

$x^4 = f_5(x) - 3f_3(x) + 2f_1(x)$

$x^5 = f_6(x) - 4f_4(x) + 5f_2(x)$

$x^6 = f_7(x) - 5f_5(x) + 9f_3(x) - 5f_1(x)$

$x^7 = f_8(x) - 6f_6(x) + 14f_4(x) - 14f_2(x)$

3.2. Fibonacci Polinomlarının Türevi

Tanım 3.2.1. (k-Fibonacci Sayısı)

Herhangi bir k pozitif gerçel sayısı ve $n \geq 1$ için $f_{k,0} = 0$ ve $f_{k,1} = 1$ başlangıç şartları olmak üzere k-Fibonacci sayısı

$$f_{k,n+1} = kf_{k,n} + f_{k,n-1}$$

indirgeme bağıntısı ile verilir (Falcon ve Plaza, 2009).

Eğer k gerçel bir x değişkeni ise $f_{k,n} = f_{x,n}$ ile tanımlanan Fibonacci polinomlarına karşılık gelir.

Burada $k = 1$ için klasik Fibonacci dizisi elde edilir.

k- Fibonacci sayılarının ilk sekiz terimi aşağıda verilmiştir.

$f_{k,1} = 1$

$f_{k,2} = k$

$f_{k,3} = k^2 + 1$

$f_{k,4} = k^3 + 2k$

$f_{k,5} = k^4 + 3k^2 + 1$

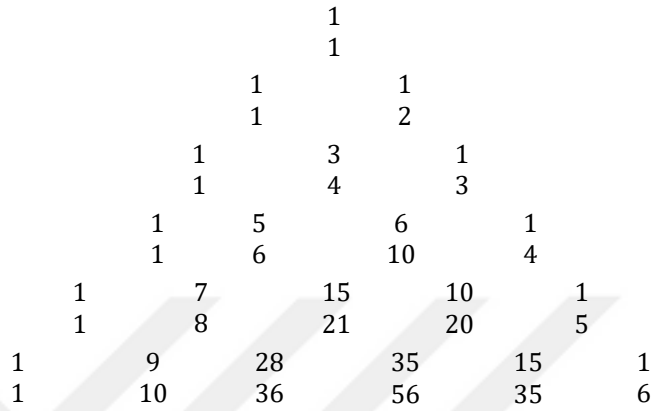
$f_{k,6} = k^5 + 4k^3 + 3k$

$f_{k,7} = k^6 + 5k^4 + 6k^2 + 1$

$f_{k,8} = k^7 + 6k^5 + 10k^3 + 4k$

Tanım 3.2.2. (Pascal 2-üçgeni)

k-Fibonacci sayılarından elde edilen katsayılar her bir kenarı ikili olacak şekilde bir üçgen şeklinde gösterilebilir. Bu nedenle bu üçgene Pascal-2 üçgeni denir (Falcon ve Plaza, 2009).



Öncelikle ilk sekiz Fibonacci polinomunun birinci türevleri aşağıda verilmiştir:

$f_1'(x) = 0$

$f_2'(x) = 1$

$f_3'(x) = 2x$

$f_4'(x) = 3x^2 + 2$

$f_5'(x) = 4x^3 + 6x$

$f_6'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 3$

$f_7'(x) = 6x^5 + 20x^3 + 12x$

$f_8'(x) = 7x^6 + 30x^4 + 30x^2 + 4$

Sadece türev polinomlarının katsayıları göz önüne alındığında, Tablo 3.1'de gösterildiği gibi bir Pascal-2 üçgeni olarak yazılabilir. Bu üçgenin ilginç bir özelliği; iki ardışık tek (çift) satırın elemanlarını toplayarak ve toplam sonucunu ikinci satırın satır numarasına bölerek o sıraya karşılık gelen Fibonacci sayısı elde edilir.

Tablo 3.1. (Türevin Pascal-2 üçgeni)

				1						
				2						
			3		2					
			4		6					
		5		12		3				
		6		20		12				
	7		30		30		4			
	8		42		60		20			
9		56		105		60		5		
10		72		168		140		30		

Örnek olarak, beşinci sıra ve yedinci sıra toplanıp toplam 7'ye bölünerek $f_7(1) = 13$ elde edilir. Pascal-2 üçgeninin terimleri yeniden düzenlenerek ve yarı köşegendeki terimler satırlar halinde yazılarak yeni bir üçgen ortaya çıkar (Tablo 3.2). Eğer bu üçgenin i. sırası i'ye bölünürse klasik Pascal üçgeni oluşur (Tablo 3.2).

Tablo 3.2. (Yarı köşegen üçgeni ve Pascal üçgeni)

				1				
			2		2			
		3		6		3		
	4		12		12		4	
5		20		30		20		5
				↓				
				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Ayrıca Tablo 3.1'deki i. ters köşegenin her bir elemanını i'ye bölerek oluşan üçgen Tablo 3.3'te gösterilmektedir. Bu üçgen ilk ters köşegeni sildikten sonra aynı Pascal-2 üçgenidir (Tablo 3.3).

Tablo 3.3. (Ters yarı köşegen üçgeni)

				1					
				2					
			3		1				
			4		3				
		5		6		1			
		6		10		4			
	7		15		10		1		
	8		21		20		5		
9		28		35		15		1	
10		36		56		35		6	

Fibonacci polinomlarının birinci türevleri tekrar türevlenerek Fibonacci polinomlarının ikinci türevleri aşağıdaki şekilde elde edilir:

$f_1''(x) = 0$

$f_2''(x) = 0$

$f_3''(x) = 2$

$f_4''(x) = 6x$

$f_5''(x) = 12x^2 + 6$

$f_6''(x) = 20x^3 + 24x$

$f_7''(x) = 30x^4 + 60x^2 + 12$

$f_8''(x) = 42x^5 + 120x^3 + 60x$

İkinci türevin katsayıları tekrar bir üçgen şeklinde yazılabilir (Tablo 3.4). Bu üçgende i ve $i(i+1)$ arasındaki ters köşegen elemanı bölerek aşağıdaki üçgen elde edilir (Tablo 3.4). Bu son üçgen Pascal-2 üçgeninin ilk iki ters köşegeni olmadığı halidir.

Tablo 3.4. (İkinci türevin Pascal-2 üçgeni)

			2					
			6					
		12		6				
		20		24				
	30		60		12			
	42		120		60			

↓

1
3
6 1
10 4
15 10 1
21 20 5

İkinci türevde Pascal-2 üçgeninin terimlerini yeniden düzenleyerek yine klasik Pascal üçgenini elde ederiz (Tablo 3.5). Bu yöntem Fibonacci polinomlarının herhangi bir ardışık türevi için geçerlidir.

Tablo 3.5. (İkinci türevin üçgeni ve Pascal üçgeni)

2
6 6
12 24 12
20 60 60 20
30 120 180 120 30
↓
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Fibonacci polinomlarının türevlerinden sayı dizileri elde edilmiştir. Fibonacci polinomlarının türevlerinde x yerine tamsayılar yazılarak farklı sayı dizileri elde edilir. Bu sayı dizileri aşağıda verilmiştir.

Örneğin birinci türev için aşağıdaki sayı dizileri elde edilir:

$\{f_n'(1)\} = \{0,1,2,5,10,20,38,71,130,235, \dots\}$

$\{f_n'(2)\} = \{0,1,4,14,44,131,376,1052,2888,7813, \dots\}$

$\{f_n'(3)\} = \{0,1,6,29,126,516,2034,7807,29382, \dots\}$

$\{f_n'(4)\} = \{0,1,8,50,280,1475,7472,36836,178000, \dots\}$

Benzer şekilde, ikinci ve üçüncü türev için aşağıdaki sayı dizileri elde edilir:

$\{f_n''(1)\} = \{0,0,2,6,18,44,102,222,466,948, \dots\}$

$\{f_n''(2)\} = \{0,0,2,12,54,208,732,2424,7684,23568, \dots\}$

$\{f_n''(3)\} = \{0,0,2,18,114,612,2982,13626,59474, \dots\}$

$\{f_n''(4)\} = \{0,0,2,24,198,1376,8652,50928,286036, \dots\}$

ve

$\{f_n'''(1)\} = \{0,0,0,6,24,84,240,630,1536,3564, \dots\}$

$\{f_n'''(2)\} = \{0,0,0,6,48,264,1200,4860,18192, \dots\}$

$\{f_n'''(3)\} = \{0,0,0,6,72,564,3600,20310,105408, \dots\}$

$\{f_n'''(4)\} = \{0,0,0,6,96,984,8160,59580,399264, \dots\}$

dir.

Önerme 3.2.1. (Ardışık Terimlerin Oranının Limiti)

$$\sigma = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'_{n+1}(x)}{f'_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f''_{n+1}(x)}{f''_n(x)} = \cdots = \sigma$$

dır (Falcon ve Plaza, 2009).

Türevin mertebesi arttıkça ardışık Fibonacci sayılarının türevlerinin oranı σ değerinden uzaklaşır. Örneğin $x = 3$ ve $n = 9$ için başlangıçtaki sıfır olan terimler dikkate alınmadan aşağıdakiler elde edilir:

$$\frac{f_{10}(3)}{f_9(3)} = \frac{42837}{12970} = 3.3027$$

$$\frac{f'_{10}(3)}{f'_9(3)} = \frac{108923}{29382} = 3.7071$$

$$\frac{f_{10}''(3)}{f_9''(3)} = \frac{250812}{59474} = 4.2171$$

$$\frac{f_{10}'''(3)}{f_9'''(3)} = \frac{514956}{105408} = 4.8853$$

$$\sigma = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3.3027$$

elde edilir.

Önerme 3.2.2.

$$f_n'(x) = \frac{nf_{n+1}(x) - xf_n(x) + nf_{n-1}(x)}{x^2+4} \tag{3.3}$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

İspat:

$$f_n(x) = \frac{\sigma^n - (-\sigma)^{-n}}{\sigma + \sigma^{-1}}$$

Binet formülünün türevi alındığında

$$f_n'(x) = n\frac{\sigma^{n-1} - (-\sigma)^{-n-1}}{\sigma+\sigma^{-1}}\sigma' - \frac{\sigma^n - (-\sigma)^{-n}}{(\sigma+\sigma^{-1})^2}(1-\sigma^{-2})\sigma'$$

elde edilir.

$$\sigma = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$$

olduğundan

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sigma+\sigma^{-1}}$$

ve

$$1-\sigma^{-2} = \frac{x}{\sigma}$$

dır. Bu eşitlikler türev denkleminde yerine yazıldığında

$$f_n'(x) = n\frac{\sigma^n + (-\sigma)^{-n}}{(\sigma+\sigma^{-1})^2} - \frac{\sigma^n - (-\sigma)^{-n}}{\sigma+\sigma^{-1}} \cdot \frac{x}{(\sigma+\sigma^{-1})^2}$$

$$= n\frac{\sigma^n + (-\sigma)^{-n}}{(\sigma+\sigma^{-1})^2} - \frac{xf_n(x)}{(\sigma+\sigma^{-1})^2}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)=\frac{\sigma^{n+1}-(-\sigma)^{-n-1}}{\sigma+\sigma^{-1}}+\frac{\sigma^{n-1}-(-\sigma)^{-n+1}}{\sigma+\sigma^{-1}}$$

$$=\frac{\sigma}{\sigma^2+1}[\sigma^{n-1}(\sigma^2+1)-(-\sigma)^{-n-1}(1+\sigma^2)]$$

$$=\sigma^n+(-\sigma)^{-n}$$

dir. Böylece istenilen eşitlik elde edilir.

Ayrıca $f_{n+1}(x)=xf_n(x)+f_{n-1}(x)$ olduğundan

$$f_n'(x)=\frac{x(n-1)f_n(x)+2nf_{n-1}(x)}{x^2+4}$$

biçiminde de yazılabilir.

$x=1$ için

$$f_n'(1)=\frac{(n-1)f_n(1)+2nf_{n-1}(1)}{5} \tag{3.4}$$

dir.

Önerme 3.2.3.

$n\geq 0$ için

$$f_{n+1}(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor}\binom{n-i}{i}x^{n-2i} \tag{3.5}$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

Önerme 3.2.4.

$n\geq 1$ için,

$$f_{n+1}'(x)=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}(n-2i)\binom{n-i}{i}x^{n-1-2i} \tag{3.6}$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

İspat:

(3.5) denkleminin türevi alındığında;

$$f'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (n-2i) \binom{n-i}{i} x^{n-1-2i}$$

elde edilir.

Bu eşitlikte $n = 0$ için $f'_1(x) = 0$'dır.

Benzer şekilde herhangi bir türev için açık bir formül elde edilebilir. Örneğin Fibonacci polinomlarının ikinci türevi için;

$n \geq 2$ için

$$f''_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} (n-2i)(n-1-2i)\binom{n-i}{i} x^{n-2-2i} \tag{3.7}$$

dir. Ayrıca $n = 1,2$ için $f''_n(x) = 0$ 'dır.

Aşağıdaki önerme ile $\{f'_n(x)\}_{n\in N}$ dizisinin Fibonacci polinomunun kendisiyle çarpımından elde edildiği gösterilmiştir.

Önerme 3.2.5.

$f'_1(x) = 0$ ve $n > 1$ için

$$f'_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(x) f_{n-i}(x) \tag{3.8}$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

İspat:

$n = 2$ için $f'_2(x) = f_1(x)f_1(x) = 1$ olduğundan ispat açıktır. Her $k \leq n$ için eşitliğin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda n yerine $n-1$ yazıldığında

$$f'_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n-2} f_i(x) f_{n-1-i}(x)$$

olur.

$f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_{n-1}(x)$ denkleminin türevi alınıp düzenlenirse aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$f'_{n+1}(x) = f_n(x) + xf'_n(x) + f'_{n-1}(x)$$

$$= f_n(x) + x\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x)f_{n-i}(x) + \sum_{i=1}^{n-2} f_i(x)f_{n-1-i}(x)$$

$$= f_n(x) + xf_{n-1}(x)f_1(x) + \sum_{i=1}^{n-2} xf_i(x)f_{n-i}(x) + \sum_{i=1}^{n-2} f_i(x)f_{n-1-i}(x)$$

$$= f_n(x) + xf_{n-1}(x) + \sum_{i=1}^{n-2} f_i(x)[xf_{n-i}(x) + f_{n-1-i}(x)]$$

$$= f_n(x)f_1(x) + f_{n-1}(x)f_2(x) + \sum_{i=1}^{n-2} f_i(x)f_{n+1-i}(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x)f_{n+1-i}(x)$$

Ayrıca $n > 1$ için (3.4) denklemi ile (3.8) denklemi birlikte kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i(x)f_{n-i}(x) = \frac{x(n-1)f_n(x) + 2nf_{n-1}(x)}{x^2+4}$$

olur.

Önerme 3.2.4.

$n \geq 1$ için

$$f'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} (-1)^i (n-2i) f_{n-2i}(x) \tag{3.9}$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

İspat:

$n = 1$ için

$$f'_2(x) = \sum_{i=0}^{0} (-1)^i (1-2i) f_{1-2i}(x) = 1$$

olup eşitlik sağlanır. Varsayalım ki (3.9) denklemi n. Fibonacci polinomlarının türevine kadar sağlansın.

n tamsayısının çift olduğunu varsayalım. $n = 2p$ olsun.

$$f'_{2p+1}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p - 2i) f_{2p-2i}(x)$$

ve

$$f'_{2p}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p - 1 - 2i) f_{2p-1-2i}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (2p - 2i) f_{2p-1-2i}(x) + \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+1} f_{2p-1-2i}(x)$$

olur.

$$f_{2p+2}(x) = x f_{2p+1}(x) + f_{2p}(x)$$

olduğundan

$$f'_{2p+2}(x) = f_{2p+1}(x) + x f'_{2p+1}(x) + f'_{2p}(x)$$

dir.

Denklem $n = 2p + 2$ için doğrulandı.

n tamsayısı tek olduğunda da durum benzer şekilde kontrol edilir.

Örneğin;

$$f'_6(2) = \sum_{i=0}^{2} (-1)^i (5 - 2i) f_{5-2i}(2)$$

$$= 5 f_5(2) - 3 f_3(2) + f_1(2)$$

$$= 5.29 - 3.5 + 1$$

$$= 131$$

Önerme 3.2.5.

$$f_n(x) = \frac{1}{n} [f'_{n+1}(x) + f'_{n-1}(x)] \qquad (3.10)$$

dir (Falcon ve Plaza, 2009).

İspat:

(3.5) denkleminde

$$f_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i}$$

ve

$$f_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} \binom{n-2-i}{i} x^{n-2-2i}$$

dir. Bu iki eşitlik toplandığında;

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = x^n + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor} \binom{n-2-i}{i} x^{n-2-2i}$$

$$= x^n + \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \left[\binom{n-i}{i} + \binom{n-1-i}{i-1} \right] x^{n-2i}$$

dir.

Bu durumda;

$$\binom{n-i}{i} + \binom{n-1-i}{i-1} = \binom{n-1-i}{i-1} \left(\frac{n-i}{i} + 1 \right) = \binom{n-1-i}{i-1} \frac{n}{i}$$

eşitliği kullanılarak

$$f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x) = x^n + n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i-1} \frac{1}{i} x^{n-2i}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin türevi alındığında;

$$f'_{n+1}(x) + f'_{n-1}(x) = nx^{n-1} + n \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n-1-i}{i-1} \frac{n-2i}{i} x^{n-1-2i}$$

bulunur. Böylece

$$\frac{f'_{n+1}(x)+f'_{n-1}(x)}{n}=\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n-1-i}{i}x^{n-1-2i}=f_n(x)$$

olur.

(3.10)'dan $f'_{n+1}(x)=nf_n(x)-f'_{n-1}(x)$ olduğundan $\{f_n(x)\}_{n\in N}$ Fibonacci dizisi elde edilir. $f'_1(x)=0$ olduğundan $\{f'_n(x)\}_{n\in N}$ türev dizisi oluşur.

Türev dizilerindeki tekrarlama bağıntısı aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 3.2.6.

$$f_{n+1}^{(r)}(x)=\begin{cases}0, & n<r\\ r!, & n=r\\ \frac{1}{n-r}\left[nx.f_n^{(r)}(x)+(n+r)f_{n-1}^{(r)}(x)\right], & n>r\end{cases} \tag{3.11}$$

r. türev üzerindeki sıfırdan farklı terimler, sıfırdan farklı $r!$ terimden elde edilir. Bu nedenle tüm terimler $r!$'nin katlarıdır.

Sonuç olarak $\left\{f_n^{(r)}(x)\right\}_{n\in N}$ dizisi

$$\left\{f_n^{(r)}(x)\right\}_{n\in N}=r!\{0,\dots,0,1,(r+1)x,\dots\}$$

formundadır (Falcon ve Plaza, 2009).

3.3. Fibonacci Polinomlarının İntegrali:

Denklem 3.10'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Önerme 3.2.7.

$$\int_0^x f_n(x)dx=\frac{1}{n}(f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)-f_{n+1}(0)-f_{n-1}(0))$$

dır (Falcon ve Plaza, 2009).

İspat:

n çift ise $f_{n+1}(0)=f_{n-1}(0)=1$'dir. Bu durumda

$$\int_0^x f_n(x)dx=\frac{1}{n}(f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)-2)$$

dir.

n tek ise $f_{n+1}(0) = f_{n-1}(0) = 0$'dır. Bu durumda

$$\int_0^x f_n(x)dx = \frac{1}{n}\left(f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)\right)$$

dir.

4. CHEBYSHEV POLİNOMLARI

Chebyshev polinomları, ilk kez yaklaşık yüz yıl önce ünlü Rus matematikçi Chebyshev tarafından kullanılmıştır. Chebyshev, sayılar teorisi ve onun adını taşıyan polinomların dizisi üzerine çalışmış ve Chebyshev polinomlarını tanımlamıştır. Ortogonal polinomların bir dizisi olan Chebyshev polinomları, De Moivre formülü ile bağlantılıdır. Chebyshev polinomları maksimum hatayı minimum yapma eğilimindedir. Chebyshev polinomları, yaklaşım teorisi, kombinatorik, Fourier serileri, nümerik analiz, graf teorisinde ve diğer birçok alanda çeşitli uygulamalara sahiptir.

Bu bölümde dört çeşit Chebyshev polinomu, bu polinomların türev ve integralleri detaylı olarak incelenecektir.

4.1. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomları

Tanım 4.1.1.

$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ ve $n \geq 2$ için

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \tag{4.1}$$

yinelemeli(tekrarlı) bağıntısı veya

$n \geq 0, x \in [-1,1]$ için

$$T_n(x) = \cos(n\, arccosx) \tag{4.2}$$

bağıntısı ile tanımlanan polinomlara birinci çeşit Chebyshev polinomu denir ve $T_n(x)$ ile gösterilir (Mason ve Handscomb, 2003; Koshy, 2019)

(4.2) bağıntısında $x = cos\theta$ alınırsa

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \tag{4.3}$$

olur. Bu eşitlikte ; θ değişkeni $[-\pi, \pi]$ aralığındadır ve x değişkeni $[-1,1]$ aralığındadır.

Birinci çeşit Chebyshev polinomunun ilk on terimi aşağıda verilmiştir:

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

$T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$

$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$

De Moivre Formülü:

$x = cos\ \theta$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için

$$(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)^n = cos\ n\theta + i\ sin\ n\theta \tag{4.4}$$

dır.

$-\pi \leq \theta \leq \pi$ için $x = cos\ \theta$ ve $sin\ \theta = \sqrt{1-x^2} \geq 0$ olmak üzere,

$(cos\ \theta + i\ sin\ \theta)^n = \left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n$

$= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} i\sqrt{1-x^2} + \binom{n}{2} x^{n-2} \left(i\sqrt{1-x^2}\right)^2 + \cdots + \binom{n}{n} \left(i\sqrt{1-x^2}\right)^n$

olup buradan

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} i\sqrt{1-x^2} + \binom{n}{2} x^{n-2}(x^2-1) + \cdots + \binom{n}{n} (x^2-1)^{\frac{n}{2}} \tag{4.5}$$

eşitliğinde

$$cos\ n\theta = x^n + \binom{n}{2} x^{n-2}(x^2-1) + x^n + \binom{n}{4} x^{n-4}(x^2-1)^2 + \cdots \tag{4.6}$$

$$sin\ n\theta = \binom{n}{1} x^{n-1}\sqrt{1-x^2} + \binom{n}{3} x^{n-3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + \cdots \tag{4.7}$$

elde edilip

$$T_n(x) = cos\ n\theta = x^n + \binom{n}{2} x^{n-2}(x^2-1) + \cdots \tag{4.8}$$

bulunur.

4.1.1. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomunun Türevi:

Önerme 4.1.1.1.

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\ \theta$ için birinci çeşit Chebyshev polinomunun türevi

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = nU_{n-1}(x) \tag{4.9}$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003).

Burada $U_n(x)$ ikinci çeşit Chebyshev polinomu olup Bölüm 4.2 de detaylı olarak verilmiştir.

İspat:

$T_n(x) = \cos(narccosx) = cosn\theta$ ve $dx = -\sin\theta\, d\theta$ formüllerinden

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = n(-\sin n\theta)\, d\theta$$

$$= n\left(\frac{\sin n\theta}{\sin\ \theta}\right) dx$$

$$= nU_{n-1}(x)\, dx$$

olur. Buradan da birinci çeşit Chebyshev polinomunun türevi

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = n\ U_{n-1}(x)$$

olarak elde edilir.

4.1.2. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomunun İntegrali:

Önerme 4.1.2.1.

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\ \theta$ olmak üzere birinci çeşit Chebyshev polinomunun integrali

$$\int T_n(x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right) \tag{4.10}$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$x = cos\ \theta$ için $dx = -sin\ \theta d\theta$ olur. Bu bağıntı kullanılıp $T_n(x) = cos\, n\theta$ denkleminin her iki tarafının integrali alınarak

$$\int T_n(x)dx = -\int cos\ n\theta sin\ \theta d\theta$$

eşitliği, trigonometrik dönüşüm formülleri kullanılarak

$$\int T_n(x)\, dx = -\int \frac{1}{2}(\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right)$$

elde edilir. Böylece

$$\int T_n(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right), & n \neq 1 \\ \frac{1}{4}T_2(x) \quad , & n = 1 \end{cases}$$

dır.

4.1.3. Birinci Çeşit Chebyshev Polinomu ve Trigonometri İlişkisi

$0 \leq \theta \leq \pi$ için u, v, θ herhangi üç açı olsun. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ Euler formülü kullanılarak $e^{i(u+v)} = e^{iu}.e^{iv}$ bulunur.

$$\cos(u+v) + i\sin(u+v) = (\cos u + i\sin u)(\cos v + i\sin v)$$

$$= (\cos u\cos v - \sin u\sin v) + i(\sin u\cos v + \cos u\sin v)$$

Gerçel ve sanal kısımlarını eşitleyerek kosinüs ve sinüs fonksiyonları için toplama formüllerini elde ederiz.

$$\cos(u+v) = \cos u\cos v - \sin u\sin v \tag{4.11}$$

$$\sin(u+v) = \sin u\cos v + \cos u\sin v \tag{4.12}$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ olduğundan,

$$\cos 2\theta = \cos(\theta+\theta)$$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

formülleri (4.11) den elde edilir. Benzer şekilde $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ eşitliği (4.12) formülünden elde edilir. Sonuç olarak

$$\cos 3\theta = \cos(2\theta+\theta)$$

$$= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta$$

$$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta\,(1 - \cos^2\theta)$$

$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

bulunur.

Benzer şekilde, $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$ olur. Tablo 4.1 ile farklı n değerleri için $\cos n\theta$ fonksiyonu verilmiştir. $\cos n\theta$ Tablo 4.1 de görüldüğü gibi kosinüs cinsinden bir polinomdur. Buradaki katsayılar $T_n(x)$ ile aynı katsayılar ve $0 \leq n \leq 7$ için $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ dir.

Tablo 4.1. Farklı n değerleri için $\cos n\theta$ fonksiyonu

n	$cosn\theta$
0	1
1	$cos\theta$
2	$2cos^2\theta - 1$
3	$4cos^3\theta - 3cos\theta$
4	$8cos^4\theta - 8cos^2\theta + 1$
5	$16cos^5\theta - 20cos^3\theta + cos\theta$
6	$32cos^6\theta - 48cos^4\theta + 18cos^2\theta - 1$
7	$64cos^7\theta - 112cos^5\theta + 56cos^3\theta - 7cos\theta$

Her $n \geq 0$ için $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$'dır. Bu eşitlik tümevarım yöntemi ve De Moivre teoremi kullanılarak ispatlanabilir.

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 2\cos\theta\,(\cos 1\theta) - \cos 0\theta$$

$$= 2\cos\theta\, T_1(\cos\theta) - T_0(\cos\theta)$$

ve benzer şekilde

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$= 2\cos\theta\,(2\cos^2\theta - 1) - \cos\theta$$

$$= 2\cos\theta\cos 2\theta - \cos\theta$$

$$= 2\cos\theta\, T_2(\cos\theta) - T_1(\cos\theta)$$

bulunur.

$T_0(cos\,\theta) = 1 = cos\,0\theta$ ve $T_1(\cos\theta) = \cos\theta$ olduğundan $n = 0$ ve $n = 1$ için ifade doğrudur. n'den küçük bütün tamsayılar için doğru olduğunu kabul edelim. $a = e^{i\theta}$ ve $b = e^{-i\theta}$ olsun. Bu durumda $a + b = 2\cos\theta$ ve $ab = 1$ dir. Buradan $a^k = e^{ik\theta}$ ve $b^k = e^{-ik\theta}$ olur. Böylece $a^k + b^k = 2\cos k\theta$ dır.

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2})$$

biçiminde yazılabileceğinden a ve b yerine yazılırsa

$$2\cos n\theta = 2\cos\theta.\,2\cos(n-1)\,\theta - 1.2\cos(n-2)\theta$$

olup

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= 2\cos\theta\,[\cos(n-1)\theta] - \cos(n-2)\theta \\ &= 2\cos\theta.\,T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta) \\ &= T_n(\cos\theta)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, tümevarım yöntemi ile $n \geq 0$ için $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ dır. Yani, $\cos n\theta$ $\cos\theta$'nın Chebyshev polinom fonksiyonudur.

4.2. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomları

Tanım 4.2.1.

$U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$ ve $n \geq 2$ için

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

yinelemeli (tekrarlı) bağıntısı ve

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\,\theta$ için

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{sin\,\theta} \tag{4.13}$$

bağıntısı ile tanımlanan polinomlara ikinci çeşit Chebyshev polinomu denir ve $U_n(x)$ ile gösterilir (Mason ve Handscomb, 2003; Koshy, 2019).

Teorem 4.2.1.

$n \geq 2$ ve $x = cos\,\theta$ için

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \tag{4.14}$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003)

İspat:

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{sin\theta}$$

eşitliğinde n yerine $n-1$ ve $n-2$ yazıldığında

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin n\theta}{sin\theta}$$

ve

$$U_{n-2}(x) = \frac{\sin(n-1)\theta}{sin\theta}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} U_n(x) + U_{n-2}(x) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{sin\,\theta} + \frac{\sin(n-1)\theta}{sin\,\theta} \\ &= \frac{2\cos\theta \sin n\theta}{\sin\theta} \\ &= 2xU_{n-1}(x) \end{aligned}$$

olup

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

elde edilir.

4.2.1. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomunun Türevi:

Önerme 4.2.1.1.

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\theta$ için ikinci çeşit Chebyshev polinomunun türevi

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2 - 1}$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

ve $dx = -\sin\theta\, d\theta$ formüllerinden

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)\cos(n+1)\theta\sin\theta - \cos\theta\sin(n+1)\theta}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$= \left(\frac{(n+1)\cos(n+1)\theta\sin\theta - \cos\theta\sin(n+1)\theta}{\sin^2\theta}\right)\frac{-1}{\sin\theta}dx$$

$$= \frac{(n+1)\cos(n+1)\theta - \cos\theta\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}}{-\sin^2\theta}dx$$

$$= \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2-1}dx$$

dir. Buradan

$$\frac{d}{dx}U_n(x) = \frac{(n+1)T_{n+1}(x) - xU_n(x)}{x^2-1}$$

olur.

4.2.2. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomunun İntegrali:

Önerme 4.2.2.1.

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\theta$ için ikinci çeşit Chebyshev polinomunun integrali

$$\int U_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} \tag{4.15}$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$x = cos\,\theta$ için $dx = -sin\,\theta\,d\theta$ olur. (4.13) formülünde her iki tarafın integrali alınıp $dx = -sin\,\theta\,d\theta$ kullanılırsa

$$\int U_n(x)\,dx = -\int \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$= \left(\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\right)$$

$$= \frac{T_{n+1}(x)}{n+1}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\int U_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1}$$

dir.

4.2.3. İkinci Çeşit Chebyshev Polinomu ve Trigonometri İlişkisi

$T_n(x)$ Chebyshev polinomu ile trigonometri arasındaki ilişki kosinüs fonksiyonu için formüller kullanılarak incelendi. Benzer bir ilişki, $U_n(x)$ Chebyshev polinomu ile trigonometri arasında sinüs fonksiyonu için aşağıda formüllerden görülebilir.

$$\sin 1\theta = 1.\sin\theta$$

$$\sin 2\theta = (2\cos\theta)\sin\theta$$

$$\sin 3\theta = (4\cos^2\theta - 1)\sin\theta$$

$$\sin 4\theta = (8\cos^3\theta - 4\cos\theta)\sin\theta$$

$$\sin 5\theta = (16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1)\sin\theta$$

$$\sin 6\theta = (32\cos^5\theta - 32\cos^3\theta + 6\cos\theta)\sin\theta$$

Bu eşitliklerde kosinüs fonksiyonu yerine x yazıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\frac{\sin 1\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2x$$

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = 4x^2 - 1$$

$$\frac{\sin 4\theta}{\sin\theta} = 8x^3 - 4x$$

$$\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$\frac{\sin 6\theta}{\sin\theta} = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$x = cos\theta$ ve $0 \leq n \leq 5$ için

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

dir.

Sinüs fonksiyonu için toplam formülü ve $n \geq 0$ için $U_n(x) - xU_{n-1}(x) = T_n(x)$ eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\sin(n+1)\,\theta &= sin\, n\theta\, cos\,\theta + cos\, n\theta\, sin\,\theta \\ &= xU_{n-1}(x)\, sin\,\theta + T_n(x)\, sin\,\theta\end{aligned}$$

olup buradan

$$\begin{aligned}\frac{\sin(n+1)\theta}{sin\,\theta} &= xU_{n-1}(x) + T_n(x) \\ &= U_n(x)\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik $n = 0$ ve $n = 1$ için sağlandığından tümevarım yöntemiyle tüm $n \geq 0$ tamsayıları için doğrudur.

4.3. Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomları

Tanım 4.3.1.

$V_0(x) = 1$ ve $V_1(x) = 2x - 1$ ve $n \geq 2$ için

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x)$$

yinelemeli (tekrarlı) bağıntısı ve

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\theta$ olmak üzere

$$V_n(x) = \frac{cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{cos\frac{1}{2}\theta} \tag{4.16}$$

bağıntısı ile tanımlanan polinomlara üçüncü çeşit Chebyshev polinomu denir ve $V_n(x)$ ile gösterilir (Mason ve Handscomb, 2003; Koshy, 2019).

Üçüncü çeşit Chebyshev polinomunun ilk 10 terimi aşağıda verilmiştir:

$V_0(x) = 1$

$V_1(x) = 2x - 1$

$V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1$

$V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$

$V_4(x) = 16x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 1$

$V_5(x) = 32x^5 - 16x^4 - 32x^3 + 12x^2 + 6x - 1$

$V_6(x) = 64x^6 - 32x^5 - 80x^4 + 32x^3 + 24x^2 - 6x - 1$

$V_7(x) = 128x^7 - 64x^6 - 192x^5 + 80x^4 + 80x^3 - 24x^2 - 8x + 1$

$V_8(x) = 256x^8 - 128x^7 - 448x^6 + 192x^5 + 240x^4 - 80x^3 - 40x^2 + 8x + 1$

$V_9(x) = 512x^9 - 256x^8 - 1024x^7 + 448x^6 + 672x^5 - 240x^4 - 160x^3 + 40x^2 + 10x - 1$

Teorem 4.3.1.

$n \geq 2$ ve $x = cos\,\theta$ için

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x) \tag{4.17}$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

(4.16) eşitliğinden;

$$V_n(x) + V_{n-2}(x) = \frac{cos\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} + \frac{cos\,\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$$

$$= \frac{cos\,\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + cos\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}$$

$$= cos\left(n+\frac{1}{2}+n-2+\frac{1}{2}\right)\theta\; cos\left(n+\frac{1}{2}-n+2-\frac{1}{2}\right)\theta$$

$$= 2cos\left(\frac{2n-1}{2}\right)\theta cos\theta$$

$$= 2xV_{n-1}(x)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3.1. Üçüncü Çeşit Chebyshev Polinomunun İntegrali

Önerme 4.3.1.1.

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\theta$ için üçüncü çeşit Chebyshev polinomunun integrali

$$\int V_n(x)dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n} \tag{4.18}$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$x = cos\,\theta$ için $dx = -sin\,\theta\,d\theta$ elde edilir. (4.16) eşitliği ve trigonometrik dönüşüm formüllerinden:

$$\int V_n(x) = -\int \frac{cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{cos\frac{1}{2}\,\theta} sin\,\theta\,d\theta$$

$$= -\int \frac{\left(cos\,n\theta\,cos\frac{\theta}{2} - sin\,n\theta\,sin\frac{\theta}{2}\right) sin\,\theta}{cos\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= -\int cos\,n\theta\; 2cos\frac{\theta}{2} sin\frac{\theta}{2} - 2sin\,n\theta sin^2\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= -\int cos\,n\theta\,.sin\,\theta - 2\,sin\,n\theta\left(1 - \frac{1+cos\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= -\int (cos\,n\theta.sin\,\theta - sin\,n\theta + sin\,n\theta.cos\,\theta)\,d\theta$$

$$= -\int (sin(n+1)\,\theta - sin\,n\theta)d\theta$$

$$= \left(\frac{cos(n+1)\,\theta}{n+1} - \frac{cos\,n\,\theta}{n}\right)$$

olur.

Buradan

$$\int V_n(x)\,dx = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n}$$

elde edilir.

4.4. Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomları

Tanım 4.4.1.

$W_0(x) = 1$ ve $W_1(x) = 2x + 1$ ve $n \geq 2$ için

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x)$$

yineleme (tekrarlama) bağıntısı ve

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\theta$ için

$$W_n(x) = \frac{sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{sin\frac{1}{2}\theta} \tag{4.19}$$

bağıntısı ile tanımlanan polinomlara dördüncü çeşit Chebyshev polinomu denir ve $W_n(x)$ ile gösterilir (Mason ve Handscomb, 2003; Koshy, 2019).

Dördüncü çeşit Chebyshev polinomunun ilk 10 terimi aşağıda verilmiştir:

$W_0(x) = 1$

$W_1(x) = 2x + 1$

$W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1$

$W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

$W_4(x) = 16x^4 + 8x^3 - 12x^2 - 4x + 1$

$W_5(x) = 32x^5 + 16x^4 - 32x^3 - 12x^2 + 6x + 1$

$W_6(x) = 64x^6 + 32x^5 - 80x^4 - 32x^3 + 24x^2 + 6x - 1$

$W_7(x) = 128x^7 + 64x^6 - 192x^5 - 80x^4 + 80x^3 + 24x^2 - 8x - 1$

$W_8(x) = 256x^8 + 128x^7 - 448x^6 - 192x^5 + 240x^4 + 80x^3 - 40x^2 - 8x + 1$

$W_9(x) = 512x^9 + 256x^8 - 1024x^7 - 448x^6 + 672x^5 + 240x^4 - 160x^3 - 40x^2 + 10x + 1$

Teorem 4.4.1.

$n \geq 2$ ve $x = cos\theta$ için;

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x) \tag{4.20}$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

(4.19) eşitliğinden

$$W_n(x) + W_{n-2}(x) = \frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta + sin\left(n-2+\frac{1}{2}\right)\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$= \frac{2\,sin\left(\frac{n+\frac{1}{2}+n-2+\frac{1}{2}}{2}\right)\theta\,.cos\left(\frac{n+\frac{1}{2}-n+2-\frac{1}{2}}{2}\right)\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$= \frac{2cos\theta\ sin\left(n-1+\frac{1}{2}\right)\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$= \frac{2\,sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta.cos\theta}{sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$= 2xW_{n-1}(x)$$

bulunur.

4.4.1. Dördüncü Çeşit Chebyshev Polinomunun İntegrali

Önerme 4.4.1.1.

$x \in [-1,1]$ ve $x = cos\theta$ için dördüncü çeşit Chebyshev polinomunun integrali

$$\int W_n(x)dx = -\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n} \tag{4.21}$$

dir (Mason ve Handscomb, 2003).

İspat:

$x = cos\theta$ 'nın türevini alındığında $dx = -sin\theta d\theta$ olur. (4.19) eşitliği ve trigonometrik dönüşüm formüllerinden

$$\int W_n(x)dx = -\int \frac{sin(n+\frac{1}{2})\theta}{sin\frac{1}{2}\theta} sin\theta d\theta$$

$$= -\int \frac{\left(sin\, n\theta cos\frac{\theta}{2} + cos\, n\theta sin\frac{\theta}{2}\right) sin\theta}{sin\frac{\theta}{2}} d\theta$$

$$= -\int \left(2\, sin\, n\theta . cos^2\frac{\theta}{2} + 2\, cos\, n\theta \;\; sin\frac{\theta}{2} cos\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= -\int \left((cos\theta + 1)\sin n\theta + \cos n\theta\; sin\theta\right) d\theta$$

$$= -\int (cos\theta \sin n\theta + \sin n\theta + \cos n\theta sin\theta) d\theta$$

$$= -\int (\sin(n+1)\,\theta + \sin n\theta) d\theta$$

$$= -\frac{cos(n+1)}{n+1} - \frac{cosn}{n}$$

olur. Buradan

$$\int W_n(x)\, dx = -\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_n(x)}{n}$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Fibonacci polinomları ve Chebyshev polinomlarının türev ve integralleri ile ilgili detaylı bir inceleme yapılmıştır. Fibonacci ve Chebyshev polinomları incelenerek bu polinomların türev ve integralleriyle ilgili literatürde yer alan özdeşlikler araştırılmıştır. Ayrıca bu tezde, Fibonacci polinomları ve Fibonacci polinomlarının türevlerinin Pascal üçgeni ile arasındaki ilişkilere yer verilmiştir. Bu ilişkiler tablolar yardımıyla daha anlaşılır hale getirilmeye çalışılmıştır. Çalışmada Fibonacci polinomlarının birinci ve ikinci türevleri ile integralleri verilmiştir. Ayrıca Chebyshev polinomlarının dört farklı çeşidinin türev ve integralleri ayrıntılı olarak tezde yer almıştır. Üstelik birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomlarının trigonometri ile ilişkilerine de tezde yer verilmiştir. Bundan sonraki çalışmalarda Fibonacci polinomlarının integralleri ile üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomlarının türevleri üzerine çalışmalar yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

Cesarano, C. (2015). Integral Representations and New Generating Functions of Chebyshev Polynomials. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 44, 541–552.

Çalık, N. (2010). *Chebyshev Polinomları ve Bazı Uygulamaları*, 3-14, (yüksek lisans tezi), Selçuk Üniversitesi. Konya.

Falcon, S. ve Plaza, Á. (2009). On k- Fibonacci Sequences and Polynomials and Their Derivatives, *Chaos, Solitions & Fractals*, 39(3), 1005–1019.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 1*. ,79, John Wiley & Sons.

Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2*. , 3, John Wiley & Sons.

Mason, J.C. ve Handscomb, D.C. (2003). *Chebyshev Polynomials.* Chapman and Hall/Crc, Washington.

Rivlin T.J. (1990). *Chebyshev Polynomials. From Approximation Theory to Algebra and Number Theory*, (2. baskı), 1-249, New York: Wiley-Interscience.

Wang, T. ve Zhang, W. (2012). Some Identities Involving Fibonacci, Lucas Polynomials and Their Applications, *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, 103(1), 95-103.

Wang, T. ve Zhang, H.(2015). Some Identities Involving The Derivative of the First Kind Chebyshev Polynomials, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 146313.

Whang, S. (2015). Some new identities of Chebyshev Polynomials and Their Applications, *Advances in Difference Equations*, 355.

Wang, X. ve Hu, J. (2018). An İdentity İnvolving The İntegral Of The First-Kind Chebyshev polynomials, *mathematical problems in engineering*, Article ID 71869440.

Zhang, W. (1997). Some Identities Involving The Fibonacci Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 35(3), 225-229.

Zhang, W. (2002). On Chebyshev Polynomials and Fibonacci Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 40, 314-318.

Zhang, W. (2004).Some Identities Involving The Fibonacci Numbers and Lucas Numbers, *The Fibonacci Quarterly*, 42(2), 149-154.

Yang, Li. (2014). On Chebyshev Polynomials, Fibonacci Polynomials, and Their Derivatives, *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 451953.

Zhang, W. ve Wang, T. (2017). Two Identities Involving The Integral of The First Kind Chebyshev polynomials, *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, Tome 60 (108) no.1, 91-98.

Zhang, W. ve Ma, Y.(2018). Some Identities Involving Fibonacci Polynomials and Fibonacci Numbers, *Mathematics* 6, 33