T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİYLE TAM ÇÖZÜMLERİN BULUNMASI

HİCRAN ELİAÇIK

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

YOZGAT - 2021

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİYLE TAM ÇÖZÜMLERİN BULUNMASI

HİCRAN ELİAÇIK

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

YOZGAT – 2021

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

HİCRAN ELİAÇIK

28/09/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜSTEL FONKSİYON YÖNTEMİYLE TAM ÇÖZÜMLERİN BULUNMASI

HİCRAN ELİAÇIK

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. YUSUF PANDIR

Bu tez çalışmasında, üstel fonksiyon yöntemi incelenmiştir. Bu yöntem lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasını sağlar. Üstel fonksiyon yöntemi sırasıyla lineer olmayan Van der Waals denklemi ve kompleks katsayılı Kundu-Eckhaus denklemine uygulanmıştır. Ele alınan yöntem sayesinde bu denklemlerin tam çözümleri elde edilmiştir. İncelenen denklemlerin farklı yöntemlerle bulunan tam çözümleri ile bu çalışmada elde edilen tam çözümlerin karşılaştırılması yapılmıştır. Ayrıca, Van der Waals denklemi ve kompleks katsayılı Kundu-Eckhaus denkleminin elde edilen yeni tam çözümlerinin fiziksel davranışlarını belirleyebilmek için iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

2021, 44 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Üstel Fonksiyon Yöntemi, Lineer Olmayan Van der Waals Denklemi, Kompleks Katsayılı Kundu-Eckhaus Denklemi, Tam Çözümler, Karanlık Soliton, Aydınlık Soliton

ABSTRACT

MASTER THESIS

FINDING THE EXACT SOLUTIONS BY EXP FUNCTION METHOD

HICRAN ELIACIK

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

MATHEMATICS

SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. YUSUF PANDIR

In this thesis, the exponential function method was examined. This method allows to find exact solutions of the nonlinear partial differential equations. The exponential function method was applied to the nonlinear Van der Waals equation and Kundu-Eckhaus equation with complex coefficient, respectively. Exact solutions of these equations are obtained by applying the considered method. The exact solutions of the examined equations found by different methods were compared with the exact solutions obtained in this study. In addition, two- and three-dimensional graphs are drawn to determine the physical behavior of the new exact solutions of the Van der Waals equation and the Kundu-Eckhaus equation with complex coefficients.

2021, 44 PAGE

KEYWORDS: Exponential Function Method, Nonlinear Van der Waals Equation, Kundu-Eckhaus Equation with Complex Coefficients, Exact Solutions, Dark Soliton, Bright Soliton

ÖNSÖZ

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin analitik olarak bulunması uygulamalı matematik alanının önemli konularından biri olmuştur. Farklı fiziksel olayların modellenmesi sayesinde elde edilen kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasını sağlayan yöntemler bilim insanlarının sürekli ilgisini çeken konular arasındadır.

Bu anlamda üstel fonksiyon yöntemi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesini sağlayan dinamik yöntemlerden birisidir. 2006 yılında önerilen bu yöntem günümüzde hala kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması için kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasının belirlenmesinde ve çalışmanın hazırlık sürecindeki her aşamasında tecrübelerini, bilgilerini ve değerli zamanlarını esirgemeyerek bana her fırsatta yardımcı olan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf PANDIR'a, her zaman yanımda olan babama, anneme ve kardeşlerime teşekkürü bir borç bilirim.

HİCRAN ELİAÇIK

28/09/2021

İÇİNDEKİLER

Tez Onay Sayfası…….. ii

Tez Beyanı…….. iii

Özet…….. iv

Abstract…… v

Önsöz…… vi

İçindekiler…… vii

Şekiller Listesi…….. ix

1. GİRİŞ…… 1

2. GENEL BİLGİLER……... 5

2.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler…….. 5

2.2. Solitonlar ve Çeşitleri..…… 7

3. YÖNTEM……..…… 11

3.1. Üstel Fonksiyon Yöntemi.....…… 11

3.2. Üstel Fonksiyon Yönteminin Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması….…… 15

4. BULGULAR.....…… 17

4.1. Van Der Walls Denklemine Üstel Fonksiyon Yönteminin Uygulaması 17

4.2. Kundu-Eckhaus Denklemine Üstel Fonksiyon Yönteminin Uygulaması..... 24

5. SONUÇ ve ÖNERİLER ……..…… 31

6. KAYNAKLAR…….....…… 33

ÖZGEÇMİŞ

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil		**Sayfa**
Şekil 2.1.	Bir dalga modeli	9
Şekil 4.1.	(4.13) denklemindeki çözümün $k=2,\ \varepsilon=1,\ b_{-1}=1,\ b_1=1$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	20
Şekil 4.2.	(4.16) denklemindeki çözümün $k=2,\ \varepsilon=3,\ b_{-1}=1,\ b_1=1$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	20
Şekil 4.3.	(4.19) denklemindeki çözümün $k=i\sqrt{2},\ \varepsilon=3,\ b_{-1}=1,\ b_1=1$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	21
Şekil 4.4.	(4.22) denkleminde $k=3i,\ \varepsilon=-3,\ b_{-1}=1,\ b_1=i$ değerleri için sanal kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	22
Şekil 4.5.	(4.28) denkleminde $k=i\sqrt{2},\ \varepsilon=-3,\ b_{-1}=1,\ b_1=-1,\ b_0=1$ değerleri için sanal kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi	23
Şekil 4.6.	(4.41) denklemindeki çözümün $\kappa=b=c=b_1=a_0=1,$ ve $\theta_0=0,\ a_{-1}=3, a=\frac{1}{4}, b_{-1}=2,\ a_{-1}=-3$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	27
Şekil 4.7.	(4.44) denklemindeki çözümün $a_1=\kappa=2,\ b=c=a_0=1,$ ve $a=\frac{1}{2}, \theta_0=0,\ b_1=3, b_{-1}=-1$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	28
Şekil 4.8.	(4.47) denklemindeki çözümün $a_1=\kappa=2,\ b=c=a_0=b_{-1}=1,$ ve $a=\frac{1}{2}, \theta_0=0,\ b_1=3$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	29
Şekil 4.9.	(4.50) denkleminde $a_1=b_{-1}=2,\ b=c=1, \kappa=3$ ve $a=\frac{1}{2}, \theta_0=0,\ b_1=3$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	29
Şekil 4.10.	(4.52) denkleminde $a_{-1}=b_1=i,\ b_{-1}=2,\ b=c=1, \kappa=4$ ve $a=\frac{1}{3}, \theta_0=0$ değerleri için sanal kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.	30

1. GİRİŞ

Yaşadığımız dünyadaki karşılaşılan farklı olayların belli bir düzen içinde olduğunu tespit etmek zor değildir. Karşılaştığımız her bir olayın anlaşılmasını sağlayan yasalar insanoğlunun hep ilgi odağı olmuştur. Uzun yıllardan bu yana ortaya konulan yasalar için çalışmalar yapılmış ve yasaların geliştirilmesine katkı sağlayan bilim insanları her geçen gün artmıştır. Bu yasalara karşılık gelen fiziksel olaylar genellikle yaşam bilimleri ve mühendislik bilimlerinde önemli bir yere sahiptir. Fiziksel olayların modellenmesiyle birlikte diferansiyel denklemler teorisi oluşturulmuştur. Bu teorilerin geliştirilmesi sonucunda diferansiyel denklemlerin çözümünü veren yeni çözüm yöntemleri ortaya çıkmıştır. Bu geliştirilen çözüm yöntemleri sayesinde oluşan fiziksel olayların mekanizmalarının daha iyi anlaşılmasına katkı sağlanmıştır.

Farklı alanlarda belirlenen problemlerin modellenmesi genellikle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerle yapılır. Bunlara örnek olarak roket hareketleri, uydu konumlanması, zamanla ısının yayılması, derin sulardaki dalga hareketleri, radyoaktif bir maddenin parçalanması ve bir DNA'daki bozulmanın tespitini verebiliriz. Karşılaşılan problemler genelde lineer olmadığından, lineer olmayan denklemler kullanılarak modellenirler. Bu modelleme ile diferansiyel denklemler kullanılarak, bu denklemlerin analitik veya tam çözümleri(kapalı formları) bulunmaya çalışılır. Lineer ile lineer olmayan denklemlerin çözüm yöntemleri farklılık gösterir. Örneğin lineer denklemlerde üst üste bindirme(superposition) kuralı sayesinde herhangi iki farklı çözümün birleşimi de bir çözüm meydana getirir. Bu durum lineer olmayan denklemler için geçerli değildir. Bu nedenle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması ve çözülebilir olup olmadığına karar verilmesi oldukça önemlidir. Önerilen yöntemlere göre tam çözümlerinin elde edilmesi ve bulunan çözümlerin fiziksel olarak anlaşılması önemlidir. Ayrıca uygulanan tam çözüm yöntemleri sonucunda farklı çözümler elde edilebileceğinden bu çözümlerin sınıflandırılması büyük önem taşır. Bu yüzden uygulamalı matematik bilim dalı bu tarz denklemlerin çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine katkı sağlamaktadır. Bu alanda bir çok bilim insanı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümüne katkı sağlayan yöntemler geliştirdiler. Geliştirilen bu yöntemler ile elde edilen tam çözümler sayesinde ele alınan problemlerin karakteristiklerinin anlaşılıp ve olası yorumlanmasına katkı sağlanması oldukça önemlidir.

Farklı alanlarda karşılaştığımız ve önerilen yöntemlerle çözüme sahip olan zaman değişkenine göre türevi bulunduran lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin integrallenebilirliği önemli bir konudur. Bu nedenle kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasını sağlayan genel bir yöntem bulunmamaktadır. Son yıllarda bu tarz denklemlerin çözülebilmesine olanak sağlayan soliton teorisindeki dalga kavramıdır. Belirli bir çözüme sahip olmayan bu denklemlerin sayısal çözümlerinin ve hareketli dalga çözümlerinin araştırılması oldukça önemlidir. Doğada karşılaşılan lineer olmayan olaylar, biyoloji, kimyasal fizik, plazma fiziği, katı hal fiziği, optik fiberler, akışkanlar mekaniği, kimyasal kinematik ve mühendislik alanlarında ortaya çıkmaktadır.

Dalganın tanımı, referans bir karede belli bir hızı ile hareket eden ve herhangi bir zamansal evrime yol açmayan bir doğa olayı olarak verilir. Dalgaların farklı çeşitleri bulunmaktadır. Sabit hızla yayılırken kendi şeklini koruyabilen tekli dalgalar soliton olarak adlandırılır. Bir solitonun başka bir soliton ile etkileşime girmesi sonucunda kendi özelliğini muhafaza ettiği görülmektedir. Soliton teorisinin oldukça fazla uygulama alanı olduğundan, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga (tam) çözümlerinin bulunmasını mümkün kılan güçlü ve etkin yöntemler bilim insanları tarafından literatüre kazandırılmıştır. Önerilen yeni yöntemler sayesinde yeni çözüm fonksiyonlarının belirlenmesi ile çeşitli fiziksel mekanizmaların anlaşılması daha kolay hale gelmiştir. Bu sebeple bir kısmi türevli diferansiyel denklemin çözülebilmesine olanak sağlayan hareketli dalga modelinden faydalanmak kolaylık sağlar. Hareketli dalga modelinin uygulanabildiği birçok analitik ve yarı analitik yöntemler geliştirilmiş ve literatüre kazandırılmıştır.

Hirota'nın bilineer dönüşüm yöntemi (Hietarinta, 1997; Hietarinta, 2005), tanh fonksiyon yöntemi (Malfliet ve Hereman, 1996; Malfliet, 2004), üstel fonksiyon yöntemi (He ve Wu, 2006; He ve Abdou, 2007; Zhang, 2007; Zhu, 2007), çoklu üstel fonksiyon yöntemi (Wan vd., 2020; Ma ve Zhu, 2012), (G'/G)- açılım yöntemi (Shakeel ve Mohyud-Din, 2015; Akbar vd., 2013), geliştirilmiş (G'/G)-açılım yöntemi (Zhang vd., 2010; Guo ve Zhou, 2010), deneme denklem yöntemi (Liu, 2006; Liu, 2010; Gürefe vd., 2011), genişletilmiş deneme denklem yöntemi (Pandır vd., 2012; Pandır vd., 2013a; Gürefe vd., 2013;), çoklu genişletilmiş deneme denklem yöntemi (Pandır vd., 2013b), Kudryashov yöntemi (Kudryashov, 2012; Ryabov vd., 2011; Lee ve Sakthivel, 2013), modifiye edilmiş Kudryashov yöntemi (Pandır, 2014; Tandoğan vd., 2013),

genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi (Pandır, 2016; Demiray vd., 2015a; Demiray vd., 2015b; Pandır vd., 2015), ilk integral yöntemi (Abbasbandy, 2010), Weierstrass eliptik fonksiyon açılım yöntemi (Lia vd., 2008), Jakobi eliptik fonksiyon yöntemi (Fu vd., 2001; Shen, 2003), ve genelleştirilmiş F-açılım yöntemi (Pandır ve Turhan, 2017; Pandır, 2017) gibi yöntemler hareketli dalga (tam) çözüm yöntemlerine örnek olarak verilebilir.

Ji-Huan He 2006 yılında üstel fonksiyonu yöntemi olarak adlandırdığı etkili bir yöntemi lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için önerdi (He ve Wu, 2006). Önerilen bu yöntem ile çeşitli lineer olmayan dalga denklemlerinin tekil(solitary) çözümlerini, kompakt benzeri çözümlerini ve periyodik çözümlerini elde etmeyi amaçladılar. Öneri yöntemin diğer yöntemlere göre en belirgin avantajı, hem genelleştirilmiş solitary çözümlerin hem de periyodik çözümlerin bulunmasını sağlamasıdır. İleri zamanlarda önerilen bu etkili yöntemin bazı modifikasyonlu versiyonları; modifiye edilmiş üstel fonksiyonu yöntemi ve çoklu üstel fonksiyon yöntemi bilim insanları tarafından önerilerek, farklı tür diferansiyel denklemlere uygulamaları yapıldı (Ma ve Zhu, 2012; Aksoy vd., 2016; Mohyud-Din ve Bibi, 2017; Wan vd., 2020; Tian ve Liu, 2021).

Nikolay A. Kudryashov ve Nadejda B. Loguinova 2009 yılında yayınladıkları derleme makalede üstel fonksiyonu yöntemini kullanırken dikkatli olmamız konusunda uyarıda bulundular (Kudryashov ve Loguinova, 2009). O makalede üstel fonksiyon yöntem fikrinin çok basit ancak uygulamasındaki temel eksikliğin, elde edilen tam çözümlerin çok hantal olduğunu ifade ettiler. Yöntemin uygulamasıyla elde edilen bazı tam çözümlerin başka çözümlere indirgenebilir olduğunu gösterdiler. Böylece yapılan bu indirgenme ile esasında yeni tam çözümlerin bulunmadığını örneklerle ifade ettiler. Yani bu yöntemin uygulamasında elde edilen tam çözümlerin indirgenip indirgenmeyeceğini iyice araştırılmasının gerektiğini bildirdiler.

Bu tez çalışmasında, üstel fonksiyon yönteminin incelenmesi yapılarak, lineer olmayan kısmi türevli denklemlere uygulaması verilmiştir. İlk önce Ji-Huan He' nin literatüre kazandırdığı üstel fonksiyon yöntemi verilmiş daha sonra ise bu önerilen yönteminin diğer tam çözüm yöntemleriyle karşılaştırılması ifade edilmiştir. Ayrıca yöntemin geliştirilen diğer modifikasyonları da incelenip, farklılıkları belirtilmiştir. Üstel fonksiyon yöntemi sırasıyla Van der Walls denklemine ve kompleks katsayılı Kundu denklemine uygulanmıştır. Üstel fonksiyon yöntemi için hazırlanan algoritmalara göre

oluşturulan kodlar Mathematica 10 paket programında yazılmıştır. Ele alınan denklemlerin paket program yardımıyla hesaplanan çözülmelerinin kontrolü yapılarak, literatürde bulunan ve bulunmayan tam çözümler ifade edilmiştir. Ayrıca incelemesi yapılan denklemlerin bulunan tüm tam çözümlerinin fiziksel davranışlarının daha iyi anlaşılabilmesi için iki ve üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde kısmi türevli denklemler için genel bilgiler, temel tanımlar ile bu denklemlerin çözümleri için kullanılan soliton ve çeşitlerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümünde ise üstel fonksiyon yöntemi ve bu yöntemin diğer yöntemler ile karşılaştırılması ayrıntılı olarak ifade edilmiştir. Dördüncü bölümde üstel fonksiyon yöntemi Van der Walls denklemine ve kompleks katsayılı Kundu denklemine uygulanmıştır. Sonuç bölümde ise uygulanan yönteme göre bulunan tam çözümlerin farklı olup olmadığı ele alınan denklemlerin diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarıyla karşılaştırılması yapılmıştır. Ayrıca bulunan tam çözümlerin fiziksel davranışlarının değerlendirilmesi soliton kavramıyla irdelenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Doğada meydana gelen pek çok fiziksel olay matematiksel terimler kullanılarak modellenebilmektedir. Bu modelleme ile ortaya çıkan denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi bu fiziksel olayların anlaşılmasına fayda sağlamaktadır. Tezin bu kısmında tezde kullanılacak kısmi türevli diferansiyel denklemler ve çeşitleri, adi diferansiyel denklem, soliton ve çeşitleri ile ilgili tanımlar ve bunlara ait özellikler ifade edilmiştir.

2.1. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Kısmi türevli diferansiyel denklem, $x, y, z, ..., t$ bağımsız değişkenler ve bilinmeyen fonksiyon $\phi = \phi(x, y, z, ..., t)$ olmak üzere

$$\Omega\left(x, y, z, \cdots, t, \phi, \phi_x, \phi_y, \phi_z, \cdots, \phi_t, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{zz}, \cdots, \phi_{tt}, \cdots\right) = 0 \tag{2.1}$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki kısmi türevler sırasıyla

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y},\ \phi_z = \frac{\partial \phi}{\partial z},\ \phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{2.2}$$

$$\phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},\ \phi_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2},\ \phi_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2},\ \phi_{tt} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{2.3}$$

biçiminde tanımlıdır. (2.1) deki gibi tanımlanan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin farklı sınıflandırmalar mevcuttur. Bir denklemdeki en yüksek mertebeden türev içeren terimlerin lineer olması durumunda denklem yarı lineer; eğer denklemdeki en yüksek mertebeden türevli terimlerin katsayıları sadece bağımsız değişkene ait fonksiyonları ise, bu takdirde denkleme hemen hemen lineer olarak isimlendirilir. Bu tanıma göre yarı lineer denklem hemen hemen lineer denklemi, hemen hemen lineer denklem ise yarı lineer denklemi kapsamaktadır. Denklemleri bilinmeyen fonksiyon ve onun türevlerinin katsayılarına göre sabit katsayılı, değişken katsayılı ve kompleks katsayılı şeklinde sınıflandırmak da mümkündür. Diğer bir sınıflandırma şekli ise ikinci mertebeden sabit katsayılı bir kısmi türevli diferansiyel denklemin genel hali

$$A(x,y)\phi_{xx} + B(x,y)\phi_{xy} + C(x,y)\phi_{yy} + D(x,y)\phi_x + E(x,y)\phi_y + F(x,y)\phi + G(x,y) = 0 \tag{2.4}$$

olmak üzere diskriminant fonksiyonu $\Delta(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y)$ şeklinde tanımlasın. Eğer $\Delta(x,y) > 0$ ise (2.4) denklemine hiperbolik, $\Delta(x,y) = 0$ ise parabolik ve

$\Delta(x,y)<0$ ise eliptik denklem olarak adlandırılır (Dönmez, 2020). Hiperbolik tip denkleme örnek olarak

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=0 \tag{2.5}$$

dalga denklemini, parabolik tip denkleme örnek olarak

$$u_t-ku_{xx}=0 \tag{2.6}$$

ısı denklemini, eliptik tip denkleme örnek olarak

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \tag{2.7}$$

Laplace denklemini verilebiliriz.

Eliptik tip denklemler; tanımlandıkları bölgede potansiyel(herhangi bir büyüklüğün sıklığı) olarak adlandırılan büyüklüğün değişimini gösterirler. Potansiyele örnek olarak sıcaklık ve basınç verilebilir.

Parabolik tip denklemlerde ise potansiyelin farklı durumlarında geçerli olan büyüklüğün ulaşacağı son durum değerlerini gösterir. Bu duruma örnek olarak zamanla değişim gösteren bağıl ısı ve madde yayılması problemleri verilebilir. Buradaki potansiyelin başlangıç değerlerinden itibaren ulaştığı son durum değerleri bize bir parabolik denklemi tanımlar.

Hiperbolik tip denklemler; zamana bağlı olmak üzere, bir ortam içerisinde yayılma ve titreşimler olarak fen ve mühendislik alanlarında karşımıza çıkmaktadır. Genellik dalga denklemi olarak adlandırılırlar. Dalga denklemi; aerodinamik, elastikiyet, akustik, elektromanyetik, ses yayılması ve atom fizik teorisi konularında esasen titreşen yay hareketinin modellenen halidir. Salınım halinde olan bir yay problemi, yapılarda bulunan titreşen bir mebran zarı ve jel kıvamındaki bir sıvının içinde asılı halde bulunan taneciklerin oluşturduğu hareket problemi bu tarz denklemlere örnek olarak verilebilir.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini elde etmek daima mümkün olmayabilir. Denklemlerin çözümünü bulabilmek için uygulanacak yöntemlerin seçiminde denklemlerde bulunan bağımsız değişkenlerin sayısı ile denklemlerin mertebesi önem arz eder. Bu durumlar göz önünde bulundurulduğunda denklemin ya tek çözümü, ya sonsuz çözümü ya da hiç çözümü olmayabilir. Ayrıca

denkleme ait bütün çözümlerin kapsanmadığı genel bir çözüm olmayıp, aykırı çözümlerde bulunabilir (Dönmez, 2020).

Yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünün elde edilmesine olanak sağlayan belirli bir yöntemi mevcut değildir. Bu sebeple herhangi bir çözümün denklemi sağlaması durumunda bu tarz çözümlere tam çözümler denilmektedir. Literatürde bu tam çözümlerin bulunmasını sağlayan çok fazla yöntem vardır. Bu yöntemler sayesinde elde edilen tam çözümler soliton, kompakton, kink, periyodik ve kompleks çözümler olarak adlandırılmaktadırlar. Bu tarz çözümlerin hepsini bir arada veren tek bir yöntem bulunmamaktadır. Bazı özel durumlar örneğin; birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin genel çözümlerini Lagrange Charpit yöntemi sayesinde elde edebiliriz.

Ayrıca uygulamalı bilimlerde başlangıç veya sınır şartları verilerek meydana getirilen başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümlerinin bulunması en çok karşılaşılan durumlardandır.

2.2. Solitonlar ve Çeşitleri

Doğa bilimlerinde karşılaşılan dalga, boşlukta veya maddenin etrafında yayılan ve sıklıkla enerjinin bir yerden başka bir yere taşınmasına izin veren titreşimlerdir. Genelde sabit bir konumda meydana gelen titreşimler ile oluşurlar ve zamanla belli bir ortamda veya boşlukta ilerleyip, bir dalga modelini veren denklemi meydana getirirler. Su yüzeyinde rüzgâr etkisiyle oluşan yüzey dalgaları, deprem sonucunda oluşan enerjinin etkisiyle meydana gelen uzun periyotlu deniz dalgaları(Tsunami) ve boşlukta yayılan ses dalgaları örnek olarak verilebilir. Mekaniksel dalgalar ve elektromanyetik dalgalar olmak üzere iki çeşidi vardır. Mekanik dalgalar belli bir ortama ihtiyaç duyar ve deformasyona uygar iken elektromanyetik dalgalar ise ortama ihtiyaç duymadan yayılırlar. Hava moleküllerinin çarpışması sayesinde yayılan ses dalgaları bir mekanik dalgalara örnektir. Yüklü parçacıkların oluşturduğu manyetik alanlar sayesinde periyodik titreşimler radyo dalgalarını oluşturur ki bu da elektromanyetik dalgalara bir örnektir.

Titreşimler ile meydana gelen dalga sabit bir frekansa ve kendisinin boyuna bağlı olarak hareketini yapar. Herhangi bir dalganın karakteristiğini frekansı, dalga boyu ve genliği oluşturur. Burada genliği salınımın şiddeti, frekansı salınımın sıklığı ve dalga boyunu ise dalganın iki tepesi veya iki çukuru arasındaki mesafe ifade eder. Dalga

hareketinin iki çeşidi vardır. Bunlardan birincisi periyodik ikincisi ise periyodik olmayandır. Periyodik dalgaya bir kemanın çıkardığı nota sesi, periyodik olmayan dalgaya ise ani bir patlamayla meydana gelen ses örnek olarak verilebilir (Hirota, 2004)..

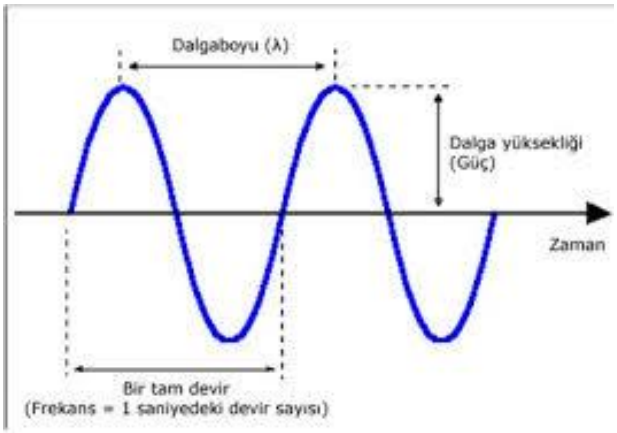
Dalgaları duran ve hareketli(ilerleyen) dalgalar olmak üzere sınıflandırmak mümkündür. Duran dalgalar; pozisyonlarını değiştirmeyen, ortam hareketine ters hareket yapan ve durgun bir ortamda ters yönlü hareket eden iki dalganın birleşmesiyle meydana gelirler. Hareketli dalgalar ise madde taşınmasının olmadığı bir ortamda sadece enerjinin bir noktadan diğer bir noktaya yayılmasıyla meydana gelirler. Herhangi bir ortamda hareketli dalganın frekansı ile dalga boyu ters orantılı bir şekilde yani frekans artarken dalga boyu azalmaktadır. V dalganın hızını, λ dalganın boyunu ve f dalganın frekansını göstermek üzere

$$v = f\lambda \tag{2.8}$$

bağıntı mevcuttur.

Şekil ve hızını değişmeden koruyup, kendisini güçlendirerek yayılan tekil dalgalara soliton adı verilir. Solitonlar herhangi bir etkiye maruz kaldıklarında veya birbirleriyle çarpıştıklarında mevcut özelliklerini korurlar. Genellikle solitonlar lineer olmayan fiziksel olayların modellenmesiyle oluşturulan sistemlerin çözümlerinde elde edilirler. Özellikle fiziksel olaylara karşılık gelen lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin hareketli tam çözümlerine anlam kazandırırlar. Örneğin katı hal fiziğinde, plazma fiziğinde, nörobiyolojide nöron sinyallerinde, mıknatıslardaki manyetik hareketlerde ve optik ışınlarının ilerlemesinde karşılaştığımız solitonlar gelişen teknolojiyle birlikte kendisine farklı uygulama alanları bulmaktadır.

İlk kez 1834 yılında Scott Russell tarafından dönüşüm(solitary) dalgalar gözlemlenmiştir. Laboratuvar ortamında bu dalgaları tekrardan görmek için su tankları oluşturmuş, su tanklarının uçlarına ağırlık bırakarak solitary dalgalarını ve onların özelliklerini detaylı bir şekilde ifade etmiştir (Hirota, 2004).



Şekil 2.1. Bir dalga modeli

Bu deneyler sonucunda herhangi bir ortamdaki solitonun v dalga hızını, ℓ su dalgasının genliğini, h derinliğini ve g yer çekimini göstermek üzere

$$v = \sqrt{g(\ell + h)} \tag{2.9}$$

ifade edilmiştir. Solitary dalgalar asla birleşmezdir. Bu sebeple farklı genliklere sahip olan iki dalga birbirleriyle çarpıştıktan sonra birleşen iki solitary dalga birbirlerinden ayrılarak asıl şekillerini koruyarak hareketlerine devam ederler. Bu durum normal dalgalarda farklılık gösterir. İki normal dalga birbirleriyle çarpıştıktan sonra ya düzleşirler ya da dikleşerek sönümlü bir hale gelirler. Ayrıca yapılan deneyler sonucunda meydana gelen dalgaların lineer olmayan bir davranış gösterdikleri gözlemlenmiştir (Hirota, 2004). Russell'in yaptığı deneylerin sonuçları herhangi bir teori ile birleştirilmemiş ve deneysel sonuçları lineer olmayan bir denklemin çözümüne karşılık getirilememiştir. Sonraki zamanlarda birçok araştırmacı, bir problemlerinin çözümüne karşılık gelen solitary dalga konusunu detaylı olarak araştırdılar.

Hollandalı matematikçi Korteweg ve öğrencisi de Vries 1895 yılında ilk kez sonradan KdV denklemi olarak adlandırılacak

$$\phi_t + 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} = 0 \tag{2.10}$$

denkleminin çözümü buldular. η dalga sayısını ifade etmek üzere,

$$\phi(x,t) = \ell\,\mathrm{Sech}^2\left(\eta(x - vt)\right),\ v = 2\ell = 4\eta^2 \tag{2.11}$$

şeklindeki çözümün bir solitary (tekil) dalgaya karşılık geldiğini gösterdiler (Hirota, 2004). Sığ sularda meydana gelen dalgaların sürekli olarak yayılmasını açıklayan model olarak

KdV denklemi geliştirilmiştir. Ayrıca araştırmacılar, dalgaların kararlı olup olmadığı ile iki solitary dalganın birleşmesiyle biçimlerindeki değişiklikleri belirlemeye çalışmışlardır.

Kruskal ve Zabusky 1965 yılında, KdV denkleminin sonlu farklar yöntemiyle nümerik çözümlerini incelediklerinde iki dalganın çarpışması sonrasında yapılarını koruduklarını gözlemlemişler ve bu çeşit dalgalara ilk kez soliton ismini verdiler (Hirota, 2004). Bu çalışma sayesinde soliton teorisinin temelleri atılarak, bu konuda yeni bir sayfa açtılar. Gardner ve ark. 1967 yılında analitik bir yöntem olan ters saçılma yöntemini geliştirilip, KdV denkleminin soliton çözümlerini elde etmişlerdir (Hirota, 2004).

Denklemlerin hem analitik hem de nümerik olarak çözümlerinin elde edilmesi, soliton teorisine ilgi ve alakayı arttırmıştır. Bu konu üzerine yapılan çalışmalar neticesinde radar, telekomünikasyon ve iletişim sektörlerinde gibi birçok alanda solitonlarla karşılaşılmaktadır. Örneğin soliton dalgaları üreten elektronik cihazlar geliştirilmektedir. Bu sayede istenilen yere istenilen büyüklükte sinyaller, orijinalini koruyarak ulaştırılabilmektedir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik-cebirsel (tam) çözümlerini elde etmek için kullanılan iyi bilinen tekniklerden biri olan üstel fonksiyon yönteminin detaylı bir incelemesi verilmiştir. Öncelikle matematiksel fizikte yüksek boyutlu lineer olmayan evrim denklemlerini sembolik hesaplama yardımıyla çözmeyi sağlayan üstel fonksiyon yöntemi ifade edilmiştir. Daha sonra bu yöntemin diğer yöntemlerle karşılaştırılması yapılarak, yöntemin avantaj ve dezavantajları belirtilmiştir. Üstel fonksiyon yöntemiyle birçok araştırmacı çalışmalar yapmış ve farklı lineer olmayan diferansiyel denklemlerin tam (kesin) çözümleri elde edilmiştir (He ve Wu, 2006; He ve Abdou, 2007; Zhang, 2007; Zhu, 2007; Dai vd., 2009; Borhanifar ve Kabir, 2009; Shi vd., 2009).

3.1. Üstel Fonksiyon Yöntemi

He tarafından literatüre kazandırılan üstel fonksiyon yöntemi; kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilmesini sağlamaktadır. Bu yöntem lineer olmayan diferansiyel denklemlerin soliter çözümleri, periyodik çözümleri ve kompakton benzeri çözümleri bulmak için önerildi (He ve Wu, 2006). O yıllarda ufuk açıcı olan bu makale, bilim camiasında önemli bir etki yarattı. Üstel fonksiyonu yöntemi, daha önce çözümlerin sonlu sayıda sıradan fonksiyon içerecek şekilde ifade edilmediğinden birçok denklemin tam çözümlerinin bulunmasına yardımcı oldu. Sembolik hesaplama kullanılarak, üstel fonksiyon yönteminin matematiksel fizikte yüksek boyutlu lineer olmayan evrim denklemlerini çözmek için güçlü bir yöntem olduğu gösterilmiştir (Navickas ve Ragulskis 2010). Üstel fonksiyonu yöntemi, sembolik hesaplama yardımıyla doğrusal olmayan diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerini bulmak için kullanılabilir.

Çeşitli lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerini bulunması sağlayan yöntemleri açıklayan makalelerin gelecekte de yayınlanması kuvvetle muhtemeldir. Doğal bir soru, bir diferansiyel denklemin (adi veya kısmi) tam çözümünün üstel fonksiyon yöntemiyle bulunup bulunamayacağını belirleyen bir analitik kriterin olup olmadığıdır.

Bu kısımda, üstel fonksiyon yönteminin çözüm algoritması detaylı bir şekilde belirtilmiştir. Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi $x, y, z, ..., t$ bağımsız değişkenler olmak üzere

$$\Omega\left(\phi,\phi_x,\phi_y,\phi_z...,\phi_t,...,\phi_{xx},\phi_{xy},\phi_{xz},...,\phi_{xt},...\right)=0 \tag{3.1}$$

kabul edelim. Burada $\phi(x,y,z,\ldots,t)$ bilinmeyen fonksiyonu Ω' da $\phi(x,y,z,\ldots,t)$'nın bir polinom ifadesidir. (3.1) denkleminin hareketli dalga çözümlerini bulabilmek için hareketli dalga dönüşümü uygulayarak, (3.1) denklemini lineer olmayan adi diferansiyel denklemlere indirgenmesi yapılır. Bunun için $\lambda_k\ (k=1,2,3,...,s)$ sabitler, Ω' da $\phi(x,y,z,\ldots,t)$ nin bir polinomu ifadesi olmak üzere

$$\phi(x,y,z,\ldots,t)=\phi(\theta),\quad \theta=\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z+...+\lambda_s t \tag{3.2}$$

hareketli dalga dönüşümü uygulanır. (3.1)'deki denkleme (3.2)'deki tanımlanan hareketli dalga dönüşümü uygulandığında ve denklemdeki yer alan kısmi türevlerin karşılıkları sırasıyla

$$\phi_x=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{d\phi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}=\lambda_1\phi',\quad \phi_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{d\phi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}=\lambda_2\phi',\quad \phi_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{d\phi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}=\lambda_3\phi',\cdots$$

$$\phi_t=\frac{\partial\phi}{\partial t}=\frac{d\phi}{d\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}=\lambda_s\phi',\quad \phi_{xx}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\lambda_1^2\phi'',\quad \phi_{xy}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=\lambda_1\lambda_2\phi'',$$

$$\phi_{xz}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=\lambda_1\lambda_3\phi'',\cdots,\quad \phi_{xt}=\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\lambda_1\lambda_s\phi'',\cdots \tag{3.3}$$

şeklinde hesaplanır. (3.3) de hesaplanan bu türevler (3.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$\Upsilon\left(\phi,\phi',\phi'',\phi''',...\right)=0 \tag{3.4}$$

şeklinde bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem bulunur. (3.4) denklemi eğer integre edilebiliyorsa θ'ya göre integre edilir. Eğen integre edilemiyorsa $\phi(\theta)$ çözüm fonksiyonunun belirlenmesi gerekir. (3.4) denkleminin çözüm fonksiyonunu c,d,p,q daha sonra belirlenecek tam sayılar ve a_n ve b_m bilinmeyen katsayılar olmak üzere,

$$\phi(\theta)=\frac{\sum_{n=-c}^{d} a_n e^{(n\theta)}}{\sum_{m=-p}^{q} b_m e^{(m\theta)}}=\frac{a_{-c}e^{(-c\theta)}+\cdots+a_d e^{(d\theta)}}{b_{-p}e^{(-p\theta)}+\cdots+a_q e^{(q\theta)}} \tag{3.5}$$

şeklinde kabul edelim. Buradaki c ve p değerlerini belirleyebilmek için, (3.4) denklemindeki en yüksek mertebeden lineer terimi ile en yüksek mertebeden lineer olmayan terimle dengelemesi yapılır. Örneğin denklemde $\phi'''(\theta)$ ile $\phi^2(\theta)\phi'(\theta)$ terimlerinin olduğu varsayalım. Bu takdirde balans işlemi için $c_i\ (i=1,2,3,4,\cdots)$ katsayıları göstermek üzere

$$\phi'''(\theta)=\frac{c_1 e^{(7p+c)\theta}+\cdots}{c_2 e^{8p\theta}+\cdots},\qquad \phi^2(\theta)\phi'(\theta)=\frac{c_3 e^{(5p+3c)\theta}+\cdots}{c_4 e^{8p\theta}+\cdots} \tag{3.6}$$

olarak hesaplanır. Buna göre

$$\begin{aligned}\phi'''(\theta)&\approx\phi^2(\theta)\phi'(\theta)\\ 7p+c&=5p+3c\\ p&=c\end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. Benzer şekilde d ve q değerlerini belirleyebilmek için, aynı işlemler tekrarlandığında, $d_i\ (i=1,2,3,4,\cdots)$ katsayıları göstermek üzere

$$\phi'''(\theta)=\frac{\cdots+d_1 e^{-(7q+d)\theta}}{\cdots+d_2 e^{-8q\theta}},\qquad \phi^2(\theta)\phi'(\theta)=\frac{\cdots+d_3 e^{-(5q+3d)\theta}}{\cdots+d_4 e^{-8q\theta}} \tag{3.8}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\phi'''(\theta)&\approx\phi^2(\theta)\phi'(\theta)\\ -7q-d&=-5q-3d\\ q&=d\end{aligned} \tag{3.9}$$

elde edilir. Eğer sadelik için $p=c=1$ ve $q=d=1$ olarak seçilirse, bu takdirde (3.5) çözüm fonksiyonu

$$\phi(\theta)=\frac{a_{-1}e^{-\theta}+a_0+a_1 e^{\theta}}{b_{-1}e^{-\theta}+b_0+b_1 e^{\theta}} \tag{3.10}$$

şekline dönüşür. (3.10) çözüm fonksiyonuna göre (3.4) diferansiyel denkleminde yer alan türevler sırasıyla

$$\phi'(\theta)=\frac{e^{\theta}\left(a_0b_{-1}-b_0a_{-1}\right)+2e^{2\theta}\left(a_1b_{-1}-a_{-1}b_1\right)+e^{3\theta}\left(b_0a_1-b_1a_0\right)}{\left(b_{-1}+b_0e^{\theta}+b_1e^{2\theta}\right)^2}$$

$$\phi''(\theta)=\frac{\begin{array}{l}e^{\theta}\left(a_0b_{-1}^2-a_{-1}b_0b_{-1}\right)+e^{2\theta}\left(a_1b_0^2-b_0a_0b_{-1}+4a_1b_{-1}^2-4a_{-1}b_{-1}b_1\right)\\+e^{3\theta}\left(3a_{-1}b_0b_1-6b_{-1}b_1a_0+3a_1b_0b_{-1}\right)+e^{4\theta}\left(4a_{-1}b_1^2+a_1b_0^2-4b_{-1}b_1a_1-a_0b_0b_1\right)\\+e^{5\theta}\left(a_0b_1^2-b_0b_1a_1\right)\end{array}}{\left(b_{-1}+b_0e^{\theta}+b_1e^{2\theta}\right)^3}$$

$$\vdots \qquad (3.11)$$

şeklinde hesaplanır.

(3.11) ifadesindeki türevler incelendiğinde, (3.10) çözüm fonksiyonunda olduğu gibi e^{θ} fonksiyonuna bağlı bir polinom ifadesi olduğu görülmektedir. (3.5) ifadesinde yer alan c,d ve p,q sayılarını belirlenmesi için (3.4) denklemindeki lineer olmayan yüksek dereceden terim ile en yüksek mertebeden türev içeren terim arasında dengeleme işlemi yapılır. Sonrasında çözüm fonksiyonu için gerekli olan c,d ve p,q sayıları arasında bağıntı belirlenir. Elde edilen (3.5) çözüm fonksiyonuna göre (3.4) denklemindeki türevler hesaplanıp, yerine yazılırsa, e^{θ} fonksiyonuna bağlı olan bir polinom oluşur. Bu polinom sıfır polinomu olarak kabul edilip, polinomdaki katsayıların sıfıra eşitlenmesi ile oluşan cebirsel denklem sisteminin çözülmesi gerekir.

Oluşan cebirsel denklem sistemi hazır paket programı yardımı ile herhangi çözüm algoritmasına göre çözüldüğünde, bulunması gereken a_n, b_m ve λ_k $(k=1,2,3,...,s)$ katsayıları elde edilir. Bulunan a_n ve b_m katsayıları (3.5) çözüm fonksiyonunda yerine yazılır. Buradan bulunan $\phi(\theta)$ şeklindeki çözüm fonksiyonuna (3.2) ifadesinde yer alan hareketli dalga dönüşümü yerine yazıldığında, (3.1) kısmi türevli diferansiyel denkleminin hareketli dalga (tam) çözümleri elde edilir.

3.2. Üstel Fonksiyon Yönteminin Diğer Yöntemlerle Karşılaştırılması

Üstel fonksiyonu yönteminin diğer yöntemlerle karşılaştırılması sonrasında, yöntemin doğrudan bir uygulamasının eleştirilere maruz kaldığı gözlemlenmiştir. Bu bölümde yöntemin avantaj ve dezavantajları ayrıntılı olarak belirtilmiştir.

Tüm lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler üç tipte incelenebilir olduğunu biliyoruz. İlk türe tüm integrallenebilir denklemleri alabiliriz. Bu tarzdaki kısmi türevli diferansiyel denklemler sonsuz sayıda tam çözüme sahiptir. Bu türe giren en bilinen denklemler sırasıyla; Korteweg-de Vries denklemi, Sinüs–Gordon denklemi, lineer olmayan Schrödinger denklemi, değiştirilmiş Korteweg-de Vries denklemi, Boussinesq denklemi ve Kadomtsev-Petviashvili denklemleridir. Bu denklemler için Cauchy problemleri, ters saçılma dönüşümü kullanılarak çözülebilir. Ayrıca Hirota yöntemi dikkate alınarak bu denklemlerin solitary(tekil) dalga çözümleri bulunabilir. Üstel fonksiyon yöntemi de bu denklemlere uygulanabilir ancak üstel fonksiyon yönteminden elde edilen sonuçlar ters saçılma dönüşümü ve Hirota yönteminden elde edilen sonuçlardan daha iyi olmadığı görülmektedir (Kudryashov ve Loguinova, 2009).

Tam çözümleri olmayan lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler ikinci tip denklem sınıfına aittir. Bu tür denklemlerin pek çok örneği bulunmaktadır. Burada Korteweg-de Vries denkleminin sadece basit bir genelleştirilmiş halini

$$\phi_t + 6\phi\phi_x + \phi_{xxx} + \alpha\phi = 0 \tag{3.12}$$

verebiliriz. (3.12) şeklindeki bu tür denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için herhangi bir genel yöntem bulunmamaktadır.

Bazı kesin çözümleri bulunan tüm integrallenemeyen kısmi türevli diferansiyel denklemleri, üçüncü tip denklemlere ait alabiliriz. Kuramoto-Sivashinsky denklemi, Ginzburg-Landau denklemi, Korteveg-de Vries–Burgers denklemi, Fisher denklemi, Fitzhugh-Nagumo denklemi ve Burgers-Huxley denklemi bu türden en bilinen denklemlerdir. Bu tür denklemlerin kesin çözümlerini aramak için birçok farklı yöntemimiz bulunmaktadır. Bu tarz denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için geliştirilen yöntemlerde büyük ilerleme kaydedildi. Bunlara örnek olarak tekil manifold yöntemi (Peng ve Krishnan, 2005), tanh fonksiyonu yöntemi (Malfliet, 2004) ve en basit denklem yöntemini (Elgarayhi, 2008) verebiliriz. Bu yöntemler lineer olmayan integrallenebilir diferansiyel denklemlere de uygulanabilir. Görülen bazı eksiklikler olduğu

için, üstel fonksiyonu yöntemini Ji-Huan He önermiştir. Literatür incelendiğinde üçüncü tipe giren diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmek için tek bir en iyi yöntem bulunmamaktadır. Üstel fonksiyon yönteminin etkin bir şekilde uygulanması üçüncü tip lineer olmayan diferansiyel denklemlere yapıldığını düşünülmektedir.

Ayrıca bir diferansiyel denklemin tam çözümlerinin sonlu sayıda üstel fonksiyon içeren bir biçimde ifade edilip edilemeyeceğini belirleyen bir kriter oluşturulmuştur (Navickas ve Ragulskis, 2009**).** Bu kriter, sembolik çarpımsal operatör teknikleriyle üretilmiş katsayılardan oluşturulan Hankel matrisinin rank kavramına dayanmaktadır. Ayrıca denklemi çözmeden bu kriterin kullanılması, çözümün yapısı hakkında cevap almamıza olanak tanımaktadır.

Görüldüğü gibi her diferansiyel denklem araştırmacısının kendi deneyimi ve yöntemlere olan ilgisine göre çeşitlik görülmektedir. Ancak ele alınan yöntemin seçimi lineer olmayan diferansiyel denklemin biçimine ve çözümünün kutbuna bağlıdır.

4. BULGULAR

Bu bölümde Kundu denklemi ile Van Der Walls denkleminin genel hatları verilmiş, denklemlerin üstel fonksiyon yöntemi ile uygulaması yapılmıştır. Bu denklemlerin diğer yöntemlerle elde edilen tam çözümleri ile üstel fonksiyon yöntemiyle bulunan çözümlerinin karşılaştırılması verilmiştir. Ayrıca elde edilen tam çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri verilerek fiziksel davranışları araştırılmıştır.

4.1. Van Der Walls Denklemine Üstel Fonksiyon Yönteminin Uygulaması

Akışkanlaştırılmış granüller maddenin modeli olan Van der Walls denklemi, inşaat mühendisliği, farmasötikler, endüstriyel uygulamalar ve jeofizikte kilit role sahip olan en önemli lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerden biridir. Van der Walls denklemi, endüstriyel uygulamalarda, ilaç sanayisinde, inşaat mühendisliğinde ve jeofizik alanlarındaki uygulamalarda sıklıkla görülmektedir. Van der Walls denkleminin en genel gösterimi

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \eta \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi^3 - \varepsilon \phi \right) = 0 \tag{4.1}$$

şeklindedir (Bibi vd., 2018; Lu vd., 2017). Burada ϕ, kritik ortalama dikey yoğunluğa düzeltmeyi yansıtan alanı tanımlar. x, granüller sistemin yatay yönünü ifade etmektedir. ε ve η sırasıyla çatallanma parametresi ve etkin viskoziteyi göstermektedir. (4.1) denklemine üstel fonksiyon yöntemini uygulamak için ilk önce hareketli dalga dönüşümünü

$$\phi(x, t) = \phi(\xi), \ \xi = kx - \omega t \tag{4.2}$$

uygulayalım. $\phi = \phi(\xi)$, $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \phi'$ olmak üzere, (4.1) denklemi

$$\omega^2 \phi'' + \omega \eta k^2 \phi''' - 3k^2 \left(\phi^2 \phi' \right)' - \varepsilon k^2 \phi'' + k^4 u^{(iv)} = 0 \tag{4.3}$$

şeklinde lineer olmayan 4. mertebeden bir adi diferansiyel denklem indirgenir. (4.3) denklemi integre edilebilir olduğundan, integrasyon sabitini sıfır kabul edilerek iki kez ξ ye göre integrali alındığında

$$\left(\frac{\omega^2 - \varepsilon k^2}{k^2} \right) \phi - \phi^3 + \eta \omega \phi'' + k^2 \phi'' = 0 \tag{4.4}$$

elde edilir. Üstel fonksiyon yöntemine göre (3.5) çözüm fonksiyonunu (4.4) denkleminin çözümü olarak kabul edelim. Çözüm fonksiyonunda bulunan c, d, p, q sayılarını bulabilmek için yönteme göre balans işleminin uygulanması gerekir. Balans işlemi elde edilen (4.4) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev içeren ϕ'' terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan ϕ^3 terimleri arasında yöntemde tanıtıldığı gibi yapılır. $c_i \ (i = 1, 2, 3, 4, \cdots)$ katsayıları göstermek üzere

$$\phi''(\theta) = \frac{c_1 e^{(3p+c)\theta} + \cdots}{c_2 e^{4p\theta} + \cdots}, \qquad \phi^3(\theta) = \frac{c_3 e^{(p+3c)\theta} + \cdots}{c_4 e^{4p\theta} + \cdots} \tag{4.5}$$

olarak hesaplanır. Buna göre

$$\begin{gathered} \phi''(\theta) \approx \phi^3(\theta) \\ 3p + c = p + 3c \\ p = c \end{gathered} \tag{4.6}$$

olarak belirlenir. Benzer şeklinde $d_i \ (i = 1, 2, 3, 4, \cdots)$ katsayıları göstermek üzere

$$\phi''(\theta) = \frac{\cdots + d_1 e^{-(3q+d)\theta}}{\cdots + d_2 e^{-4q\theta}}, \qquad \phi^3(\theta) = \frac{\cdots + d_3 e^{-(q+3d)\theta}}{\cdots + d_4 e^{-4q\theta}} \tag{4.7}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{gathered} \phi''(\theta) \approx \phi^3(\theta) \\ -3q - d = -q - 3d \\ q = d \end{gathered} \tag{4.8}$$

elde edilir. Eğer sadelik için $p = c = 1$ ve $q = d = 1$ olarak seçildiğinde, bu takdirde (3.5) çözüm fonksiyonu

$$\phi(\theta) = \frac{a_{-1} e^{-\theta} + a_0 + a_1 e^{\theta}}{b_{-1} e^{-\theta} + b_0 + b_1 e^{\theta}} \tag{4.9}$$

olarak belirlenir. (4.4) denkleminde yer alan ϕ'' ve ϕ^3 terimleri (4.9) çözüm fonksiyonuna göre

$$\phi^3(\theta)=\left(\frac{a_{-1}e^{-\theta}+a_0+a_1e^{\theta}}{b_{-1}e^{-\theta}+b_0+b_1e^{\theta}}\right)^3$$

$$\phi''(\theta)=\frac{\begin{array}{l}e^{\theta}\left(a_0b_{-1}^2-a_{-1}b_0b_{-1}\right)+e^{2\theta}\left(a_1b_0^2-b_0a_0b_{-1}+4a_1b_{-1}^2-4a_{-1}b_{-1}b_1\right)\\+e^{3\theta}\left(3a_{-1}b_0b_1-6b_{-1}b_1a_0+3a_1b_0b_{-1}\right)+e^{4\theta}\left(4a_{-1}b_1^2+a_1b_0^2-4b_{-1}b_1a_1-a_0b_0b_1\right)\\+e^{5\theta}\left(a_0b_1^2-b_0b_1a_1\right)\end{array}}{\left(b_{-1}+b_0e^{\theta}+b_1e^{2\theta}\right)^3}$$

(4.10)

şeklinde hesaplandıktan sonra (4.4) denkleminde yerine yazılırsa, $\phi(\theta)$ fonksiyonuna bağlı bir polinom ifadesi elde edilir. Bu polinom sıfır polinomu olarak kabul edilip, bu polinomun katsayıları sıfıra eşitlenmesiyle bir cebirsel denklem sistemi oluşur. Bu cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programı ile ilgili algoritmalara göre çözüldüğünde $a_{-1},a_0,a_1,b_{-1},b_0,b_1$ ve k,ω katsayıları bulunur. Bu bulunan katsayılar (4.9) çözüm fonksiyonunda yerine yazıldığında (4.1) denkleminin aşağıdaki durumlarda tam çözümleri elde edilmiştir.

1. Durum:

$$a_0=ik\sqrt{2b_{-1}b_1},\ a_1=b_0=0,\ a_{-1}=-\sqrt{2}kb_{-1},\ \ b_{-1}=b_{-1},\ \ b_1=b_1,\ \ \omega=k\sqrt{2k^2+\varepsilon} \tag{4.11}$$

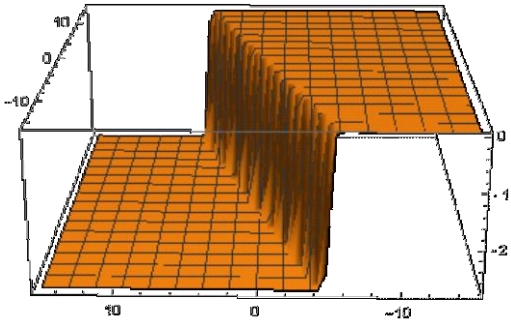
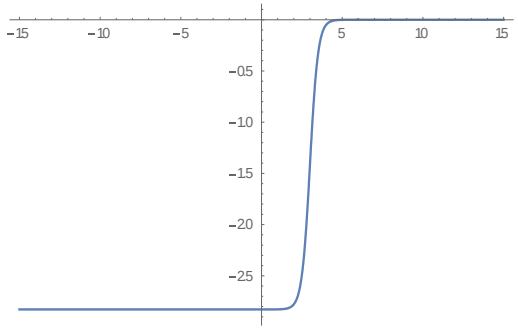
elde edilen katsayılar için (4.9) çözüm fonksiyonu

$$\phi_1(\theta_1)=\frac{a_{-1}e^{-\theta_1}+a_0}{b_{-1}e^{-\theta_1}+b_1e^{\theta_1}}, \tag{4.12}$$

şeklindedir. (4.12) çözüm fonksiyonu için $\theta_1=k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)$ olmak üzere

$$\phi_1(x,t)=\frac{-\sqrt{2}kb_{-1}e^{-\left(k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)\right)}+ik\sqrt{2b_{-1}b_1}}{b_{-1}e^{-\left(k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)\right)}+b_1e^{k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)}} \tag{4.13}$$

olarak elde edilir.

Şekil 4.1. (4.13) denklemindeki çözümün $k=2,\ \varepsilon=1,\ b_{-1}=1,\ b_1=1$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

2. Durum:

$$a_1=2\sqrt{2}kb_1,\ a_0=b_0=a_{-1}=0,\ b_1=b_1,\ b_{-1}=b_{-1},\ \ \omega=k\sqrt{8k^2+\varepsilon} \tag{4.14}$$

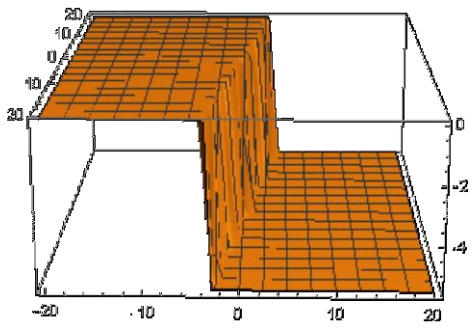
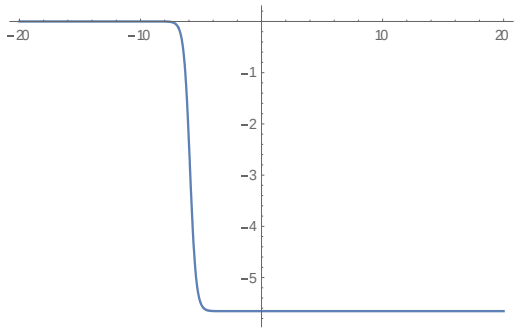
bulunan katsayılar için (4.9) çözüm fonksiyonu

$$\phi_2\left(\theta_2\right)=\frac{a_1e^{\theta_2}}{b_{-1}e^{-\theta_2}+b_1e^{\theta_2}}, \tag{4.15}$$

formundadır. (4.15) çözüm fonksiyonu için $\theta_2=k\left(x+\sqrt{8k^2+\varepsilon}t\right)$ olmak üzere

$$\phi_2\left(x,t\right)=\frac{2\sqrt{2}kb_1e^{k\left(x+\sqrt{8k^2+\varepsilon}t\right)}}{b_{-1}e^{-\left(k\left(x+\sqrt{8k^2+\varepsilon}t\right)\right)}+b_1e^{k\left(x+\sqrt{8k^2+\varepsilon}t\right)}} \tag{4.16}$$

olarak yazılır.

Şekil 4.2. (4.16) denklemindeki çözümün $k=2,\ \varepsilon=3,\ b_{-1}=1,\ b_1=1$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

3. Durum:

$$a_{-1}=2\sqrt{2}kb_{-1},\ a_0=a_1=b_0=0,\ \ b_{-1}=b_{-1},\ \ b_1=b_1,\ \omega=k\sqrt{8k^2+\varepsilon} \tag{4.17}$$

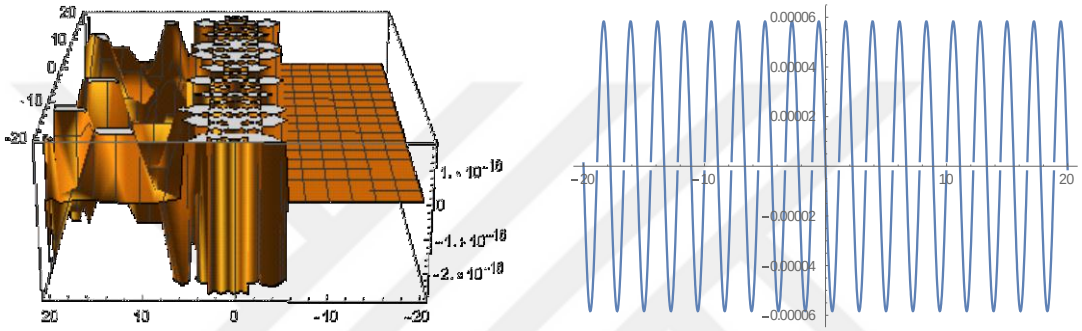
hesaplanan katsayılar için (4.9) çözüm fonksiyonu

$$\phi_3(\theta_2)=\frac{a_{-1}e^{-\theta_2}}{b_{-1}e^{-\theta_2}+b_1e^{\theta_2}}, \tag{4.18}$$

şeklindedir. (4.18) çözüm fonksiyonu

$$\phi_3(x,t)=\frac{2\sqrt{2}kb_{-1}e^{-\left(k\left(x+\sqrt{8k^2+\varepsilon}t\right)\right)}}{b_{-1}e^{-\left(k\left(x+\sqrt{8k^2+\varepsilon}t\right)\right)}+b_1e^{k\left(x+\sqrt{8k^2+\varepsilon}t\right)}} \tag{4.19}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.3. (4.19) denklemindeki çözümün $k=i\sqrt{2},\ \varepsilon=3,\ b_{-1}=1,\ b_1=1$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

4. Durum:

$$a_0=-ik\sqrt{2b_{-1}b_1},\ a_1=-\sqrt{2}kb_1,\ a_{-1}=b_0=0,\ ,\ b_{-1}=b_{-1},\ b_1=b_1,\ \omega=k\sqrt{2k^2+\varepsilon} \tag{4.20}$$

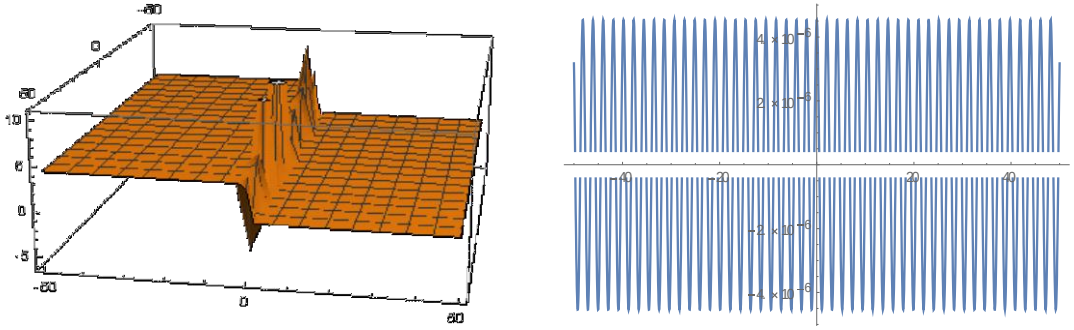
bulunan katsayılar için (4.9) çözüm fonksiyonu

$$\phi_4(\theta_1)=\frac{a_0+a_1e^{\theta_1}}{b_{-1}e^{-\theta_1}+b_1e^{\theta_1}}, \tag{4.21}$$

formundadır. (4.21) çözüm fonksiyonu

$$\phi_4(x,t)=\frac{-\sqrt{2}kb_1e^{k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)}-ik\sqrt{2b_{-1}b_1}}{b_{-1}e^{-\left(k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)\right)}+b_1e^{k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)}} \tag{4.22}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.4. (4.22) denkleminde $k=3i,\ \varepsilon=-3,\ b_{-1}=1,\ b_1=i$ değerleri için sanal kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

5. Durum:

$$a_0=k\sqrt{b_0\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}+b_0^2-4b_{-1}b_1},\ a_1=\frac{b_1k\left(b_0+\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}\right)}{\sqrt{b_0\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}+b_0^2-2b_{-1}b_1}},\ a_{-1}=0,$$

$$b_{-1}=b_{-1},\ b_1=b_1,\ \ b_0=b_0,\ \omega=k\sqrt{2k^2+\varepsilon} \tag{4.23}$$

elde edilen katsayılar için (4.9) çözüm fonksiyonu

$$\phi_5\left(\theta_1\right)=\frac{a_0+a_1e^{\theta_1}}{b_{-1}e^{-\theta_1}+b_0+b_1e^{\theta_1}}, \tag{4.24}$$

şeklindedir. (4.24) çözüm fonksiyonu $D=k\sqrt{b_0\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}+b_0^2-4b_{-1}b_1}$ ve $E=\dfrac{b_1k\left(b_0+\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}\right)}{\sqrt{b_0\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}+b_0^2-2b_{-1}b_1}}$ olmak üzere

$$\phi_5\left(x,t\right)=\frac{D+Ee^{k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)}}{b_{-1}e^{-\left(k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)\right)}+b_0+b_1e^{k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)}} \tag{4.25}$$

şeklindedir.

6. Durum:

$$a_0=k\sqrt{b_0\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}+b_0^2-4b_{-1}b_1},\ a_{-1}=\frac{b_{-1}k\left(b_0+\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}\right)}{\sqrt{b_0\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}+b_0^2-2b_{-1}b_1}},\ a_1=0,$$

$$b_{-1}=b_{-1},\ b_1=b_1,\ \ b_0=b_0,\ \omega=k\sqrt{2k^2+\varepsilon} \tag{4.26}$$

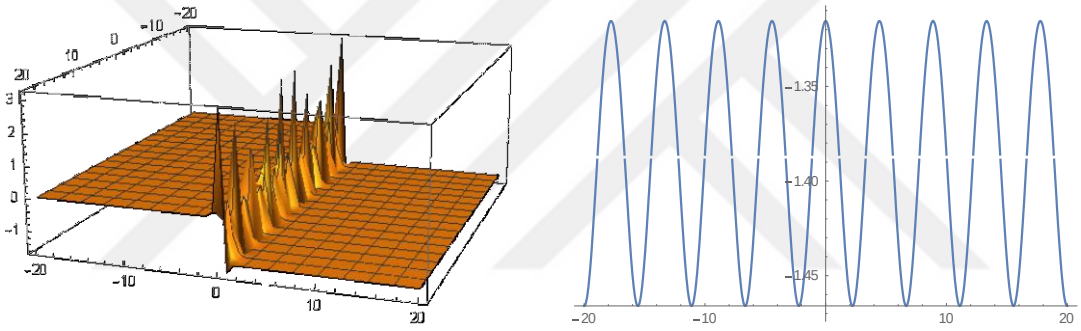
hesaplanan katsayılar için (4.9) çözüm fonksiyonu

$$\phi_6(\theta_1)=\frac{a_{-1}e^{-\theta_1}+a_0}{b_{-1}e^{-\theta_1}+b_0+b_1e^{\theta_1}}, \tag{4.27}$$

şeklindedir. (4.27) çözüm fonksiyonu $D=k\sqrt{b_0\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}+b_0^2-4b_{-1}b_1}$ ve $F=\dfrac{b_{-1}k\left(b_0+\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}\right)}{\sqrt{b_0\sqrt{b_0^2-4b_{-1}b_1}+b_0^2-2b_{-1}b_1}}$ olmak üzere

$$\phi_6(x,t)=\frac{D+Fe^{-k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)}}{b_{-1}e^{-\left(k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)\right)}+b_0+b_1e^{k\left(x+\sqrt{2k^2+\varepsilon}t\right)}} \tag{4.28}$$

olarak elde edilir.



Şekil 4.5. (4.28) denkleminde $k=i\sqrt{2},\ \varepsilon=-3,\ b_{-1}=1,\ b_1=-1,\ b_0=1$ değerleri için sanal kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Eğer balans prosedüründe $p=c=2$ ve $q=d=2$ olarak seçildiğinde, bu takdirde (3.5) çözüm fonksiyonu

$$\phi(\theta)=\frac{a_{-2}e^{-2\theta}+a_{-1}e^{-\theta}+a_0+a_1e^{\theta}+a_2e^{2\theta}}{b_{-2}e^{-2\theta}+b_{-1}e^{-\theta}+b_0+b_1e^{\theta}+b_2e^{2\theta}} \tag{4.29}$$

olarak şekillenir. Aynı prosedür (4.29) çözüm fonksiyonuna göre uygulanır ve (4.1) denklemin farklı tam çözümleri belirlenebilir. Böylece (4.1) Van der Walls denkleminin diğer soliton çözümlerini bulmamız mümkün olabilir.

Van der Walls denkleminin uygulanan yönteme göre elde edilen tam çözümleri incelendiğinde; literatürdeki Bibi vd., 2018 ve Lu vd., 2017 makalelerindeki tam çözümleri ile benzerlik göstermemektedir. Buda tez çalışmamızda ele aldığımız yöntem ile bu denklemin literatürde yer almayan tam çözümlerin elde edildiğini göstermektedir. Ayrıca

elde edilen tam çözümlerin Van der Walls denklemini sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmiştir. Bu denkleme göre elde edilen tam çözümlerin uygun katsayıları değerlerine göre çizilen iki ve üç boyutlu grafikler Şekil 4.1- Şekil 4.5 de gösterilmiştir.

4.2. Kundu-Eckhaus Denklemine Üstel Fonksiyon Yönteminin Uygulaması

Bu kısımda, solitonların optik fiberler kullanarak yayılmasını sağlayan ve alternatif bir model olan kompleks katsayılı lineer olmayan Kundu-Eckhaus denklemi incelenecektir. Bu denklem optik soliton yayılım dinamiklerine genelleştirilmiş bir bakış açısı sağlayan gerçek değerli katsayılarla ifade edilen bir denklemdir. Lineer olmayan Schrödinger denklem sınıfı içindeki bu denklem, Kerr ortamında optik soliton yayımını modelleyen temel bir modeldir. Optik fiber iletişim sistemlerinde ultra kısa optik darbeler üretmek için gelen ışık alanının büyüklüğünün ayarlanması gerekir. Kundu-Eckhaus denkleminin en genel hali

$$i\frac{\partial q}{\partial t}+a\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+b|q|^4 q+c\frac{\partial}{\partial x}\left(|q|^4\right)q=0 \tag{4.30}$$

olarak ifade edilir. şeklindedir (Mirzazadeh vd., 2018; Kundu, 1984; Guzman vd., 2015). (4.30)'da, iki bağımsız değişken olan x ve t sırasıyla uzaysal ve zamansal değişkenleri göstermektedir. Bağımlı değişken olan $q(x,t)$ kompleks değerli bir solitonun darbe profilini temsil etmektedir. (4.30)'daki birinci terim, lineer olmayan dalganın zamansal evrimi ile ilgiliyken, gerçek değerli a, b ve c sabitleri sırasıyla grup hız dağılımını beşli lineer olmayanları ve lineer olmayan etkiyi göstermektedir.

Literatür incelendiğinde Kundu-Eckhaus denkleminin özel halleri genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi (Arnous ve Mirzazadeh, 2016), genişletilmiş deneme denklemi yöntemi (Baskonus ve Bulut, 2015) gibi yöntemler kullanılarak tam çözümler araştırıldığı görülmüştür.

Tezin bu bölümünde Kundu-Eckhaus denklemine üstel fonksiyon yöntemi uygulanmıştır. Bu denklemin en genel hali için hareketli dalga dönüşümü κ soliton frekansı, ω solitonun dalga numarası ve θ_0 faz sabitini göstermek üzere

$$q(x,t)=\sqrt{h(s)}\,e^{i\Phi(x,t)},\ s=k(x+2a\kappa t),\ \Phi(x,t)=-\kappa x+\omega t+\theta_0, \tag{4.31}$$

olarak seçilip uygulandığında (4.30) denklemi

$$2ak^2h(s)h''(s)+4ckh^2(s)h'(s)-ak^2\left(h'(s)\right)^2-4\left(\omega+a\kappa^2\right)h^2(s)+4bh^4(s)=0 \qquad (4.32)$$

şeklinde ikinci mertebeden bir adi diferansiyel denkleme dönüşür. (4.32) denklemine üstel fonksiyon yöntemi uygulandığında (3.5) çözüm fonksiyonunu denkleminin çözümü olarak kabul edelim. Çözüm fonksiyonunda yer alan c,d,p,q sayılarını belirlemek için yönteme has balans işlemi uygulanmalıdır. Balans işlemi; (4.32) denkleminde yer alan en yüksek mertebeden türev içeren hh'' terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan h^4 terimleri arasında yapılır. $c_i\ (i=1,2,3,4,\cdots)$ katsayıları ifade etmek üzere

$$hh''(s)=\frac{c_1e^{(4p+c)s}+\cdots}{c_2e^{4ps}+\cdots}, \qquad h^4(\theta)=\frac{c_3e^{(p+4c)s}+\cdots}{c_4e^{4ps}+\cdots} \qquad (4.33)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned} hh''(s)&\approx h^4(s)\\ 4p+c&=p+4c\\ p&=c \end{aligned} \qquad (4.34)$$

olarak elde edilir. Benzer şeklinde $d_i\ (i=1,2,3,4,\cdots)$ katsayılar olmak üzere

$$hh''(s)=\frac{\cdots+d_1e^{-(4q+d)s}}{\cdots+d_2e^{-4qs}}, \qquad h^4(s)=\frac{\cdots+d_3e^{-(q+4d)s}}{\cdots+d_4e^{-4qs}} \qquad (4.35)$$

olarak yazılır ve buradan

$$\begin{aligned} hh''(s)&\approx h^4(s)\\ -4q-d&=-q-4d\\ q&=d \end{aligned} \qquad (4.36)$$

bulunur. Burada ilk önce $p=c=1$ ve $q=d=1$ değerleri için (3.5) çözüm fonksiyonu

$$h(s)=\frac{a_{-1}e^{-s}+a_0+a_1e^{s}}{b_{-1}e^{-s}+b_0+b_1e^{s}} \qquad (4.37)$$

olarak belirlenir. (4.32) denkleminde yer alan h'', h' ve h^4 terimleri (4.37) çözüm fonksiyonuna göre hesaplandığında

$$h^4(s)=\left(\frac{a_{-1}e^{-s}+a_0+a_1e^{s}}{b_{-1}e^{-s}+b_0+b_1e^{s}}\right)^4$$

$$h'(s)=\frac{e^{s}\left(a_0b_{-1}-a_{-1}b_0\right)+e^{2s}\left(a_1b_{-1}-24a_{-1}b_1\right)+e^{3s}\left(a_1b_0-a_0b_1\right)}{\left(b_{-1}+b_0e^{s}+b_1e^{2s}\right)^2} \qquad (4.38)$$

$$h''(s)=\frac{\begin{array}{l}e^{s}\left(a_0b_{-1}^2-a_{-1}b_0b_{-1}\right)+e^{2s}\left(a_1b_0^2-b_0a_0b_{-1}+4a_1b_{-1}^2-4a_{-1}b_{-1}b_1\right)\\+e^{3s}\left(3a_{-1}b_0b_1-6b_{-1}b_1a_0+3a_1b_0b_{-1}\right)+e^{4s}\left(4a_{-1}b_1^2+a_1b_0^2-4b_{-1}b_1a_1-a_0b_0b_1\right)\\+e^{5s}\left(a_0b_1^2-b_0b_1a_1\right)\end{array}}{\left(b_{-1}+b_0e^{s}+b_1e^{2s}\right)^3}$$

olarak bulunur. Daha sonra hesaplanan değerler (4.32) denkleminde yerine yazılırsa, $h(s)$ fonksiyonuna bağlı bir polinom denklemi elde edilir. Eğer bu polinom sıfır polinomu olarak kabul edilirse, bu takdirde sıfır polinomunun katsayıları sıfıra eşitlenerek bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Elde edilen cebirsel denklem sistemi Mathematica paket programıyla çözüldüğünde $a_{-1},a_0,a_1,b_{-1},b_0,b_1$ ve k,ω,κ katsayıları elde edilmiş olur. Bu katsayılar (4.37) çözüm fonksiyonunda yerine yazılırsa ve (4.31)'de belirtilen hareketli dalga dönüşümünde yerine konulursa (4.30) denkleminin aşağıdaki durumlardaki tam çözümleri bulunur.

1. Durum:

$$a_0=a_0,\ a_1=0,\ a_{-1}=a_{-1},\ b_0=\frac{a_0b_{-1}}{a_{-1}}+\frac{a_{-1}b_1}{a_0},\ b_1=b_1,\ b_{-1}=b_{-1},\ \omega=\frac{ba_{-1}^2}{b_{-1}^2}-\frac{c^2\kappa^2}{4b},\ k=\frac{-4ba_{-1}}{cb_{-1}} \quad (4.39)$$

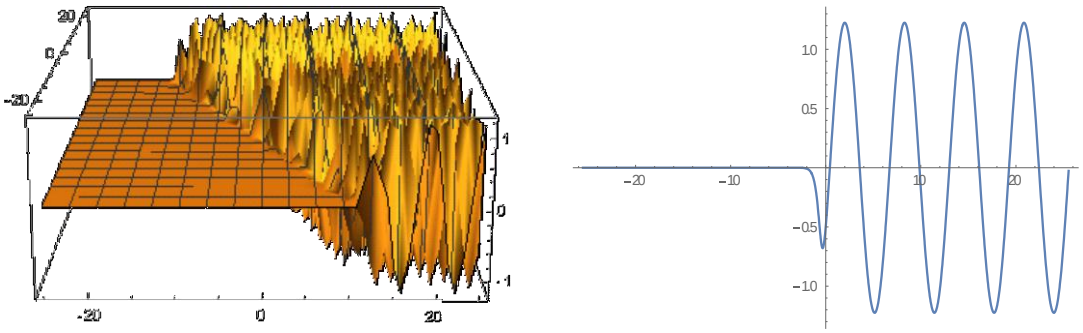
bulunan katsayılar için (4.37) çözüm fonksiyonu

$$h_1(s_1)=\frac{a_0a_{-1}}{a_0b_{-1}+a_{-1}b_1e^{s_1}}, \quad (4.40)$$

şeklindedir. (4.40) çözüm fonksiyonuna göre $s_1=\frac{-4ba_{-1}}{cb_{-1}}(x+2a\kappa t)$ ve $\Phi_1(x,t)=-\kappa x+\left(\frac{ba_{-1}^2}{b_{-1}^2}-\frac{c^2\kappa^2}{4b}\right)t+\theta_0$ olmak üzere

$$q_1(x,t)=\sqrt{\frac{a_0a_{-1}}{a_0b_{-1}+a_{-1}b_1e^{\frac{-4ba_{-1}}{cb_{-1}}(x+2a\kappa t)}}}e^{i\left(-\kappa x+\left(\frac{ba_{-1}^2}{b_{-1}^2}-\frac{c^2\kappa^2}{4b}\right)t+\theta_0\right)} \quad (4.41)$$

olarak bulunur.



Şekil 4.6. (4.41) denklemindeki çözümün $b_{-1}=2,\ a_{-1}=-3,\ \kappa=b=c=b_1=a_0=1,$ ve $\theta_0=0,\ a_{-1}=3, a=\frac{1}{4}$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

2. Durum:

$$a_0=a_0,\ a_1=a_1,\ a_{-1}=0,\ \ b_0=\frac{a_1b_{-1}}{a_0}+\frac{a_0b_1}{a_1},\ b_1=b_1,\ b_{-1}=b_{-1},\ \omega=\frac{ba_1^2}{b_1^2}-\frac{c^2\kappa^2}{4b},\ k=\frac{4ba_1}{cb_1} \tag{4.42}$$

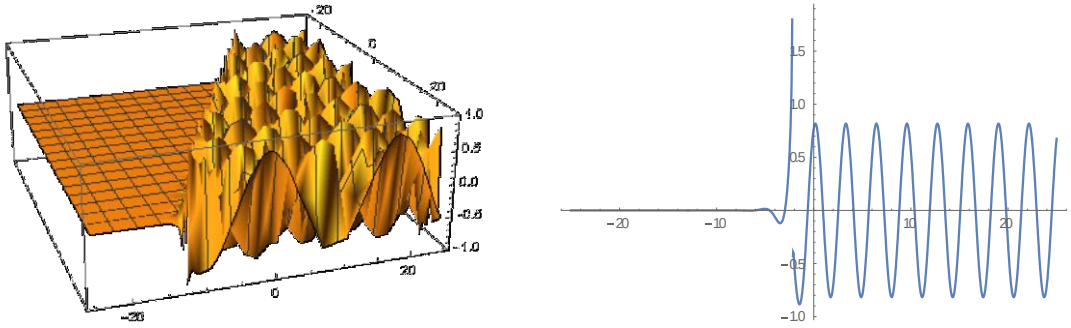
elde edilen katsayılar için (4.37) çözüm fonksiyonu

$$h_2\left(s_2\right)=\frac{a_0a_1}{a_0b_1+a_1b_{-1}e^{-s_2}}, \tag{4.43}$$

şeklindedir. (4.43) çözüm fonksiyonuna göre $s_2=\frac{4ba_1}{cb_1}\left(x+2a\kappa t\right)$ ve $\Phi_2\left(x,t\right)=-\kappa x+\left(\frac{ba_1^2}{b_1^2}-\frac{c^2\kappa^2}{4b}\right)t+\theta_0$ olmak üzere

$$q_2\left(x,t\right)=\sqrt{\frac{a_0a_1}{a_0b_1+a_1b_{-1}e^{-\frac{4ba_1}{cb_1}\left(x+2a\kappa t\right)}}}e^{i\left(-\kappa x+\left(\frac{ba_1^2}{b_1^2}-\frac{c^2\kappa^2}{4b}\right)t+\theta_0\right)} \tag{4.44}$$

elde edilir.



Şekil 4.7. (4.44) denklemindeki çözümün $b_{-1}=-1,\ a_1=\kappa=2,\ b=c=a_0=1,$ ve $a=\frac{1}{2},\theta_0=0,\ b_1=3$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

3. Durum:

$$a_0=a_0,\ a_1=a_1,\ a_{-1}=\frac{-a_1b_{-1}}{b_1},\ \ b_0=\frac{\sqrt{4a_1^2\,b_1b_{-1}+a_0^2b_1^2}}{a_1},\ b_1=b_1,\ b_{-1}=b_{-1},\ \omega=\frac{ba_1^2}{b_1^2},\ k=\frac{2ba_1}{cb_1} \quad (4.45)$$

hesaplanan katsayılar için (4.37) çözüm fonksiyonu

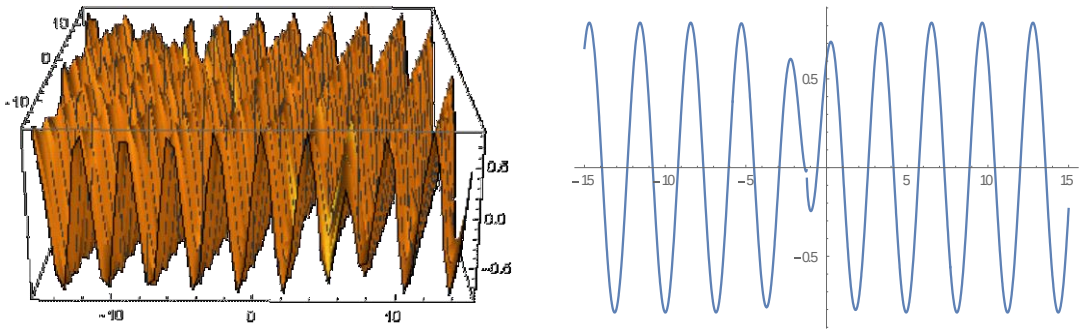
$$h_3\left(s_3\right)=\frac{a_0+a_1e^{s_3}-\dfrac{a_1b_{-1}}{b_1}e^{-s_3}}{b_{-1}e^{-s_3}+b_1e^{s_3}+\dfrac{\sqrt{4a_1^2\,b_1b_{-1}+a_0^2b_1^2}}{a_1}}, \quad (4.46)$$

biçimindedir. (4.46) çözüm fonksiyonuna göre $s_3=\dfrac{2ba_1}{cb_1}\left(x+2a\kappa t\right)$ ve

$\Phi_3\left(x,t\right)=-\kappa x+\dfrac{ba_1^2}{b_1^2}t+\theta_0$ olmak üzere

$$q_3\left(x,t\right)=\sqrt{\frac{a_0+a_1e^{\frac{2ba_1}{cb_1}(x+2a\kappa t)}-\dfrac{a_1b_{-1}}{b_1}e^{-\frac{2ba_1}{cb_1}(x+2a\kappa t)}}{b_{-1}e^{-\frac{2ba_1}{cb_1}(x+2a\kappa t)}+b_1e^{\frac{2ba_1}{cb_1}(x+2a\kappa t)}+\dfrac{\sqrt{4a_1^2\,b_1b_{-1}+a_0^2b_1^2}}{a_1}}}\,e^{i\left(-\kappa x+\frac{ba_1^2}{b_1^2}t+\theta_0\right)} \quad (4.47)$$

şeklinde bulunur.



Şekil 4.8. (4.47) denklemindeki çözümün $a_1=\kappa=2,\ b=c=a_0=b_{-1}=1,$ ve $a=\frac{1}{2},\theta_0=0,\ b_1=3$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

4. Durum:

$$a_0=a_{-1}=b_0=0,\ a_1=a_1,\ b_1=b_1,\ b_{-1}=b_{-1},\ \omega=\frac{ba_1^2}{b_1^2}-\frac{c^2\kappa^2}{4b},\ k=\frac{2ba_1}{cb_1} \tag{4.48}$$

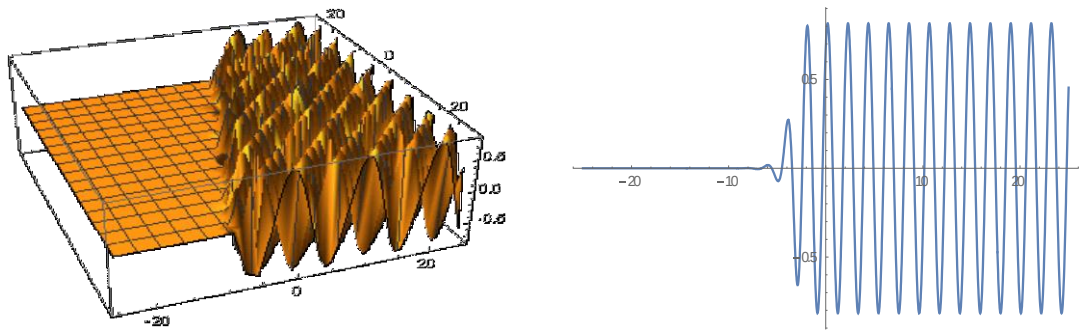
bulunan katsayılar için (4.37) çözüm fonksiyonu

$$h_4(s_3)=\frac{a_1e^{2s_3}}{b_{-1}+b_1e^{2s_3}}, \tag{4.49}$$

şeklini alır. (4.49) çözüm fonksiyonu

$$q_4(x,t)=\sqrt{\frac{a_1e^{\frac{4ba_1}{cb_1}(x+2a\kappa t)}}{b_{-1}+b_1e^{\frac{4ba_1}{cb_1}(x+2a\kappa t)}}}\,e^{i\left(-\kappa x+\left(\frac{ba_1^2}{b_1^2}-\frac{c^2\kappa^2}{4b}\right)t+\theta_0\right)} \tag{4.50}$$

şeklinde tam çözüme dönüşür.



Şekil 4.9. (4.50) denkleminde $a_1=b_{-1}=2,\ b=c=1,\kappa=3$ ve $a=\frac{1}{2},\theta_0=0,\ b_1=3$ değerleri için reel kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

5. Durum:

$$a_0 = a_1 = b_0 = 0,\ a_{-1} = a_{-1},\quad b_1 = b_1,\ b_{-1} = b_{-1},\ \omega = \frac{ba_{-1}^2}{b_{-1}^2} - \frac{c^2\kappa^2}{4b},\ k = \frac{-2ba_{-1}}{cb_{-1}} \tag{4.51}$$

hesaplanan katsayılar değerleri için (4.37) çözüm fonksiyonu

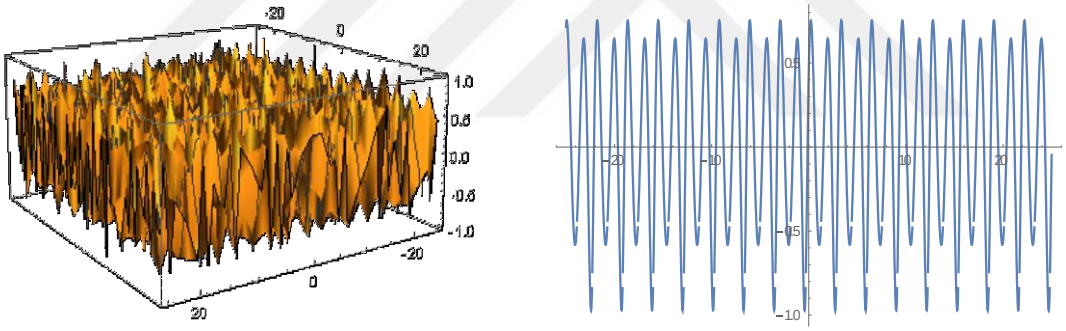
$$h_5(s_4) = \frac{a_{-1}}{b_{-1} + b_1 e^{2s_4}}, \tag{4.51}$$

şeklindedir. (4.51) çözüm fonksiyonuna göre $s_4 = \frac{-2ba_{-1}}{cb_{-1}}(x + 2a\kappa t)$ olmak üzere

$$q_5(x,t) = \sqrt{\frac{a_{-1}}{b_{-1} + b_1 e^{\frac{-4ba_{-1}}{cb_{-1}}(x+2a\kappa t)}}}\, e^{i\left(-\kappa x + \left(\frac{ba_{-1}^2}{b_{-1}^2} - \frac{c^2\kappa^2}{4b}\right)t + \theta_0\right)} \tag{4.52}$$

olarak tam çözüm elde edilmiş olur.

olarak elde edilir.



Şekil 4.10. (4.52) denkleminde $a_{-1} = b_1 = i,\ b_{-1} = 2,\ b = c = 1, \kappa = 4$ ve $a = \frac{1}{3}, \theta_0 = 0$ değerleri için sanal kısmının üç ve iki boyutlu grafik gösterimi.

Kompleks katsayılı Kundu-Eckhaus denkleminin bulunan tüm tam çözümleri için literatür taraması yapıldığında elde edilen (4.41) ve (4.44) tam çözümlerinin Mirzazadeh'in Riccati–Bernoulli alt adi denklem yöntemiyle elde ettiği (18) ve (19) çözümlerle benzerlik gösterdiği tespit edilmiştir. Üstel fonksiyon yöntemiyle elde edilen diğer tam çözümler ise literatürde bulunmayan çözümler olup, bunların ele alınan denklemin yeni tam çözümleri olduğunu ifade edebiliriz. Ayrıca üstel fonksiyon yöntemiyle elde edilen bütün tam çözümlerin en genel haldeki kompleks katsayılı Kundu-Eckhaus denklemini sağladığı tespit edilmiştir. Bu denklemin bulunan tam çözümlerine ait iki ve üç boyutlu grafikleri Şekil 4.6- Şekil 4.10 da gösterilmiştir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında kısmi türevli diferansiyel denklemlerin analitik-cebirsel (tam) çözümlerinin elde edilmesini sağlayan, literatürde oldukça fazla uygulaması ve etkin bir yöntem olan üstel fonksiyon yöntemi incelenmiştir. Uygulaması yapılan bu yöntemin farklı tam çözümleri elde edilirken oldukça dikkatli olunması gerektiği bildiğimiz için elde edilen sonuçların diğer sonuçlarla karşılaştırılmasına bakılmıştır. Diğer yandan elde edilen tam çözümlerin başka formlara dönüşüp dönüşmediği de incelenmiştir. Elde edilen yeni ve farklı tam çözümlerle incelenen denklemlerin fiziksel davranışlarının anlaşılması ve diğer çalışmalara örnek teşkil edeceği düşünülmektedir. Uygulanan üstel fonksiyon yönteminin literatürde var olan tam çözüm yöntemlerine göre oldukça avantajlı olduğu durumlar tespit edilmiştir. Ayrıca yöntemin bazı denklem sınıflarına uygulanırken hatalı sonuçlar verdiği de tespit edilmiştir. Yönteme göre (3.10) çözüm fonksiyonu lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm fonksiyonu olarak kabul edilmiş ve yöntemdeki sabit sayılara göre çözüm fonksiyonunun gelişmesinin mümkün olduğu görülmüştür.

Önerilen (3.10) fonksiyonunun terimlerinin oluşması, lineer olmayan diferansiyel denklemlerde yerine yazılmasından evvel ve gereken katsayılarının belirlenmesi adıma balans işleminin yönteme göre tespit edilmesi çok önemlidir. Yapılan balans işlemi sonucunda p,c ve q,d sayılarının belirlenmesi sayesinde çözüm fonksiyonunun çok farklı olarak seçilebileceği görülmüştür. Daha sonra belirlenen değerlere göre yeni çözüm fonksiyon sınıfları oluşturulur. Bunların hepsi üstel fonksiyonların polinomları şeklindedir.

Üstel fonksiyon yöntemi Van der Walls denklemi ve kompleks katsayılı Kundu-Eckhaus denklemlerine uygulanmış ve elde edilen tam çözümlerin literatürdeki çözümlerden farklı ve yeni tam çözümler olduğu tespit edilmiştir.

Elde edilen çözümlerin soliton teorisinde yer alan hareketli dalga çeşitlerine karşılık geldiği söylenebilir. Farklı soliton çeşitlerine karşılık gelen bu tam çözümlerin doğadaki hangi fiziksel mekanizmalara benzediğini anlayabilmek için, elde edilen yeni tam çözümlerin iki ve üç boyutlu grafikleri seçilen farklı katsayılara göre paket program yardımıyla çizilmiştir. Bu sayede farklı tam çözümlerin fiziksel davranışlarının anlaşılmasına ve bunlar hakkında ayrıntılı bilgi sahibi olunmuştur. İstenilirse bu katsayıların değiştirilmesiyle, farklı fiziksel davranış gösterip göstermedikleri diğer bilim insanları tarafından incelenebilir. Çizdiğimiz grafikler bakıldığında tam çözüm fonksiyonlarının farklı solitonlara karşılık geldiği görülmüştür. Bunlar karanlık, aydınlık

tekil solitonlar olarak özetlenebilir. Literatüre bakıldığında ise farklı solitonların da örneğin kompakton, nematikon ve oskilon gibi farklı birçok soliton çeşidin bir arada olduğu görülebilir. Biz burada sadece fiziksel davranışlarını göstermeye çalıştık. İstenilirse elde edilen tam çözümlerin hangi soliton çeşidine ait olduğu belirlenebilir. Böylece, anlamlı ve hangi olayların sonuçlarının olduğu daha iyi ifade edilebilir. Eğer (3.10) çözüm fonksiyonun daha farklı durumları oluşturulursa, bu takdirde diferansiyel denklemlerin daha farklı ve genel çözüm fonksiyon sınıflarının elde edilebileceğini ifade edebiliriz. söyleyebiliriz. Bu da üstel fonksiyon yöntemin daha da geliştirilebileceği göstermektedir.

6. KAYNAKLAR

Abbasbandy, S., Shirzadi, A. (2010). The First Integral Method for Modified Benjamin-Bona- Mahony Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15, 1759-1764.

Akbar, M. A., Ali, N. H. M., Mohyud-Din, S. T. (2013). The Modified Alternative $\left(G'/G\right)$ -Expansion Method to Nonlinear Evolution Equation: Application to the (1+1)-dimensional Drinfel'd-Sokolov-Wilson Equation. *SpringerPlus*, 327, 2-16.

Aksoy, E., Kaplan, M., Bekir, A. (2016). Exponential Rational Function Method for Space-Time Fractional Differential Equations. *Waves in Random Complex Media*, 26(2), 142-151.

Arnous, A. H., Mirzazadeh, M. (2016). Application of the Generalized Kudryashov Method to the Eckhaus Equation. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 21(5), 577–586.

Baskonus, H. M., Bulut H. (2015). On the Complex Structures of Kundu-Eckhaus Equation via Improved Bernoulli sub-Equation Function Method. Waves in Random and Complex Media, 25(4), 720-728

Bibi, S., Ahmed, N., Khan, U., Mohyud-Din, S. T. (2018). Some New Exact Solitary Wave Solutions of the Van der Waals Model Arising in Nature. *Results in Physics*, 9, 648-655.

Borhanifar, A., Kabir, M. M. (2009). New Periodic and Soliton Solutions by Application of Exp-Function Method for Nonlinear Evolution Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 229, 158–167.

Dai, C. Q., Cen, X., Wu, S. S. (2009). Exact Travelling Wave Solutions of the Discrete Sine-Gordon Equation Obtained via the Exp-Function Method. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 70, 58–63.

Demiray, S. T., Pandır, Y., Bulut, H. (2015a). New Solitary Wave Solutions of Maccari System. *Ocean Engineering*, 103, 153-159.

Demiray, S. T., Pandır, Y., Bulut, H. (2015b). New Soliton Solutions for Sasa-Satsuma Equation. *Waves in Random Complex Media*, 25(3), 417-418.

Dönmez, H. İ. (2020). *Kısmi Türevli Denklemlerin Sonlu Fark Metodu ile Nümerik Çözümleri*, 3-11, (Yüksek Lisans Tezi), Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Rize.

Elgarayhi, A. (2008). New Periodic Waves Solutions for the Shallow Water of the Generalized Klein - Gordon Equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations*, 13, 877-888.

Fu, Z., Liu, S., Liu, S. and Zhao, Q. (2001). New Jacobi Elliptic Function Expansion and New Periodic Solutions of Nonlinear Wave Equations. *Physics Letters A*, 290, 72-76.

Guo, S., Zhou, Y. (2010). The Extended (G'/G)-Expansion Method and its Applications to the Whitham-Broer-Kaup-Like Equations and Coupled Hirota-Satsuma KdV Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 215, 3214-3221.

Guzman, J. V., Mahmood, M. F., Milovic, D., Zerrad E.,Biswas, A., Belic, M. (2015). Dark and Singular Solitons of Kundu-Eckhaus Equation for Optical Fibers. *Optoelectronics and Advanced Materials-Rapid Communications*, 9(11-12), 1353-1355.

Gürefe, Y., Sönmezoglu, A., Mısırlı, E. (2011). Application of Trial Equation Method to the Nonlinear Partial Differential Equations Arising in Mathematical Physics. *Pramana Journal of Physics*, 77(6), 1023-1029.

Gürefe, Y., Sönmezoglu, A., Mısırlı, E. (2012). Application of an Irrational Trial Equation Method to High Dimensional Nonlinear Evolution Equations, *Journal of Advanced Mathematical Studies*, 5(1), 41-47.

Gürefe, Y., Mısırlı, E., Sönmezoğlu, A., Ekici, M. (2013). Extended Trial Equation Method to Generalized Nonlinear Partial Differential Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 219(10), 5253-5260.

He, J. H., Wu, X. H. (2006). Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations. *Chaos, Soliton & Fractals*, 30, 700-708.

He, J. H., Abdou M. A. (2007). New Periodic solutions for Nonlinear Evolution Equations Using Exp-Function Method. *Chaos, Solitons and Fractals*, 34, 1421-1429.

Hietarinta, J. (1997). Hirota's Bilinear Method and its Generalization. *International Journal of Modern Physics A*, 12(1), 43-51.

Hietarinta, J. (2005). Hirota's Bilinear Method and Soliton Solutions. *Physics AUC*, 15(1), 31-37.

Hirota, R. (2004), *The Direct Method In Soliton Theory*, 180-200, Cambridge: Cambridge University Press.

Kudryashov, N. A., Loguinova, N. B. (2009). Be Careful with Exp-Function Method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 1881-1890.

Kudryashov, N. A. (2012). One Method for Finding Exact Solutions of Nonlinear Differential Equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17, 2248-2253.

Kundu, A., (1984). Landau-Lifshitz and Higher-Order Nonlinear Systems Gauge Generated from Nonlinear Schrödinger Type Equations. *Journal of Mathematical Physics,* 25, 3433-3438.

Laia, X. J., Zhang, J. F., Meia, S. H. (2008). Application of the Weierstrass Elliptic Expansion Method to the Long-Wave and Short-Wave Resonance Interaction System. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 63a, 273-279.

Liu, C.S. (2006). Trial Equation Method for Nonlinear Evolution Equations with Rank Inhomogeneous: Mathematical Discussions and Applications. *Communications in Theoretical Physics*, 45(2), 219-223.

Liu, C.S. (2010). Applications of Complete Discrimination System for Polynomial for Classifications of Traveling Wave Solutions to Nonlinear Differential Equations. *Computer Physics Communications*, 181(2), 317-324.

Lee, J., Sakthivel, R. (2013). Exact Travelling Wave Solutions for Some Important Nonlinear Physical Models. *Pramana Journal of Physics*, 80, 757-769.

Lu, D., Seadawy, A. R., Khater, M. M. A. (2017). Bifurcations of New Multi Soliton Solutions of the Van der Waals Normal Form for Fluidized Granular matter via Six Different Methods. *Results in Physics*, 7, 2028-2035.

Ma, W. X., Zhu, Z. (2012). Solving the (3+1)-dimensional Generalized KP and BKP by the Multiple Exp-Function Algorithm. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 11871-11879.

Malfliet, W. (2004). The Tanh Method: a Tool for Solving Certain Classes of Nonlinear Evolution and Wave Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 164-165, 529-541.

Malfliet, W., Hereman, W. (1996). The Tanh method: I Exact Solutions of Nonlinear Evolution and Wave Equations. *Physica Scripta*, 54, 563-568.

Mirzazadeh, M., Yıldırım, Y., Yaşar, E., Triki, H., Zhou, Q., Moshokoa, S. P., Ullah, M. Z., Seadawy, A. R., Biswas, A., Belic, M. (2018). Optical solitons and Conservation Law of Kundu-Eckhaus Equation. *Optik,* 154, 551-557.

Mohyud-Din, S. T., Bibi, S. (2017). Exact solutions for nonlinear fractional differential equations using exponential rational function method. *Optical and Quantum Electronics*, 49:64, 1-12.

Navickas, Z., Ragulskis M. (2009). How far one can go with the Exp-function method?. *Applied Mathematics and Computation*, 211, 522-530.

Pandır, Y., Gürefe, Y., Kadak, U., Mısırlı, E. (2012). Classifications of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, Article ID 478531, 1-16.

Pandır, Y., Gürefe, Y., Mısırlı, E. (2013a). Classification of Exact Solutions to the Generalized Kadomtsev-Petviashvili Equation. *Physica Scripta*, 87(2), 025003, 1-12.

Pandır, Y., Gürefe, Y., Mısırlı, E. (2013b). A Multiple Extended Trial Equation Method for the Fractional Sharma-Tasso-Olver Equation. *AIP Conference Proceedings*, 1558, 1927, 2013.

Pandır Y. (2014). Symmetric Fibonacci Function Solutions of Some Nonlinear Partial Differential Equations. *Applied Mathematics and Information Sciences*, 8, 2237-2241.

Pandır, Y., Sonmezoglu, A., Duzgun, H. H., Turhan, N. (2015). Exact Solutions of Nonlinear Schrödinger's Equation by using Generalized Kudryashov Method. *AIP Conference Proceedings*, 1648, 370004.

Pandır, Y., Demiray, S. T., Bulut, H. (2016). A New Approach for Some NLDEs with Variable Coefficients. *Optik*, 127, 11183-11190.

Pandır Y., Turhan, N. (2017). A New Version of the Generalized F-Expansion Method and its Applications. *AIP Conference Proceedings*, 1798, 020122.

Pandır Y. (2017). A New Type of the Generalized F-Expansion Method and its Application to Sine-Gordon Equation. *Celal Bayar University Journal of Science*, 13(3), 647-650.

Peng, Y. Z., Krishnan, E. V. (2005). The Singular Manifold Method and Exact Periodic Wave Solutions to a Restricted BLP Dispersive Long Wave System. *Reports on Mathematical Physics*, 56, 367-378.

Ryabov, P. N., Sinelshchikov, D. I., Kochanov, M. B. (2011). Application of the Kudryashov Method for Finding Exact Solutions of the High Order Nonlinear Evolution Equations. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 3965-3972.

Shakeel, M., Mohyud-Din, S. T. (2015). New $\left(G'/G\right)$-Expansion Method and its Application to the Zakharov-Kuznetsov–Benjamin-Bona-Mahony (ZK–BBM) Equation. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 18(1), 66-81.

Shen, S., Pan, Z. (2003). A Note on the Jacobi Elliptic Function Expansion Method, *Physics Letters A*, 308, 143-148.

Shi Y., Dai Z., Li D. (2009). Application of Exp-Function Method for 2D Cubic–Quintic Ginzburg–Landau Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 210, 269–275

Tandoğan, Y. A., Pandır, Y., Gürefe, Y. (2013). Solutions of the Nonlinear Differential Equations by use of Modified Kudryashov Method. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, Article ID 20130021, 1-7.

Tian, Y., Liu, J. (2021). A Modified Exp-Function Method for Fractional Partial Differential Equation. *Thermal Science*, 25(2B), 1237-1241.

Wan P., Manafian J., Ismael H. F., Mohammed S. A. (2020). Investigating One-, Two-, and Triple-Wave Solutions via Multiple Exp-Function Method Arising in Engineering Sciences. *Advances in Mathematical Physics*, 2020, Article ID 8018064, 1-18.

Zhang, S. (2007). Exp-Function Method for Solving Maccari's System. *Physics Letters A*, 371, 65-71.

Zhang, J., Jiang, F., Zhao, X. (2010). An Improved (G'/G)-Expansion Method for Solving Nonlinear evolution equations-Expansion Method for Solving Nonlinear Evolution Equations. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(8), 1716-1725.

Zhu, S. D. (2007). Exp-Function Method for the Hybrid-Lattice System. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8(3), 461-464.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ELİAÇIK, Hicran
Uyruğu	: T. C.
Doğum tarihi ve yeri	:
Medeni hali	:
Telefon	: 0( )
Faks	: 0( )
e-mail	:

Yozgat Alacalıoğlu İlköğretim okulundan ve Yozgat İstiklal Lisesinden 2006 yılında mezun oldum. 2007 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2012 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. 2018 yılında Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladım.