T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRSEL MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN G'/G YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

Seda KOÇAK

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

YOZGAT - 2022

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRSEL MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN G'/G YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

Seda KOÇAK

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Yusuf PANDIR

YOZGAT - 2022

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

SEDA KOÇAK

29/08/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

KESİRSEL MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN G'/G YÖNTEMİYLE İNCELENMESİ

SEDA KOÇAK

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. YUSUF PANDIR

Bu çalışmada uygulamalı bilimler içerisinde önemli bir role sahip olan ve gerçek hayat problemini en doğru şekilde modelleyebilen kesirli türev operatörlerinin temel tanımlarından biri olan yerel ve tekil çekirdeğe sahip olmaksızın Mitta-Leffler fonksiyonu ile tanımlı Atangana(beta) kesirli türev operatörü G'/G yöntemi ile incelenmiştir. Bu yöntem klasik G'/G yönteminin genelleştirilmiş halidir. Geliştirilen bu yöntem ile tam çözümlerinin bulunabilmesi için kesirsel türev olan Atangana(beta) türevini içeren lineer olmayan diferansiyel denklemler ele alınmıştır. Bu yöntem Atangana(beta) kesirsel türev içeren lineer olmayan Sharma-Tasso-Olver denklemi ile Boussinesq denklemine uygulanmıştır. Bu sayede denklemlerin yeni tam çözümleri bulunmuştur. Bulunan bu yeni tam çözümlerin fiziksel davranışlarının anlaşılabilmesi için farklı parametre değerlerine göre üç boyutlu grafikleri çizilmiştir.

2022, 46 SAYFA

Anahtar Kelimeler: Yeni Versiyon Genelleştirilmiş G'/G Yöntemi, Atangana(beta) Kesirsel Türev İçeren Diferansiyel Denklemler, Atangana(beta) Kesirsel Türev İçeren Lineer Olmayan Sharma-Tasso-Olver Denklemi, Atangana(beta) Kesirsel Türev İçeren Boussinesq Denklemi, Soliton Çözümler

ABSTRACT

MASTER THESIS

INVESTIGATION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FRACTIONAL ORDER BY G'/G METHOD

SEDA KOÇAK

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. Yusuf PANDIR

In this study, one of the basic definitions of fractional derivative operators, which has an important role in applied sciences and can model the real life problem in the most accurate way, has been examined with the Atangana(beta) fractional derivative operator G'/G method defined with the Mitta-Leffler function without having a local and singular kernel. This method is a generalization of the G'/G classical method. With this developed method, nonlinear differential equations containing the fractional derivative Atangana(beta) have been handled in order to find their exact solutions. This method has been applied to the Boussinesq equation with the non-linear Sharma-Tasso-Olver equation including the Atangana(beta) fractional derivative. In this way, new exact solutions of the equations were found. In order to understand the physical behavior of these new exact solutions, three-dimensional graphs were drawn according to different parameter values.

2022, 46 PAGE

Keywords: New Version Generalized G'/G Method, Fractional Order Differential Equations with Atangana(beta) Derivative, Nonlinear Sharma-Tasso-Olver Equation with Atangana(beta) Fractional Derivative, Boussinesq Equation with Atangana(beta) Fractional Derivative, Soliton Solutions

ÖNSÖZ

Kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunması son zamanlarda uygulamalı matematik alanında çalışan birçok bilim insanının ilgi odağı olmuştur. Kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemler birçok fiziksel olayın modellenmesiyle elde edilmekte olup, bu denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasına olanak sağlayan çeşitli yöntemler bulunmaktadır.

Bu çalışmada kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunmasını hedefleyen Wang ve ark. tarafından 2008 yılında literatüre sunulan etkin yöntemlerden olan G'/G yöntemi incelendi. Bu yöntemi farklı ve yeni bir versiyonları mevcut olup, yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemi ele alındı.

Bu tez çalışmasının her aşamasında deneyimleri, bilgisini ve değerli zamanlarını esirgemeyerek bana her fırsatta destek veren hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf PANDIR'a, bu süreçte desteklerini benden esirgemeyen annem, babam, abim ve değerli mesai arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SEDA KOÇAK

29/08/2022

İÇİNDEKİLER

Tez Onay Sayfası…….. ii

Tez Beyanı…….. iii

Özet…….. iv

Abstract…… v

Önsöz…… vi

İçindekiler…… vii

Şekiller Listesi…….. viii

1. GİRİŞ…… 1

2. GENEL BİLGİLER..……... 6

2.1. Temel Tanımlar…….. 6

2.2. Atangana(Beta) Kesirsel Türev İçeren Kısmi Diferansiyel Denklemler…….. 6

2.3. Çözüm (Dalga) Çeşitleri…… 7

3. YÖNTEMLER..…… 10

3.1. G'/G Yöntemi…… 10

3.2. Yeni Versiyon Genelleştirilmiş G'/G Yöntemi…… 12

4. BULGULAR..…… 15

4.1. Atangana(Beta) Kesirsel Türev İçeren Lineer Olmayan Sharma-Tasso-Olver Denklemi ve Uygulaması..... 15

4.2. Atangana(Beta) Kesirsel Türevi İçeren Boussinesq Denklemi ve Uygulaması... 25

5. SONUÇ ve ÖNERİLER ……..…… 35

6. KAYNAKLAR……..…… 37

ÖZGEÇMİŞ

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: Dalga Modeli Örneği……..…….……..... 8

Şekil 4.1: $a=0.25,\ \lambda=0.12,\ k=0.5$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.14) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi……..……..... 19

Şekil 4.2: $a=0.25,\ \lambda=0.12,\ k=0.5$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.16) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi……..... 19

Şekil 4.3: $a=0.25,\ \lambda=0.12,\ k=0.5$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.34) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi…… 22

Şekil 4.4: $a=0.25,\ \lambda=0.12,\ k=0.5$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.41) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi…….…… 24

Şekil 4.5: $a=0.25,\ \lambda=0.12,\ k=0.5$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.44) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi…….. 24

Şekil 4.6: $\lambda=0.45,\ \beta=0.32,\ k=0.5,\ \gamma=0.55$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.58) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi……... 29

Şekil 4.7: $\lambda=0.45,\ \beta=0.32,\ k=0.5,\ \gamma=0.55$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.59) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi…….. 29

Şekil 4.8: $\lambda=0.45,\ \beta=0.32,\ k=0.5,\ \gamma=0.55$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.61) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi…..... 30

Şekil 4.9: $\lambda=0.45,\ \beta=0.32,\ k=0.5,\ \gamma=0.55$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.62) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi……... 30

1.GİRİŞ

Yaşam bilimleri ve mühendislik alanlarında karşılaşılan fiziksel olayların matematiksel modeller ile detaylı olarak incelenmesi hem uygulamalı hem de teorik bilimlerin araştırma konularındandır. Matematiksel modeller adi, kısmi ve diferansiyel denklem sistemleriyle oluşturulur. Oluşturulan bir modelin çözümünü analitik veya nümerik olarak bulmak o modelin ifade ettiği fiziksel olayların anlaşılabilmesi ve yorumlanabilmesini sağlar.

Uygulamalı bilim alanlarındaki karşılaşılan problemlerin modellenmesi neticesinde genellikle lineer olmayan kesirli türevli diferansiyel denklemler bulunur. Bu sebeple lineer olmayan kesirli türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunması oldukça önemlidir. Geliştirilen analitik yöntemler sayesinde kesirli türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümleri bulunmuştur. Böylece fiziksel olayların anlaşılabilmesi ve yorumlanması daha kolay hale gelmiştir.

Doğada oluşan fiziksel olaylar dinamik, mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, sinyal işleme, sürekli ortam mekaniği, kontrol teorisi gibi birçok uygulamalı bilimde geniş yer bulur. Bunları örneklendirmek istersek, atmosfer dışı roketlerin hareketleri, uyduların yörüngeye oturması, DNA'nın yapısal bozulması sonucu oluşan genomik kararsızlık ve kanserin tespiti, derin ve sığ sulardaki yüzey dalga hareketleri ve radyoaktif maddelerin parçalanması sonucu bozulma verilebilir. Bu matematiksel problemler çoğunlukla lineer olmadığı için bunların modellenmesi neticesinde lineer olmayan kesirli türevli denklemler bulunmaktadır. Bu modellemeler ile meydana gelen kesirli türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri(tam çözüm) ile nümerik çözümleri bulunmaya çalışılmaktadır. Lineer olmayan(non-lineer) ile lineer denklemlerin çözüm algoritmaları birbirinden farklıdır. Lineer denklemler için farklı iki çözümün birleşimi ile oluşan çözümün bulunma işlemine üst üste bindirme kuralı denir. Bu kural geçerli lineer olmayan denklemler için uygun değildir. Bu nedenle lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin bulunmasında sınıflandırılma ile integre edilip edilmemesi uygulanabilecek yöntemler açısından önemlidir.

Kesirli mertebe kavramı, ilk kez 1695 yılında ünlü matematikçi L'Hospital'ın diferansiyel ve türev kavramlarını ortaya atan ilk kişi olan Leibniz'e yazdığı mektupta 1/2 . mertebeden türevin anlamını sormasıyla başlamıştır. Leibniz'in yanıtı: ‘‘Bu durum şu anda bir paradoks gibi gözükse de bir gün çok kullanışlı sonuçlar ortaya çıkacak.’’ şeklinde

olmuştur. Daha sonraki yıllarda keyfi mertebeli türev ve integral isimlendirilmesinin daha doğru bir isimlendirme olması düşünülse de L'Hospital'dan bu güne kadar kesirli mertebe isimlendirmesi ile gelmiştir.

300 yıldan fazla bir zamandan beri araştırılan kesirli mertebe kavramının farklı bilim dallarındaki uygulanabilirliği ve bunun sonucunda elde edilen sonuçların önemi giderek artmıştır. Kesirli türevli diferansiyel denklemin özellikle mühendislik ve fizik alanları başta olmak üzere biyoloji, kimya, tıp, eczacılık, psikoloji, ekonomi, istatistik ve doğa bilimleri gibi alanlarda uygulamaları bulunmaktadır. Bu uygulama alanlarına örnek olarak akışkanların hareketleri, deprem titreşim hareketleri, viskoelastik maddelerin sünme ve gevşeme hareketleri, akustik ses titreşimlerinin yayılma hareketleri(Nataraj 2010). Bu ve farklı konular üzerine araştırmalar hızlı bir şekilde devam etmekte ve bunun neticesinde yeni uygulama alanları örneğin insanların duygusal süreçlerinin yorumlanmasında da kullanılmaktadır.

Kesirli türevli diferansiyel, türev ve integralin tam olmayan (keyfi) mertebelere genişletilmiş bir halidir. Kesirli diferansiyel denklem çözümlerini elde etmek için kesirsel türev ve kesirsel integral hesaplamalarının bilinmesi gerekir(Podlubny 1999). Literatürdeki kesirli türevli diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunması için uygulanan yöntemler ve bunların sonucunda elde edilen tam çözümlerin bütün yönleriyle anlaşılması oldukça önemlidir. Uygulamalı matematik alanında çalışan bilim insanları analitik ve nümerik yöntemlerin geliştirilmesi adına uzun yıllar araştırma yapmışlardır. Bu araştırmalar halen günümüzde de yeni yöntemlerin geliştirilmesi adına devam etmektedir. Geliştirilen analitik ve nümerik yöntemler ile bulunan çözümler, ele alınan farklı matematiksel problemlerin anlaşılmasına ve yorumlanmasına katkı sağlamaktadır. Lineer olmayan herhangi bir değişkene bağlı türev barındıran matematiksel problemlerin integrallenebilir olup olmaması geliştirilen yöntemlere göre farklılık göstermektedir. Bu nedenle denklemler için önerilen genel anlamda bir yöntem bulunmamaktadır. Genellikle son yıllarda dolaylı yöntemler sayesinde kesirli türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin bulunması mümkün hale gelmiştir. Herhangi bir çözüme sahip olmayan kesirli türevli diferansiyel denklemlerin nümerik yaklaşımlarla çözümleri ile soliton teorisindeki önemli bir role sahip dalga kavramını veren hareketli dalga çözümlerinin araştırılması önem arz etmektedir.

Literatürde pek çok farklı türde kesirli türev operatörü tanımlanmıştır, bunlardan bazıları yerel olmayan kesirsel türev Caputo türevi(Podlubny, 1999), Riemann-Liouville türevi (Metzler ve Klafter, 2000), Caputo-Fabrizio (Caputo ve Fabrizio 2015), Jumarie'nin değiştirilmiş Riemann Liouville türevi (Jumarie, 2006), Atangana- Baleanu türevi (Atangana ve Baleanu, 2016). Bu türev operatörlerin yardımıyla lineer olmayan kesirli türevli kısmi diferansiyel denklemlerin, yaklaşık ve kesin çözümlerini sağlayan çeşitli teknikler geliştirilmiştir. Bu yöntemler alt denklem yöntemi (Zhang ve Zhang, 2011) ilk integral yöntemi (Lu, 2012), genişletilmiş deneme denklem yöntemi (Pandır vd., 2013), değiştirilmiş deneme denklemi yöntemi (Pandır vd., 2013), varyasyonel yineleme yöntemi (Das vd., 2016), yerel kesirli Adomian ayrıştırma yöntemi gibi (Yang ve Zhang, 2012), Laplace dönüşümleri (Jafari ve Jassim, 2015), yerel kesirli Fourier serileri yöntemi (Hu vd., 2012), sonlu farklar yöntemi (Gao vd., 2012), sonlu elemanlar yöntemi (Deng, 2008) vb. olarak verilebilir.

2014 yılında (Khalil vd., 2014) uyumlu(conformable) türev adı verildikleri yeni bir kesirli türev tanımlanmış ve daha sonra bu türevi kullanarak elde edilen zaman-ısı diferansiyel denkleminin tam çözümleri elde edilmiştir (Cenesiz ve Kurt, 2014). Öte yandan, Atangana ve ark. uyumlu türev konusunda bazı tanımları, teoremleri ve bu türeve ait özellikleri ifade etmişlerdir. (Atangana vd., 2015). Atangana ve ark. tanımladıkları tanım teoremler ve özelliklerin kullanımı ile bazı uygulamalar yapılmıştır (Çenesiz vd., 2016; Chung, 2015). Son olarak, 2016 yılında Atangana ve ark. beta-türev adını verdikleri kesirli bir türevin yeni bir tanımını verdi (Atangana vd., 2016).

Bu tez çalışmasının temel amacı 2016 yılında Atangana ve ark. tarafından önerilen kesirsel türevi içeren denklemleri incelemektir. İlk kez Atangana'nın uyumlu türevini içeren Hunter Saxton, Sharma-Tasso-Olver, uzay-zaman kesirli değiştirilmiş Benjamin-Bona Mahony ve zaman kesirli Schrödinger denklemlerinin tam çözümleri birinci integral yöntemiyle elde edilmiştir (Martinez vd., 2018). Daha sonra Martinez ve Aguilar, Atangana'nın uyumlu türevini içeren uzay-zaman uyumlu genelleştirilmiş Hirota Satsuma-KdV denklem sistemi, birleştirilmiş mKdV denklemi, lineer olmayan uzay-zaman rezonans Schrödinger denklemlerinin tam çözümlerini oluşturmak için kesirli alt denklem yöntemini uygulamışlardır(Martınez ve Aguilar, 2018; Martınez ve Aguilar, 2021). Ghanbari ve Aguilar, beta(uyumlu) zaman türevli Radhakrishnan-Kundu-Lakshmanan

denklemi için genelleştirilmiş üstel rasyonel fonksiyon yöntemini ele aldılar ve tam çözümlerini elde etmişlerdir(Ghanbari veAguilar, 2019).

Bu tez çalışmamızda 2008 yılında Wang ve ark. tarafından önerilen G'/G yöntemi ve bu yöntemin daha sonraki yıllarda geliştirilen farklı versiyonları incelenmiştir(Wang vd. 2008). Daha sonraki yıllarda birçok kısmi türevli diferansiyel denklemlerin tam çözümlerin elde edebilmek için bu yöntem ve farklı versiyonları kullanılmıştır. Biz çalışmamızda Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini elde etmeye çalışacağız. Bunun için G'/G yönteminin farklı ve yeni bir versiyonu olan yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemini ilk kez Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemlere uygulayacağız. Böylece Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin yeni tam çözümlerini elde etmeye çalışacağız. Bu sayede elde edilen yeni tam çözümlerin lineer olmayan Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümler sınıfına yenilik getireceği düşüncesindeyiz.

Bu tez çalışmasında, yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemini sırasıyla Atangana(beta) kesirsel türevi içeren lineer olmayan Sharma-Tasso-Olver (STO) denklemine ve Atangana(beta) kesirsel türevi içeren Boussinesq denklemine uygulanmıştır. Bu yöntemde için kullanılan hareketli dalga dönüşümü sayesinde denklem adi diferansiyel denkleme indirgenir. Denklemlerin tam çözümlerini (karanlık soliton, aydınlık soliton, singüler soliton) bulmak için tasarlanan algoritmalara göre oluşturulan kodlar Mathematica 10 paket programında çalıştırılmıştır. Elde edilen tam çözümlerin kontrolü yine Mathematica 10 paket programında yapılmış ve ele alınan denklemlerin karanlık soliton, aydınlık soliton, singüler soliton çözümleri ve yeni çözümleri belirtilmiştir. Elde edilen çözümlerin farklı $\alpha = 0.09,\ 0.60,\ 1$ değerlerine göre üç boyutlu grafikleri çizilmiş ve fiziksel özelliklerinin daha iyi anlaşılması sağlanmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde Atangana(beta) kesirsel türevi içeren lineer olmayan Sharma-Tasso-Olver (STO) denklemi ve Atangana(beta) kesirsel türevi içeren Boussinesq denklemlerinin tanımları, kullanım alanları anlatılmış ve bu denklemlerin yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemine göre elde edilen karanlık soliton, aydınlık soliton, singüler soliton çeşitleri ifade edilmiştir. Sonuç ve öneriler bölümünde ise yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemine göre elde edilen çözümlerin ele alınan denklemlerin

diğer yöntemlerle elde edilen çözümleriyle karşılaştırılması yapılmış ve yeni ve farklı çözümler belirtilmiştir.

2.GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Tanımlar

Bu bölümde Atangana(Beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemler ve soliton kavramı ile ilgili temel tanımlar ve özellikler verilmiştir.

2.2. Atangana(Beta) Kesirsel Türev İçeren Kısmi Diferansiyel Denklemler

Doğada gerçekleşen olayları anlamamızı sağlayan kurallar olayların meydana gelme şekilleriyle ilişkilidir. Diferansiyel kavramı değişkendeki değişimin değişime oranından ortaya çıkan bir kavramdır. Diferansiyel denklem ise doğada karşılaşılan birçok fiziksel olayın matematiksel algoritmalara göre modellenmesi ile oluşan denklemlerdir. Mühendislik, fizik, biyoloji, psikoloji, doğa ve ekonomi bilimlerinde karşılaşılan problemlerin modellenmesi ile meydana gelen diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesi gerekir. Diferansiyel denklemler, fiziksel olayların anlaşılmasını sağlamak için çeşitli çözüm yöntemleri ile daha anlaşılır hale getirir. 1695 yılında günümüze kadar farklı kesirli türev içeren diferansiyel denklemler tanımlanmıştır. Son yıllarda kesirli türev içeren diferansiyel denklemler bilim insanları yoğun bir ilgi göstermiştir. Bunlardan önemli olan ikisini tanım ve özellikleri aşağıda belirtilmiştir.

Tanım 2.1: Khalil vd.'nin 2014 yılındaki makalesine göre comformable(uyumlu) türev olarak isimlendirilen türevin yeni bir tanımı, $k:[0,\infty)$ β - ıncı mertebeden bir fonksiyon olsun, $k(t)$'nin comformable(uyumlu) türevi her $t>0$, $\beta\in(0,1)$ açık aralığı için

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\{k(t)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{k\left(t+\varepsilon t^{1-\beta}\right)-k(t)}{\varepsilon} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Eğer k bazı $(0,b)$ açık aralığında β - diferansiyellenebilir $b>0$ ve $\lim_{\varepsilon\to 0^{+}} k^{(\beta)}(t)$ var ise bu durumda $k^{\beta}(0)=\lim_{\varepsilon\to 0}k^{\beta}(t)$ şeklinde tanımlanır(Khalil vd., 2014).

Tanım 2.2: Atangana ve ark. tarafından 2016 yılında önerilmiş Atangana(beta) türev

$$ {}_{0}^{A}D_{t}^{\beta}\{k(t)\}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{k\left(t+\varepsilon\left(t+\frac{1}{\Gamma(\beta)}\right)^{1-\beta}\right)-k(t)}{\varepsilon} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan yola çıkararak Atangana(beta) türeve ait özellikler aşağıda belirtilmiştir(Atangana vd., 2016).

(I) Varsayılır ki $a \neq 0$ ve k, $\beta \in (0,1]$ için β-diferansiyellenebilir iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ilişkiler sağlanmaktadır(Atangana vd., 2016). Her a ve b reel sayıları için

$$ {}_0^A D_x^\beta \{ak(x)+br(x)\} = a\,{}_0^A D_x^\beta k(x) + b\,{}_0^A D_x^\beta r(x) \tag{2.3} $$

(II) Herhangi bir c sabiti için

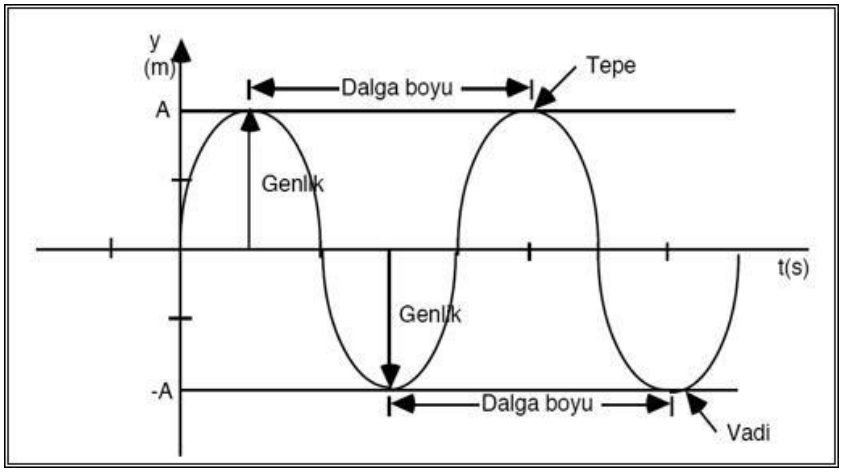
$$ {}_0^A D_x^\beta \{c\} = 0 \tag{2.4} $$

(III)
$$ {}_0^A D_x^\beta \{k(x).r(x)\} = r(x)\,{}_0^A D_x^\beta \{k(x)\} + k(x)\,{}_0^A D_x^\beta \{r(x)\} \tag{2.5} $$

(IV)
$$ {}_0^A D_x^\beta \left(\frac{k(x)}{r(x)} \right) = \frac{r(x)\,{}_0^A D_x^\beta \{k(x)\} - k(x)\,{}_0^A D_x^\beta \{r(x)\}}{r^2(x)} \tag{2.6} $$

2.3. Çözüm (Dalga) Çeşitleri

Dalga kavramı ile uygulamalı bilimlerdeki birçok olayların ifade edilmesinde karşılaşılır. Dalga belli bir ortamda yayılan enerjinin taşınmasıyla oluşan titreşimdir. Su yüzeyindeki dalgalar, belli ortamda ilerleyen ses dalgaları, deniz dibindeki oluşan dalgalar, ışık demeti şeklindeki parçacıklar ve deprem sırasında meydana gelen sarsıntılar dalgalara örnek olarak verilebilir. Dalganın salınımın sıklığı frekansını iki tepe veya çukur arasındaki uzaklık ise dalga boyunu gösterir. Dalganın sınıflandırılması; dalganın oluşmasına olanak sağlayan titreşimlere göre periyodik veya periyodik olmama şeklindedir. Periyodik dalgalara bir kemandaki nota sesi, periyodik olmayan dalgalara bir patlama sonucu meydana gelen ses örnek olarak verilebilir. Duran ve hareketli olmak üzere iki dalga çeşidi vardır. Sabit bir pozisyonda olup ortamın hareketine ters hareket yapan dalga duran dalga çeşidine, belli iki nokta arasında enerjinin taşınmasıyla hareket eden dalga ise hareketli dalga çeşididir.



Şekil 2.1. Dalga modeli Örneği

1834 yılında İskoç mühendis John Scott Rusell tek dalga hareketini ilk kez gözlemlemiştir. Gözlemlenen bu dalga hareketini sınıflandırmak istediklerinde periyodik olmayan bir dalga olduğu ve şeklini değiştirmediği için ise yayılan bir dalga olduğunu ifade edilmiştir. Daha sonraki yıllarda bu tarz doğa olaylarını modellemek için teorik hesaba gerek duyulmuş ve 1895 yılında Diederik Johannes Korteweg ve öğrencisi Gustav de Vries tarafından soliton teorisinin başlangıcı olarak kabul edilen Korteweg de Vries (KdV) denklemi inşa edilmiştir. KdV denklemi sığ sularda oluşan dalgaların yayılmasını göstermek için tasarlanmış bir modeldir. KdV denklemin en genel hali

$$\varphi_t + 6\varphi\varphi_x + \varphi_{xxx} = 0 \tag{2.7}$$

olarak ifade edilmiştir.

δ, x konumunda t zamanında dalganın yerden uzaklığını göstermek üzere (2.7) denkleminin genel çözümü

$$\varphi(x,t) = \ell \operatorname{sech}^2\left(\delta\left(x - vt\right)\right),\ v = 2\ell = 4\delta^2 \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilmiştir. Ayrıca oluşan dalgaların lineer olmayan özellikte olduğu ifade edilmiştir(Wadati ve Sogo, 1983).

Sahip olduğu şekli, hızı ve enerjisini değişmeden yayılan lineer olmayan dalgalara soliton denir. (Wadati ve Sogo, 1983). Solitonlar her durumda özellikleri muhafaza ederler. Dalgaların birbirleriyle etkileşmesi veya iki dalganın çarpışması sonucunda özellikleri

korunur. Ayrıca fiziksel olayların modellenmesiyle meydana gelen solitonlar lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler ile sistemlerin tam çözümlerinin ifade edilmesinde önemli rol oynarlar. Soliton teorisi en çok uygulamalı matematik ve matematiksel fizikte karşılaşılır. Akışkanlar mekaniğinde, biyolojik sistemlerde ve parçacık fiziğinde karşılaşılan solitonlar teknolojik gelişmeye paralel olarak birçok alanda kendisine uygulama sahası bulmuştur. Özellikle sağlık bilimlerinde karşılaşılan elektromanyetik dalgalar incelendiğinde solitonların oluştuğu gözlemlenmiştir.

3. YÖNTEMLER

Bu bölümde, G'/G yöntemleri detaylı bir şekilde incelenmiş ve bu yöntemin farklı versiyonları tespit edilmiştir. Wang ve ark tarafından önerilen klasik G'/G yöntemi ile yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemi tüm detayları ile anlatılmıştır. Yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G-açılım yöntemleri ile ilgili birçok bilim insanı farklı araştırmalar yapmıştır. Bu yöntem ilk kez bu çalışmada Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemlerine uygulanmış ve farklı tam çözümler elde edilmiştir.

3.1. G'/G Yöntemi

Bu bölümde, 2008 yılında M. Wang, X. Li ve J. Zhang tarafından tanımlanan ve birçok bilim insanı tarafından kabul görmüş ve çok sayıda lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denkleme uygulaması yapılmış G'/G yöntemi anlatılmıştır (Wang vd. 2008). Bağımsız değişkenler x ve t olmak üzere Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemini

$$S\left(\phi, {}_0^A D_t^\alpha \phi, {}_0^A D_x^\alpha \phi, {}_0^A D_t^{2\alpha} \phi, {}_0^A D_x^{2\alpha} \phi, ...,\right) = 0 \quad (0 < \alpha \leq 1) \tag{3.1}$$

şeklinde ele alalım. (3.1) denklemini lineer olmayan adi diferansiyel denkleme indirgenme yapabilmek için öncelikle hareketli dalga dönüşümünü kullanmalıyız. Bunun için τ, λ sabitleri, S' de $\phi(x,t)$ nin bir polinomunu göstermek üzere

$$\phi(x,t) = \phi(\xi), \qquad \xi = \frac{\tau}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + \frac{\lambda}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha \tag{3.2}$$

hareketli dalga dönüşümü ele alınır. (3.2)'de ele alınan dalga dönüşümü (3.1)'deki Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denklemine uygulandığında

$$K\left(\phi, \phi', \phi'', \phi''', ...\right) = 0 \tag{3.3}$$

lineer olmayan bir adi diferansiyel denklem elde edilir. (3.3) adi diferansiyel denklemi için Wang ve arkadaşlarının önerdiği çözüm fonksiyonu $G=G(\xi)$, λ ve μ keyfi parametre olmak üzere,

$$G''+\lambda G'+\mu G=0 \tag{3.4}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemin çözümünden elde edilen $G=G(\xi)$ çözüm fonksiyonlarına göre oluşturulan

$$\phi(\xi)=\sum_{i=-m}^{m} a_i\left(\frac{G'}{G}\right)^i \tag{3.5}$$

şeklindedir. Bu yöntemin uygulamasının yapılabilmesi için, ilk önce (3.5) denklemindeki m sabitinin ifadede bulunan en yüksek mertebeden türev içeren terim ile lineer olmayan en yüksek dereceden terim arasındaki balans işlemine göre belirlenmesidir. Daha sonra (3.4) diferansiyel denkleminde yer alan λ ve μ parametrelerinin farklı durumları göz önünde bulundurularak, çözüm fonksiyonunun farklı durumları bulunmaktadır. Bu farklı durumlara dikkate alındığında denklemin rasyonel, trigonometrik ve hiperbolik çözüm fonksiyonlarına sahip olduğu görülmektedir. (3.4) diferansiyel denkleminden elde edilen, bu durumlar aşağıda belirtilmiştir (Wang vd. 2008).

Durum 1: Eğer λ^2-4μ>0 ve A_1, A_2 birbirinden farklı iki keyfi sabit sayı olmak üzere, rasyonel hiperbolik fonksiyon çözümü

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)=\frac{\sqrt{\lambda^2\text{-}4\mu}}{2}\left(\frac{A_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2\text{-}4\mu}}{2}\xi\right)+A_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2\text{-}4\mu}}{2}\xi\right)}{A_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2\text{-}4\mu}}{2}\xi\right)+A_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2\text{-}4\mu}}{2}\xi\right)}\right)-\frac{\lambda}{2} \tag{3.6}$$

şeklinde elde edilir.

Durum 2: Eğer λ^2-4μ<0 ise rasyonel trigonometrik fonksiyon çözümü

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)=\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\left(\frac{-A_1\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)+A_2\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)}{A_1\cos\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)+A_2\sin\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}\xi\right)}\right)-\frac{\lambda}{2} \tag{3.7}$$

şeklinde bulunur.

Durum 3: Eğer λ^2-4μ=0 ise rasyonel fonksiyon çözümü

$$\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)=\frac{A_2}{A_1+A_2\xi}-\frac{\lambda}{2} \tag{3.8}$$

olarak elde edilir. Ayrıca yukarıdaki durumlar sabitlerin birbirlerine göre özel halleri dikkate alındığında daha sade olarak da yazılabilir.

(3.4) denkleminden bulunan $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ fonksiyon çözümleri sırasıyla (3.5)'de yerine yazılır. Daha sonra $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ ifadelerin aynı dereceden katsayıları bir araya getirilerek, (3.3) denklemi $\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)$ ifadelerinden oluşan bir polinom denklemi elde edilir. Elde edilen polinom denkleminin bütün katsayıları sıfıra eşitlenip, cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Oluşan cebirsel denklem sistemi farklı yöntemler kullanılarak Mathematica paket programı tarafından çözüldüğünde a_i $(i=1,2,3,...,m)$ ve τ,λ katsayıları bulunur. Bulunan bu katsayılar (3.5) çözüm fonksiyonunda yerine yazılıp λ ve μ parametrelerinin farklı durumuna göre rasyonel, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyon çözümleri elde edilir. Ters dönüşüm yardımıyla Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümleri elde edilmiş olur.

3.2. Yeni Versiyon Genelleştirilmiş G'/G Yöntemi

Bu bölümde klasik G'/G yönteminden hareketle geliştirilen yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemi sayesinde Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denkleminin yeni tam çözümlerin elde edilmesi hedeflenmiştir. Bu yeni yöntem ile farklı soliton çözümlerin elde edilmesi hedeflenmiştir. Yeni tam çözümleri elde edebilmek için (3.2) ifadesinde yer alan hareketli dalga dönüşümü (3.1) ile tanıtılan lineer olmayan Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denkleme uygulandığında (3.3)'deki gibi bir lineer olmayan adi diferansiyel denklem bulunur. (3.3) denkleminin

çözüm fonksiyonunu yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemine göre $\sigma=\pm 1,\ \gamma\neq 0$ ve N pozitif bir tamsayıyı göstermek üzere

$$\phi(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{N}\left(a_i\left(\frac{G'}{G}\right)^{i}+b_i\left(\frac{G'}{G}\right)^{i-1}\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^{2}\right)}+c_i\left(\frac{G'}{G}\right)^{-i}+d_i\frac{\left(\frac{G'}{G}\right)^{-i+1}}{\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^{2}\right)}}\right) \tag{3.9}$$

ele alalım. (3.9) ifadesinde yer alan a_0,a_i,b_i,c_i,d_i $(i=1,2,\ldots,N)$ katsayıları bulunması gereken katsayılar olup, uygulayacağımız yönteme göre belirlenecektir. (3.9) çözüm fonksiyonunda yer alan $G=G(\xi)$ fonksiyonu ise $\mu\neq 0$ bir katsayı sabiti belirtmek üzere

$$G''+\mu G=0 \tag{3.10}$$

şeklindeki sabit katsayılı ikinci mertebeden diferansiyel denklemin bir çözümüdür. (3.10) denklemindeki $\mu\neq 0$ katsayı sabitinin farklı durumlarına göre (3.10) denkleminin çözüm fonksiyonu da farklılaşmaktadır. Bunlar dikkate alındığında farklı μ .değerleri için;

Durum 1: A_1, A_2 birbirinden farklı iki keyfi sabit sayı ve eğer μ<0 ise, (3.10) denkleminden bulunan rasyonel hiperbolik $G(\xi)$ fonksiyon çözümü

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}=\sqrt{-\mu}\left(\frac{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi\right)}{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi\right)}\right) \tag{3.11}$$

şeklindedir.

Durum 2: Eğer $\mu>0$ ise bu takdirde rasyonel trigonometrik fonksiyon çözümü

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}=\sqrt{\mu}\left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\xi\right)-A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\xi\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\xi\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\xi\right)}\right) \tag{3.12}$$

şeklinde yazılır.

Durum 3: Eğer $\mu = 0$ ise rasyonel fonksiyon çözümü

$$\frac{G'(\xi)}{G(\xi)} = \frac{A_1}{A_1\xi + A_2} \tag{3.13}$$

şeklinde bulunur. (3.9) denkleminde yer alan pozitif N sayısını belirleyebilmek için, (3.3) denkleminde bulunan en yüksek mertebeden türev içeren terim ile lineer olmayan en yüksek dereceden terim arasında balans işlemi uygulanır. Bulunan N sayısını yerine yazılır ve böylece (3.9) çözüm fonksiyonu belirlenmiş olur. Daha sonra (3.10) denkleminden farklı μ .değerlerine göre belirlenmiş $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ ifadeleri sırasıyla (3.9) çözüm fonksiyonunda yerine yazılır. Bu terimlerin hepsi aynı dereceden $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k \sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ ifadeleriyle bir araya getirildiğinde aynı tarz terimlerden oluşan bir polinom elde edilir. $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k \sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ ifadelerinin her birinin katsayıları sıfıra eşitlenerek iki farklı cebirsel denklem sistemi oluşur. Bu cebirsel denklem sistemlerinin ilgili yönteme göre Mathematica paket programı yardımıyla ortak olarak çözülmesi sonucunda elde edilmesi gereken $a_0, a_i, b_i, c_i, d_i \ (i = 1,2,3,...,N)$ ve τ, λ katsayıları hesaplanır. Hesaplanan bu katsayılar (3.9)'da belirtilen $\phi(\xi)$ çözüm fonksiyonunda yerine yazılır ve farklı μ parametre değerlerine yeni rasyonel, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyon çözümleri bulunur. (3.2)'deki hareketli dalga dönüşümüne göre ilgili katsayılar yerine yazılarak (3.1)'de belirtilen Atangana(beta) kesirsel türev içeren kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümleri elde edilir.

4. BULGULAR

Bu bölümde Atangana(beta) kesirsel türevi içeren lineer olmayan Sharma-Tasso-Olver denklemi ile Boussinesq denklemi incelenmiş ve bu denklemlere yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemi ilk kez uygulanmıştır. Bu yöntem ile her iki denkleminde literatürde yer almayan yeni tam çözümleri elde edilmiştir.

4.1.Atangana(beta) Kesirsel Türev İçeren Lineer Olmayan Sharma-Tasso-Olver Denklemi ve Uygulaması

Literatürde farklı türden kesirsel mertebeden türevler bulunmaktadır. Bunlardan bir tanesi Atangana(beta) kesirsel türevidir. Atangana(beta) kesirsel türevi içeren lineer olmayan Sharma-Tasso-Olver (STO) denklemi a keyfi bir sabit ve α beta kesirsel türevin mertebesini gösteren bir parametre olmak üzere

$$ {}_0^A D_t^\alpha \phi + 3a\left({}_0^A D_x^\alpha \phi\right)^2 + 3a\phi^2\, {}_0^A D_x^\alpha \phi + 3a\phi\, {}_0^A D_x^{2\alpha}\phi + a\, {}_0^A D_x^{3\alpha}\phi = 0 \qquad (0<\alpha\le 1) \qquad (4.1) $$

şeklindedir(Martinez vd., 2018; Aniqa ve Ahmad, 2022). Eğer $\alpha = 1$ olarak alınırsa, bu takdirde (4.1) Atangana(beta) kesirsel STO denklemi kısmi türevli STO denklemine indirgenir. Matematiksel fizikte çeşitli durumlarda karşılaşılan x yayılma yönündeki uzaysal koordinatını ve t zamansal koordinatı göstermek üzere $\phi(x,t)$ bir alan değişkenidir.

Kesirsel STO denklemi, bilim ve mühendislik alanında çok önemli bir role sahip bir denklemdir. Topolojik veya şok dalgalı soliter dalga çözümleri lineer olmayan kesirsel STO denklemleri tarafından elde edilir. Kesirsel mertebeden STO denklemi, ilk olarak Kupershmidt tarafından lineer olmayan denklemlerde karanlık denklemler kavramı olarak temsil edilen gerçek fiziksel model fisyon ve füzyonu tanımladı (Aniqa ve Ahmad, 2022).

Dağıtıcı ${}_0^A D_x^{3\alpha}\phi$ terimi, küçük ölçeklerde sönümleme sağlar iken lineer olmayan $\phi^2\, {}_0^A D_x^\alpha \phi$ terimi ise büyük ve küçük ölçekler arasında enerji aktarımının sağlayan terimdir.

(4.1) denkleminin tam çözümlerini elde edilmesini sağlayan yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemini uygulayabilmek için önce hareketli dalga dönüşümünü

$$\xi = \frac{k}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} \tag{4.2}$$

ele alalım. (4.2) hareketli dalga dönüşümü altında (4.1) denklemi $\phi = \phi(\xi)$, $\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \phi'$ olmak üzere

$$\lambda\phi' + 3ak^2(\phi')^2 + 3ak\phi^2\phi' + 3ak^2\phi\phi'' + ak^3\phi''' = 0 \tag{4.3}$$

denklemine indirgenir. (4.3) denklemi ξ ye göre bir kez integre edilip integrasyon sabiti de sıfır olarak seçilirse, bu takdirde lineer olmayan 2. mertebeden bir adi diferansiyel denkleme

$$\lambda\phi + 3ak^2\phi\phi' + ak\phi^3 + ak^3\phi'' = 0 \tag{4.4}$$

indirgenir. Bir önceki bölümde yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemine göre önerilen (3.9) çözüm fonksiyonu (4.4) denklemine uygulanmadan önce balans işlemi yapılmalıdır. Balans işlemi (4.4) te bulunan en yüksek mertebeden türev içeren ϕ'' terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan ϕ^3 terimleri arasında yapılır. (3.9) çözüm fonksiyonu ve $G'' + \mu G = 0$ dikkate alınarak balans işlemi aşağıda belirtildiği yapılır. Çözüm fonksiyonunun maksimum terimi

$$\phi(\xi) = a_N\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^N + \ldots \tag{4.5}$$

olarak alınır ve (4.4) denkleminde yer alan balans terimlerine göre sırasıyla

$$\phi^3(\xi) = a_N^3\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{3N} + \ldots \tag{4.6}$$

$$\phi''(\xi) \cong N(N+1)a_N\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{N+2} + \ldots \tag{4.7}$$

yazılır. $\phi'' \approx \phi^3$ balans terimlerinin denkliğinin hesabından $N=1$ olarak elde edilir. Bulunan bu balans terimi (3.9) denkleminde yerine yazılırsa (4.1) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$\phi(\xi) = a_0 + a_1\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) + b_1\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2\right)} + c_1\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{-1} + \frac{d_1}{\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2\right)}} \tag{4.8}$$

olarak ifade edilir. (4.8) çözüm fonksiyonundan hareketle (4.4) denkleminde yer alan ilgili türevler hesaplanır. Buradaki ϕ'' terimi

$$\begin{aligned}\phi''(\xi) = {} & a_1\left(2\mu\left(\frac{G'}{G}\right)+2\left(\frac{G'}{G}\right)^3\right) + b_1\frac{\frac{2\sigma^2}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^6+\left(\frac{3\sigma^2\gamma+2\sigma^2\mu}{\gamma}\right)\left(\frac{G'}{G}\right)^4+4\sigma^2\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^2+\sigma^2\mu^2}{\gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)^{3/2}} \\ & + c_1\left(2\mu\left(\frac{G'}{G}\right)^{-1}+2\mu^2\left(\frac{G'}{G}\right)^{-3}\right) + d_1\frac{\left(\frac{2\sigma^2\mu-3\sigma^2\gamma}{\gamma}\right)\left(\frac{G'}{G}\right)^4+\left(\frac{2\sigma^2\mu^2-4\sigma^2\gamma\mu}{\gamma}\right)\left(\frac{G'}{G}\right)^2-\sigma^2\mu^2}{\gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)^{5/2}}\end{aligned} \tag{4.9}$$

olarak hesaplanır. Hesaplanan ilgili türevler ve diğer terimler (4.4) denkleminde yerine yazıldığında aynı dereceden $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ ifadelerin katsayıları bir araya getirildiğinde (4.4) denklemi $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ ifadelerinden oluşan bir polinom elde edilir. Oluşan bu polinomun aynı ifadeli katsayılar sıfıra eşitlenir. Böylece farklı iki cebirsel denklem sistemi meydana gelir. İlgili yöntemler kullanılarak Mathematica paket programı yardımıyla oluşan cebirsel denklem sistemleri beraberce çözüldüğünde bulunması gereken $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1, k, \lambda$ ilgili katsayıları elde edilir. Bu katsayıların farklı durumları aşağıdaki durumlarda belirtilmiştir. Bu katsayılar ve ξ dönüşümüne göre (4.4) çözüm fonksiyonu μ parametresinin farklı durumları da dikkate alınarak $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$ göre yerine yazılır. Böylece (4.1) Atangana(beta) kesirsel türevi içeren

lineer olmayan Sharma-Tasso-Olver (STO) denkleminin elde edilen durumlara göre ilk kez yeni tam çözümleri aşağıdaki durumlarda belirtilmiştir.

Durum 1:

$$a_0 = c_1 = d_1 = 0, \quad a_1 = 1, \quad b_1 = i\sqrt{\frac{\lambda}{a\sigma}}, \quad \gamma = \mu = -\frac{\lambda}{a} \tag{4.10}$$

bulunan katsayılara göre (4.8)'deki çözüm fonksiyonu

$$\phi_1(\xi) = a_1\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) + b_1\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^2\right)} \tag{4.11}$$

şekline dönüşür. (4.11) çözüm fonksiyonu ile μ parametresinin farklı değerlerine göre (4.1)'deki Atangana(beta) kesirsel türevi içeren lineer olmayan Sharma-Tasso-Olver (STO) denkleminin tam çözümleri aşağıdaki belirtildiği gibi elde edilir.

i.) Eğer $\mu < 0$ olarak alınırsa rasyonel hiperbolik fonksiyon çözümü

$\xi_1 = \frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}$ olmak üzere

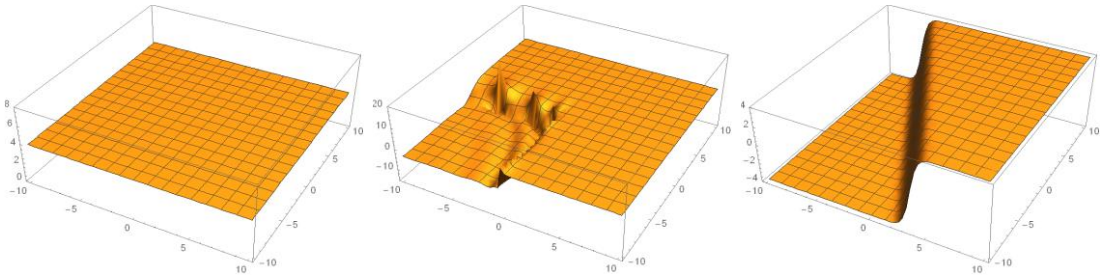
$$\phi_1(x,t) = \sqrt{\frac{\lambda}{a}}\left(\frac{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}\right) + i\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\sqrt{1-\left(\frac{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}\right)^2} \tag{4.12}$$

şeklinde elde edilir. Eğer (4.12) çözüm fonksiyonunda sırasıyla $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak kabul edilirse karanlık(dark) soliton çözümleri gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $D_1 = \frac{\sqrt{a\lambda}}{a}$

$$\phi_{1,1}(x,t) = D_1\left(\coth\left[\frac{k}{\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{\alpha\sqrt{a}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] - i\operatorname{cosec}h\left[\frac{k}{\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{\alpha\sqrt{a}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.13}$$

$$\phi_{1,2}(x,t) = D_1\left(\tanh\left[\frac{k}{\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{\alpha\sqrt{a}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] + i\sec h\left[\frac{k}{\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{\alpha\sqrt{a}}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.14}$$

elde edilir.



Şekil 4.1. $a=0.25,\ \lambda=0.12,\ k=0.5$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.14) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi.

ii.) Eğer $\mu>0$ olarak alındığında rasyonel trigonometrik fonksiyon çözüm

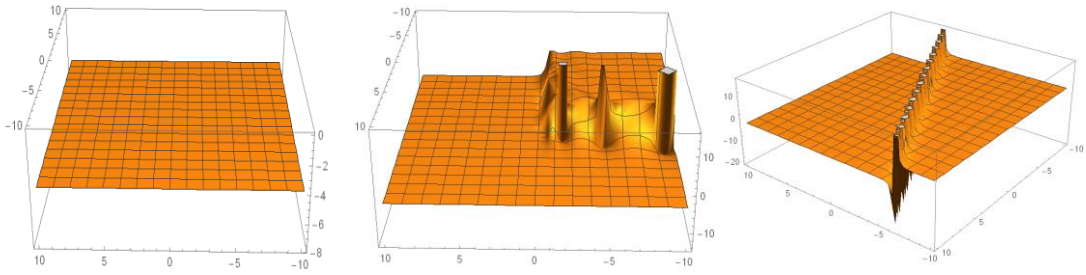
$$\phi_2(x,t)=i\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)-A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)}\right)+i\sqrt{\frac{\lambda}{a}}\sqrt{1+\left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)-A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)}\right)^2} \tag{4.15}$$

olarak bulunur. Eğer sırasıyla (4.15) çözüm fonksiyonunda $A_1=0$ ve $A_2=0$ şeklinde seçilirse singüler soliton çözümleri $D_2=i\dfrac{\sqrt{a\lambda}}{a}$

$$\phi_{2,1}(x,t)=D_2\left(\sec\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]-\tan\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.16}$$

$$\phi_{2,2}(x,t)=D_2\left(\cot\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]+\operatorname{cosec}\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.17}$$

bulunur.



Şekil 4.2. $a=0.25,\ \lambda=0.12,\ k=0.5$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.16) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi.

iii.) $\mu = 0$ olarak seçilirse rasyonel fonksiyon çözümü

$$\phi_3(x,t) = \frac{A_1}{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right) + A_2} + i\sqrt{\frac{\lambda}{a} - \left(\frac{A_1}{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right) + A_2}\right)^2} \tag{4.18}$$

şeklinde elde edilir.

Durum 2:

$$a_0 = a_1 = b_1 = d_1 = 0, \quad c_1 = \frac{\lambda}{a}, \quad \mu = -\frac{\lambda}{a} \tag{4.19}$$

elde edilen katsayılara göre (4.8) çözüm fonksiyonu

$$\phi_4(\xi) = \frac{\lambda}{a}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{-1} \tag{4.20}$$

olarak bulunur. (4.20) çözüm fonksiyonu ile farklı μ parametrelerine göre (4.1)'deki Atangana(beta) kesirsel türevli (STO) denkleminin tam çözümleri aşağıdaki gibi bulunur.

i.) $\mu < 0$ olduğunda ise

$$\phi_4(x,t) = \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{a\sqrt{a}}\left(\frac{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right) + A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right) + A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}\right) \tag{4.21}$$

şeklinde rasyonel hiperbolik fonksiyon çözümü bulunur. (4.21) çözüm fonksiyonunda sırasıyla $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse, bu takdirde karanlık(dark) soliton çözümleri $D_3 = \frac{\lambda\sqrt{a\lambda}}{a^2}$ olmak üzere

$$\phi_{4,1}(x,t) = D_3\tanh\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.22}$$

$$\phi_{4,2}(x,t) = D_3\coth\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.23}$$

bulunur.

ii.) $\mu > 0$ olduğunda ise rasyonel trigonometrik fonksiyon çözümü

$$\phi_5(x,t) = i\frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{a\sqrt{a}}\left(\frac{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)}{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)-A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)}\right) \tag{4.24}$$

şeklinde elde edilir. (4.24) çözüm fonksiyonunda sırasıyla $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilmesi durumda ise singüler soliton çözümleri $D_4 = i\frac{\lambda\sqrt{a\lambda}}{a^2}$ olmak üzere

$$\phi_{5,1}(x,t) = D_4\cot\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.25}$$

$$\phi_{5,2}(x,t) = D_4\tan\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.26}$$

elde edilir.

iii.) $\mu = 0$ olduğunda ise rasyonel fonksiyon çözümü $D_5 = \frac{\lambda}{a}$ olmak üzere

$$\phi_6(x,t) = D_5\frac{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\lambda}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)+A_2}{A_1} \tag{4.27}$$

şeklinde bulunur.

Durum 3:

$$a_0 = b_1 = c_1 = d_1 = 0,\quad a_1 = 2,\ \mu = \frac{-\lambda}{4a} \tag{4.28}$$

bulunan katsayılara göre (4.8) çözüm fonksiyonu

$$\phi_7(\xi) = 2\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) \tag{4.29}$$

şeklinde elde edilir. Farklı μ parametreleri ile (4.29) çözüm fonksiyonu beraber düşünüldüğünde (4.1)'deki belirtilen Atangana(beta) kesirsel türevli (STO) denkleminin tam çözümleri aşağıda belirtildiği gibi elde edilir.

i.) $\mu < 0$ ise rasyonel hiperbolik fonksiyon çözümü

$$\phi_7(x,t) = \frac{\sqrt{a\lambda}}{a}\left(\frac{A_1 \sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right) + A_2 \cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}{A_1 \cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right) + A_2 \sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}\right) \tag{4.30}$$

şeklinde elde edilir. Sadeleştirme yapabilmek için $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak kabul edilirse (4.30) çözüm fonksiyonunun sırasıyla hiperbolik dalga çözümleri $D_6 = \dfrac{\sqrt{a\lambda}}{a}$

$$\phi_{7,1}(x,t) = D_6 \coth\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.31}$$

$$\phi_{7,2}(x,t) = D_6 \tanh\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.32}$$

şeklinde elde edilir.

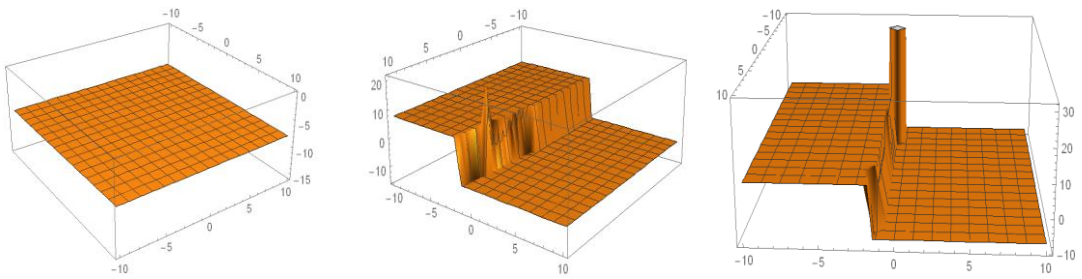
ii.) Eğer $\mu > 0$ olması durumunda ise rasyonel trigonometrik fonksiyon çözümü

$$\phi_8(x,t) = i\frac{\sqrt{a\lambda}}{a}\left[\frac{A_1 \cos\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right) - A_2 \sin\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)}{A_1 \sin\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\mu}\xi_1\right)}\right] \tag{4.33}$$

elde edilir. $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak alınırsa $D_7 = i\dfrac{\sqrt{a\lambda}}{a}$ (4.33) çözüm fonksiyonunun sırasıyla periyodik soliton çözümleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\phi_{8,1}(x,t) = D_7 \tan\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.34}$$

$$\phi_{8,2}(x,t) = D_7 \cot\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.35}$$



Şekil 4.3. $a = 0.25,\ \lambda = 0.12,\ k = 0.5$ ile $\alpha = 0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.34) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi.

iii.) Eğer $\mu = 0$ ise bu takdirde (3.1) denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\phi_9(x,t) = \frac{2A_1}{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right) + A_2} \tag{4.36}$$

Durum 4:

$$a_0 = b_1 = d_1 = 0,\ \ a_1 = 1,\ c_1 = \frac{\lambda}{4a},\quad \mu = \frac{-\lambda}{4a} \tag{4.37}$$

şeklinde hesaplanan katsayılara göre (4.8) çözüm fonksiyonu

$$\phi_{10}(\xi) = \left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right) + \frac{\lambda}{4a}\left(\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}\right)^{-1} \tag{4.38}$$

şeklinde yazılır. (4.38) çözüm fonksiyonu ile farklı değerlere sahip μ parametresine göre (4.1)'de ifade edilen Atangana(beta) kesirsel türevi içeren (STO) denkleminin sırasıyla tam çözümleri aşağıdaki gibidir.

i.) $\mu < 0$ olduğunda hiperbolik fonksiyon çözümü

$$\phi_{10}(x,t) = \frac{\sqrt{a\lambda}}{2a}\left(\frac{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right) + A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right) + A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}\right) + \frac{\lambda\sqrt{a\lambda}}{8a^2}\left(\frac{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right) + A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right) + A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\xi_1\right)}\right)$$

(4.39)

şeklinde oluşur. (4.39) çözüm fonksiyonunu daha sade halde yazabilmek için $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak kabul edilirse $D_8 = \frac{\sqrt{a\lambda}}{2a}$ ve $D_9 = \frac{\lambda\sqrt{a\lambda}}{8a^2}$ olmak üzere sırasıyla karanlık soliton dalga çözümleri

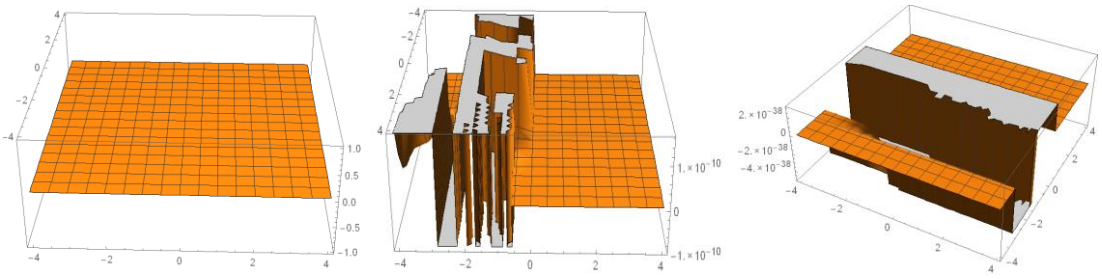
$$\phi_{10,1}(x,t) = D_8\tanh\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] + D_9\coth\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]$$

(4.40)

$$\phi_{10,2}(x,t) = D_8\coth\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] + D_9\tanh\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]$$

(4.41)

gibi elde edilir.



Şekil 4.4. $a=0.25,\ \lambda=0.12,\ k=0.5$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.41) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi.

ii.) $\mu>0$ olması durumunda ise trigonometrik fonksiyon çözümü

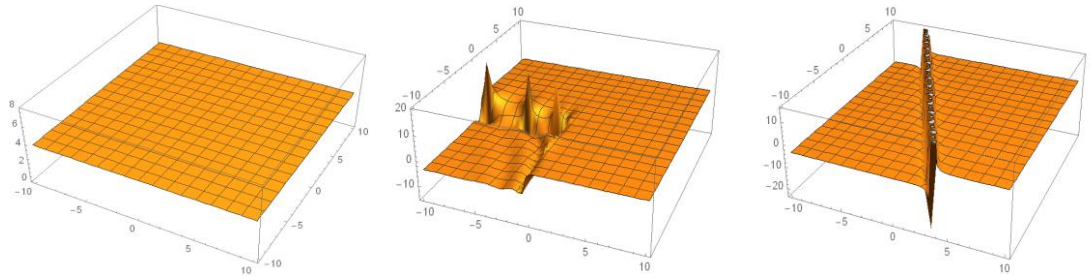
$$\phi_{11}(x,t)=\left[i\frac{\sqrt{a\lambda}}{2a}\left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\xi\right)-A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\xi\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\xi\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\xi\right)}\right)+i\frac{\lambda\sqrt{a\lambda}}{8a^2}\left(\frac{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\xi\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\xi\right)}{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\xi\right)-A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\xi\right)}\right)\right] \tag{4.42}$$

şeklinde elde edilir. Daha sade bir görünüm için (4.42) çözüm fonksiyonunda $A_1=0$ ve $A_2=0$ olarak alınırsa $D_{10}=i\frac{\sqrt{a\lambda}}{2a}$ ve $D_{11}=i\frac{\lambda\sqrt{a\lambda}}{8a^2}$ olmak üzere hareketli dalga çözümleri sırasıyla

$$\phi_{11,1}(x,t)=D_{10}\tan\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]+D_{11}\cot\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.43}$$

$$\phi_{11,2}(x,t)=D_{10}\cot\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]+D_{11}\tan\left[\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{a\lambda}}{2a\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right] \tag{4.44}$$

elde edilir.



Şekil 4.5. $a=0.25,\ \lambda=0.12,\ k=0.5$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.44) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi.

iii.) Eğer $\mu = 0$ ise (4.1)'de ifade edilen Atangana(beta) kesirsel türevi içeren (STO) denkleminin rasyonel fonksiyon çözümü

$$\phi_{12}(x,t) = \frac{A_1}{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\lambda}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)+A_2} + \frac{\lambda}{4a}\left(\frac{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{\lambda}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)+A_2}{A_1}\right) \tag{4.45}$$

şeklinde elde edilir.

Atangana(beta) kesirsel türevi içeren lineer olmayan Sharma-Tasso-Olver (STO) denkleminin yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemine göre elde edilen tüm durumlardaki çözümleri incelendiğinde; 2. durumdaki (4.21), (4.24) ve (4.27) çözümleri sırasıyla Aniqa Aniqa ve Jamshad Ahmad'in elde ettiği (14), (15) ve (16) sonuçları ile benzer olduğu görülmüştür (Aniqa ve Ahmad, 2022). Diğer durumlarda elde edilen tam çözümlerin ise tamamen yeni olduğu ve literatürde bulunmayan tam çözümler olduğu görülmüştür. Buda ele aldığımız yöntemin bu tarz denklemlerin yeni tam çözümleri etmekte faydalı olduğu söylenebilir.

4.2.Atangana(Beta) Kesirsel Türevi İçeren Boussinesq Denklemi ve Uygulaması

Atangana(beta) kesirsel türevi içeren Boussinesq denklemi b, β, λ keyfi bir sabitler ve α beta kesirsel türevin mertebesini göstermek üzere

$${}_0^A D_t^{\alpha}\Upsilon + aD_x^{2\alpha}\Upsilon + \beta D_x^{2\alpha}\left(\Upsilon^2\right) + \lambda D_x^{4\alpha}\Upsilon = 0 \qquad (0 < \alpha \le 1) \tag{4.46}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir (Jebreen, 2020). Burada $\alpha = 1$ alındığında, bu takdirde (4.46) Atangana(beta) kesirsel Boussinesq denklemi kısmi türevli Boussinesq denklemine dönüşür. (4.46) denklemindeki $D_x^{2\alpha}\Upsilon$ düşeyin dikey sapmasını, β ikinci dereceden doğrusal olmama durumunu kontrol eden katsayıyı ve λ malzemenin rijitlik özelliklerine ve sıkıştırmaya bağlı dağılım parametresini göstermektedir (Jafari, 2013; Mohyud-Din ve Bibi, 2017).

Kısmi türevli Boussinesq denklemleri, hidrodinamikte, dalgaların doğrusal olmayan ve enerji tüketen ortamlarda yayılmasını tanımlamak için ortaya çıkmıştır (Jafari, 2013; Bhatter vd., 2020). Daha sonra yıllarda gözenekli yeraltı katmanlarında suyun

sızmasındaki sorunlara anlamak için uygulanmıştır. Kısmi türevli Boussinesq denklemleri kıyı ve okyanus mühendisliğinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Mohyud-Din ve Bibi, 2017; Wen ve. Zheng, 2013). Son zamanlarda, kesirli mertebeden Boussinesq denklemi, heterojen gözenekli ortamlarda su yayılımını incelemek için uygun bir denklemdir. Bir kontrol hacmindeki akışın güç kanunu değişimlerini varsayarak ve bir kesirli Taylor serisi kullanılarak bir kesirli Boussinesq denklemi elde edilir (Xu, 2008).

(4.46) Atangana(beta) kesirsel Boussinesq denkleminin yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemini kullanılarak tam çözümlerini bulmak için ilk olarak hareketli dalga dönüşümünü

$$\vartheta = \frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} - \frac{\omega}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} \tag{4.47}$$

kullanalım.

$\Upsilon = \Upsilon(\vartheta)$, $\frac{\partial \Upsilon}{\partial \vartheta} = \Upsilon'$ olmak üzere, (4.46) denklemi tanımlanan (4.47) dönüşümü altında

$$\left(\omega^2 + bk^2\right)\Upsilon'' + \beta k^2\left(\Upsilon^2\right)'' + \lambda k^4 \Upsilon^{(iv)} = 0 \tag{4.48}$$

şeklinde lineer olmayan 4. mertebeden bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. (4.48) denklemi ϑ ya göre iki kez integre edilip integrasyon sabiti de sıfır olarak kabul edilirse, bu takdirde lineer olmayan 2. mertebeden bir adi diferansiyel denklem

$$\left(\omega^2 + bk^2\right)\Upsilon + \beta k^2 \Upsilon^2 + \lambda k^4 \Upsilon'' = 0 \tag{4.49}$$

elde edilir. Önerilen yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemine göre (3.9) çözüm fonksiyonunu (4.49) denklemine uygulamadan önce balans işlemi yapılır. Balans prosedürü (4.49) te bulunan en yüksek mertebeden türev içeren Υ'' terimi ile en yüksek dereceden lineer olmayan Υ^2 terimleri arasında uygulanır. (3.9) çözüm fonksiyonu ve $G'' + \mu G = 0$ denklemi beraber düşünüldüğünde balans prosedürü aşağıdaki gibi uygulanır. Çözüm fonksiyonunda yer alan maksimum terim

$$\Upsilon(\vartheta) = a_N\left(\frac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)}\right)^N + \ldots \tag{4.50}$$

olarak alınır ve (4.49) denkleminde bulunan balans terimlerine göre sırasıyla

$$\Upsilon^2(\vartheta) = a_N^3 \left(\frac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \right)^{2N} + \ldots \tag{4.51}$$

$$\Upsilon''(\vartheta) \cong N(N+1) a_N \left(\frac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \right)^{N+2} + \ldots \tag{4.52}$$

şeklinde yazılır. $\Upsilon'' \approx \Upsilon^2$ balans terimleri arasında denklik hesabına göre $N = 2$ olarak bulunur. Elde edilen balans terimi (3.9) denkleminde yerine yazıldığında (4.46) denkleminin çözüm fonksiyonu

$$\begin{aligned} \Upsilon(\vartheta) &= a_0 + a_1 \tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} + a_2 \left(\tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \right)^2 + b_1 \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \right)^2 \right)} + b_2 \tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \right)^2 \right)} \\ &+ c_1 \left(\tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \right)^{-1} + c_2 \left(\tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \right)^{-2} + \frac{d_1}{\sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \right)^2 \right)}} + \frac{d_2}{\tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \sqrt{\sigma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\tfrac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)} \right)^2 \right)}} \end{aligned} \tag{4.53}$$

olarak elde edilir. (4.53) çözüm fonksiyonunu kullanarak (4.49) denklemindeki Υ'' türev karşılığı

$$\begin{aligned} \Upsilon''(\vartheta) &= a_1 \left(2\mu \left(\frac{G'}{G} \right) + 2 \left(\frac{G'}{G} \right)^3 \right) + a_2 \left(6 \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + 8\mu \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + 2\mu^2 \right) \\ &+ b_1 \frac{\frac{2\sigma^2}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^6 + \left(\frac{3\sigma^2\gamma + 2\sigma^2\mu}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + 4\sigma^2\mu \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + \sigma^2\mu^2}{\gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{3/2}} \\ &+ b_2 \frac{\frac{6\sigma^2}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^7 + \left(\frac{8\sigma^2\mu + 9\sigma^2\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^5 + \left(\frac{12\sigma^2\mu\gamma + 2\sigma^2\mu^2 + 2\sigma^2\gamma^2}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^3 + \left(3\sigma^2\mu^2 + 2\sigma^2\mu\gamma \right) \left(\frac{G'}{G} \right)}{\gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{3/2}} \\ &+ c_1 \left(2\mu \left(\frac{G'}{G} \right)^{-1} + 2\mu^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^{-3} \right) + c_2 \left(2 + 8\mu \left(\frac{G'}{G} \right)^{-2} + 6\mu^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^{-4} \right) \\ &+ d_1 \frac{\left(\frac{2\sigma^2\mu - 3\sigma^2\gamma}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + \left(\frac{2\sigma^2\mu^2 - 4\sigma^2\gamma\mu}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^2 - \sigma^2\mu^2}{\gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{5/2}} \\ &+ d_2 \frac{\frac{2\sigma^2}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^8 + \left(\sigma^2 + \frac{6\sigma^2\mu}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^6 + \left(4\sigma^2\mu + \frac{6\sigma^2\mu^2}{\gamma} \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^4 + \left(2\sigma^2\mu\gamma + 5\sigma^2\mu^2 \right) \left(\frac{G'}{G} \right)^2 + 2\sigma^2\mu^2\gamma}{\gamma \left(\frac{G'}{G} \right)^3 \left(1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 \right)^{5/2}} \end{aligned} \tag{4.54}$$

olarak elde edilir. Bu hesaplanan terimler (4.49) denkleminde yerine yazılır ve aynı dereceden $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ ifadelerinin katsayıları birleştirilirse (4.49) denklemini $\left(\frac{G'}{G}\right)^k$ ve $\left(\frac{G'}{G}\right)^k\sqrt{\sigma\left(1+\frac{1}{\gamma}\left(\frac{G'}{G}\right)^2\right)}$ ifadelerinden meydana gelen bir polinom elde edilir. Elde edilen bu polinomun bütün katsayıları sıfıra eşitlenirse iki cebirsel denklem sistemi bulunur. Bu sistemler ilgili yöntemler kullanılarak; Mathematica paket programı yardımıyla çözüldüğünde, $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, k, \omega$ katsayıları ile ϑ dönüşümüne göre aşağıdaki durumlar bulunmuştur. Elde edilen katsayılar (4.53) çözüm fonksiyonunda yerine yazılır ve farklı μ parametre değerlerine göre $\frac{G'(\xi)}{G(\xi)}$'ye bağlı tam çözümler bulunur. Böylece (4.46) Atangana(beta) kesirsel türevi içeren Boussinesq denkleminin elde edilen durumlara göre tam çözümleri aşağıdaki durumlarda ifade edilmiştir.

Durum 1:

$$a_0 = -\frac{6k^2\lambda\gamma}{\beta},\ a_2 = -\frac{6k^2\lambda}{\beta},\ a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 0,$$
$$\omega = -k\sqrt{4k^2\gamma\lambda - b},\quad \mu = \gamma \tag{4.55}$$

bulunan katsayılarına göre (4.53) çözüm fonksiyonu

$$\Upsilon_1(\vartheta) = a_0 + a_2\left(\frac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)}\right)^2, \tag{4.56}$$

şeklindedir. (4.56) çözüm fonksiyonu ile farklı μ parametre değerlerine göre (4.46) Atangana(beta) kesirsel türevi içeren Boussinesq denkleminin tam çözümleri aşağıdaki belirtildiği gibi elde edilir.

i.) Eğer $\mu < 0$ ise, bu takdirde rasyonel hiperbolik fonksiyon çözümü

$\vartheta_1 = \frac{k}{\alpha}\left(x + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha + \frac{k\sqrt{4k^2\gamma\lambda - b}}{\alpha}\left(t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^\alpha$ olmak üzere

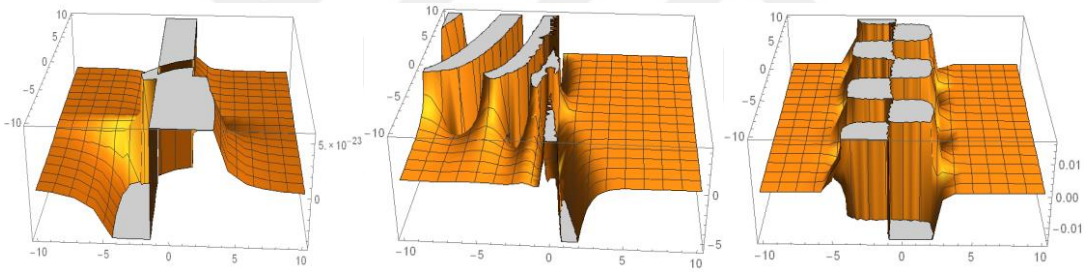
$$\Upsilon_1(x,t)=\frac{-6k^2\lambda\gamma}{\beta}\left[1-\left(\frac{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_1\right)+A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_1\right)}{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_1\right)+A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_1\right)}\right)^2\right] \tag{4.57}$$

şeklinde bulunur. (4.57) çözümünde sadeleştirmek için sırasıyla eğer $A_1=0$ ve $A_2=0$ olarak seçilirse ve $E_1=\dfrac{6k^2\lambda\gamma}{\beta}$ olmak üzere (4.57) çözüm fonksiyonunun aydınlık ve singüler soliton dalga çözümleri

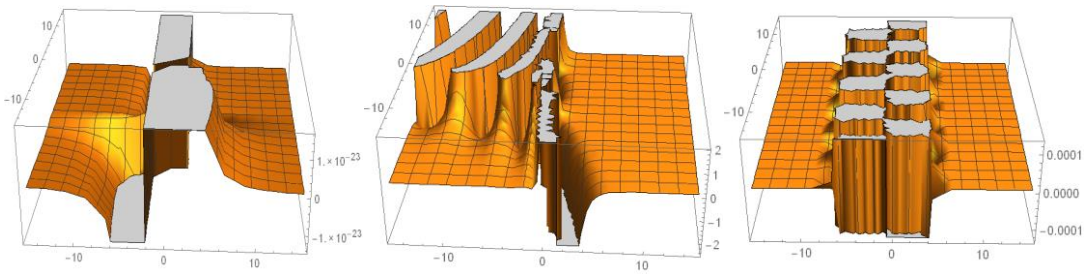
$$\Upsilon_{1,1}(x,t)=-E_1\left(\cos ec\,\mathrm{h}^2\left[\frac{ik\sqrt{\gamma}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{ik\sqrt{4k^2\gamma^2\lambda-b\gamma}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.58}$$

$$\Upsilon_{1,2}(x,t)=E_1\left(\sec\mathrm{h}^2\left[\frac{ik\sqrt{\gamma}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{ik\sqrt{4k^2\gamma^2\lambda-b\gamma}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.59}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.6. $\lambda=0.45,\ \beta=0.32,\ k=0.5,\ \gamma=0.55$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.58) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi.



Şekil 4.7. $\lambda=0.45,\ \beta=0.32,\ k=0.5,\ \gamma=0.55$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.59) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi.

ii.) $\mu>0$ olduğunda ise rasyonel trigonometrik fonksiyon çözümü

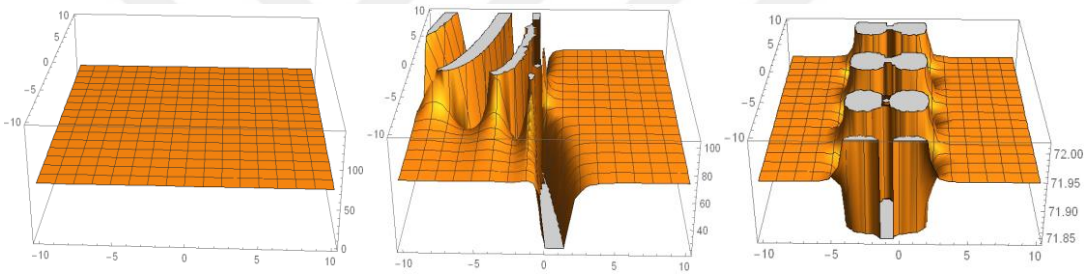
$$\Upsilon_2(x,t)=\frac{-6k^2\lambda\gamma}{\beta}\left[1+\left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\vartheta_1\right)-A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\vartheta_1\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\vartheta_1\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\vartheta_1\right)}\right)^2\right] \tag{4.60}$$

olarak bulunur. (4.60) çözüm fonksiyonunu daha sade halde yazabilmek için eğer $A_1=0$ ve $A_2=0$ olarak alınırsa sırasıyla singüler soliton çözümleri

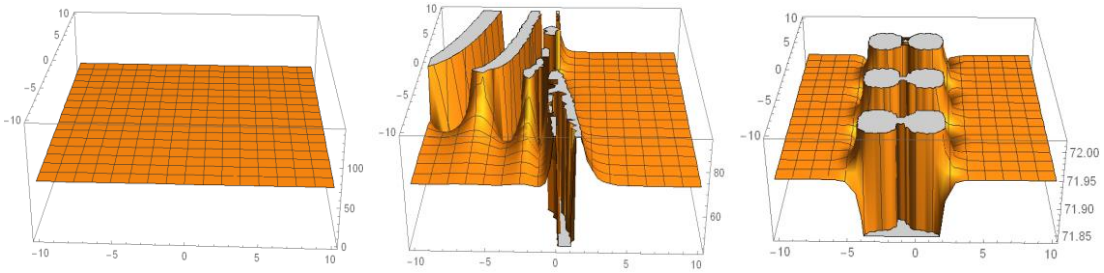
$$\Upsilon_{2,1}(x,t)=-E_1\left(1+\tan^2\left[\frac{k\sqrt{\gamma}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{i\sqrt{4k^2\gamma^2\lambda-b\gamma}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.61}$$

$$\Upsilon_{2,2}(x,t)=-E_1\left(1+\cot^2\left[\frac{k\sqrt{\gamma}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{i\sqrt{4k^2\gamma^2\lambda-b\gamma}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.62}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.8. $\lambda=0.45,\ \beta=0.32,\ k=0.5,\ \gamma=0.55$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.61) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi.



Şekil 4.9. $\lambda=0.45,\ \beta=0.32,\ k=0.5,\ \gamma=0.55$ ile $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$ değerleri için (4.62) çözüm fonksiyonunun üç boyutlu grafik gösterimi.

iii.) $\mu=0$ olması durumunda ise rasyonel fonksiyon çözümü $E_2=\dfrac{-6k^2\lambda}{\beta}$ olmak üzere

$$\Upsilon_3(x,t) = -E_1 + E_2\left(\frac{A_1}{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{4k^2\gamma\lambda - b}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right) + A_2}\right)^2 \tag{4.63}$$

şeklinde elde edilir.

Durum 2:

$$a_0 = \frac{-12k^2\lambda\mu}{\beta},\ a_2 = \frac{-6k^2\lambda}{\beta},\ c_2 = \frac{-6k^2\mu^2\lambda}{\beta}$$
$$a_1 = b_1 = b_2 = c_1 = d_1 = d_2 = 0,\ \omega = -k\sqrt{16k^2\lambda\mu - b} \tag{4.64}$$

belirlenen katsayılara göre (4.53) çözüm fonksiyonu

$$\Upsilon_4(\vartheta) = a_0 + a_2\left(\frac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)}\right)^2 + c_2\left(\frac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)}\right)^{-2} \tag{4.65}$$

bulunur. (4.65) çözüm fonksiyonu ile μ parametre değerlerinin farklı değerlerine göre (4.46) Atangana(beta) kesirsel türevli Boussinesq denkleminin tam çözümleri aşağıda durumlarda belirtildiği gibidir.

i.) Eğer $\mu < 0$ ise, bu takdirde rasyonel hiperbolik fonksiyon çözümü

$\vartheta_2 = \frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{16k^2\lambda\mu - b}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}$ olmak üzere

$$\Upsilon_4(x,t) = \frac{-12k^2\lambda\mu}{\beta} + \frac{6k^2\lambda\mu}{\beta}\left(\frac{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_2\right) + A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_2\right)}{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_2\right) + A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_2\right)}\right)^2 + \frac{6k^2\mu^3\lambda}{\beta}\left(\frac{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_2\right) + A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_2\right)}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_2\right) + A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_2\right)}\right)^2 \tag{4.66}$$

bulunur. (4.66) çözüm fonksiyonunun daha sade halini yazabilmek için eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilir ve $E_3 = -\frac{6k^2\lambda\mu}{\beta}$ olmak üzere sırasıyla karanlık(dark) soliton çözümleri

$$\Upsilon_{4,1}(x,t)=E_3\left(2-\coth^2\left[\frac{ik\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{ik\sqrt{16k^2\lambda\mu^2-b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]-\mu^2\tanh^2\left[\frac{ik\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{ik\sqrt{16k^2\lambda\mu^2-b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right)$$

(4.67)

$$\Upsilon_{4,2}(x,t)=E_3\left(2-\tanh^2\left[\frac{ik\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{ik\sqrt{16k^2\lambda\mu^2-b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]-\mu^2\coth^2\left[\frac{ik\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{ik\sqrt{16k^2\lambda\mu^2-b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right)$$

(4.68)

elde edilir.

ii.)Eğer $\mu>0$ ise bu takdirde rasyonel trigonometrik fonksiyon çözümü

$$\Upsilon_5(x,t)=E_3\left[1+\left(\frac{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\vartheta_2\right)-A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\vartheta_2\right)}{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\vartheta_2\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\vartheta_2\right)}\right)^2+\mu^2\left(\frac{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\vartheta_2\right)+A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\vartheta_2\right)}{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\vartheta_2\right)-A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\vartheta_2\right)}\right)^2\right] \tag{4.69}$$

şeklinde bulunur. (4.69) çözüm fonksiyonunu sade göstermek için eğer $A_1=0$ ve $A_2=0$ olarak kabul edilirse sırasıyla singüler soliton çözümleri

$$\Upsilon_{5,1}(x,t)=E_3\left(1+\tan^2\left[\frac{k\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{i\sqrt{16k^2\lambda\mu^2-b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]+\mu^2\cot^2\left[\frac{k\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{i\sqrt{16k^2\lambda\mu^2-b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right)$$

(4.70)

$$\Upsilon_{5,2}(x,t)=E_3\left(1+\cot^2\left[\frac{k\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{i\sqrt{16k^2\lambda\mu^2-b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]+\mu^2\tan^2\left[\frac{k\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{i\sqrt{16k^2\lambda\mu^2-b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right)$$

(4.71)

olarak bulunur.

iii.) $\mu=0$ olduğunda ise rasyonel fonksiyon çözümü

$$\Upsilon_6(x,t)=2E_3+E_2\left(\frac{A_1}{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{16k^2\lambda\mu-b}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)+A_2}\right)^2+2\mu E_3\left(\frac{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{16k^2\lambda\mu-b}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)+A_2}{A_1}\right)^2$$

(4.72)

şeklinde elde edilir.

Durum 3:

$$a_0=\frac{-6k^2\lambda\mu}{\beta},\ c_2=\frac{-6k^2\lambda\mu^2}{\beta},\ a_1=a_2=b_1=b_2=c_1=d_1=d_2=0,\omega=-k\sqrt{4k^2\lambda\mu-b}$$

(4.73)

bulunan katsayılara göre (4.53) çözüm fonksiyonu

$$\Upsilon(\vartheta) = a_0 + c_2\left(\frac{G'(\vartheta)}{G(\vartheta)}\right)^{-2}, \tag{4.74}$$

şeklindedir. (4.74)'de belirlenen çözüm fonksiyonu ile farklı μ parametre değerlerine göre (4.46)'deki Boussinesq denkleminin tam çözümleri aşağıdaki durumlarda belirtilmiştir.

i.) Eğer $\mu < 0$ olduğunda rasyonel hiperbolik fonksiyon çözümü

$\vartheta_3 = \frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{4k^2\lambda\mu - b}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}$ olmak üzere

$$\Upsilon_7(x,t) = \frac{-6k^2\lambda\mu}{\beta} + \frac{6k^2\lambda\mu^3}{\beta}\left(\left(\frac{A_1\cosh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_3\right) + A_2\sinh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_3\right)}{A_1\sinh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_3\right) + A_2\cosh\left(\sqrt{-\mu}\vartheta_3\right)}\right)^2\right) \tag{4.75}$$

şeklinde bir çözüm fonksiyonu bulunur. (4.75) çözüm fonksiyonunu daha sade hale getirebilmek için eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse karanlık(dark) soliton çözümleri

$$\Upsilon_{7,1}(x,t) = E_3\left(1-\mu^2\tanh^2\left[\frac{ik\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{ik\sqrt{4k^2\lambda\mu^2 - b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.76}$$

$$\Upsilon_{7,2}(x,t) = E_3\left(1-\mu^2\coth^2\left[\frac{ik\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{ik\sqrt{4k^2\lambda\mu^2 - b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.77}$$

elde edilir.

ii.) $\mu > 0$ olduğunda ise rasyonel trigonometrik fonksiyon çözümü

$$\Upsilon_8(x,t) = E_3\left[1+\mu^2\left(\frac{A_1\sin\left(\sqrt{\mu}\vartheta_3\right) + A_2\cos\left(\sqrt{\mu}\vartheta_3\right)}{A_1\cos\left(\sqrt{\mu}\vartheta_3\right) - A_2\sin\left(\sqrt{\mu}\vartheta_3\right)}\right)^2\right] \tag{4.78}$$

bulunur. (4.78)'deki çözüm fonksiyonunu daha sade halde göstermek için eğer $A_1 = 0$ ve $A_2 = 0$ olarak seçilirse sırasıyla singüler soliton çözümleri

$$\Upsilon_{8,1}(x,t) = E_3\left(1+\mu^2\cot^2\left[\frac{k\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha} + \frac{k\sqrt{4k^2\lambda\mu^2 - b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.79}$$

$$\Upsilon_{8,2}(x,t)=E_3\left(1+\mu^2\tan^2\left[\frac{k\sqrt{\mu}}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{4k^2\lambda\mu^2-b\mu}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right]\right) \tag{4.80}$$

olarak bulunur.

iii.) $\mu=0$ olduğunda ise bu takdirde rasyonel fonksiyon çözümü

$$\Upsilon_9(x,t)=E_3\left(1+\mu\left(\frac{A_1\left(\frac{k}{\alpha}\left(x+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}+\frac{k\sqrt{4k^2\lambda\mu-b}}{\alpha}\left(t+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\right)^{\alpha}\right)+A_2}{A_1}\right)^2\right) \tag{4.81}$$

şeklinde elde edilir.

Atangana(beta) kesirsel türevi içeren Boussinesq denkleminin yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemine göre elde edilen tüm durumlardaki çözümleri incelendiğinde; Jebreen'in 2020 yılında elde ettiği sonuçları ile benzer olmadığı saptanmıştır. (Jebreen, 2020). Buda ele alınan yöntemin bu tarz denklemlerin yeni tam çözümlerini bulmada çok faydalı olduğu söylenebilir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Atangana(beta) kesirsel türevi içeren kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini bulmak için etkili bir yöntem verilmiştir. Doğadaki fiziksel olayların daha iyi anlaşılabilmesi için modellenme yapılması sonucunda elde edilen problemlerin uygun yöntemler kullanılarak farklı ve yeni tam çözümlerin elde edilmesi hedeflenmiştir. Çalışmamızda uygulanan yöntem, literatürdeki tam çözüm yöntemlerinden biri olan G'/G-açılım yöntemleri irdelenmesi sonucunda ortaya çıkmış ve yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemi olarak isimlendirilmiştir. Bu yöntem kullanılarak Atangana(beta) kesirsel türevi içeren kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözüm fonksiyonu (2.9)'da verilmiştir. Oluşturulan bu yöntemde ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem $G''+\mu G=0$ olan denklemin G'/G çözüm fonksiyonları farklı μ parametre değerlerine göre farklı durumları (3.11), (3.12) ve (3.13) çözüm fonksiyonlarıyla ifade edilmiştir. Buradaki çözümleri (3.9) genel çözüm fonksiyonunda yerine yazmadan önce çözüm fonksiyonunda yer alan N sayısını belirleyebilmek için balans işleminin yapılması gerekir. Yapılan balans işlemi neticesine göre çözüm fonksiyonunda bulunması gereken terimler belirlenmiş olmaktadır. Bu nedenle balans işlemi sayesinde bulunan N sayısı çözüm için oldukça önemlidir.

Yeni versiyon genelleştirilmiş G'/G yöntemi Atangana(beta) kesirsel türevi içeren lineer olmayan Sharma-Tasso-Olver denklemi ile Boussinesq denklemine ayrı ayrı uygulanmış ve elde edilen yeni farklı tam çözümler birçok durumda verilmiştir. Bulunan yeni tam çözümlerin literatür taraması yapılmış ve diğer yöntemler ile bulunan tam çözümlerden farklı olduğu tespit edilmiştir. Bu yeni tam çözümler, aydınlık(bright) soliton, karanlık(dark) soliton, singüler soliton ve bunların birleşimlerinde oluşan rasyonel hiperbolik, rasyonel trigonometrik ve rasyonel çözümlerine olarak bulunmuştur. Daha sonra bulunan bu yeni tam çözümlerin farklı parametre değerlerine göre karşılaştırılma yapabilmek için $\alpha=0.09,\ 0.60,\ 1$değerlerine göre üç boyutlu grafikleri çizilmiştir. Bunun neticesinde bulunan yeni tam çözümlerin fiziksel davranışları daha iyi anlaşılabilecektir. Ayrıca bu yeni tam çözümlerin fiziksel davranışları başka yöntemlerle elde edilen tam çözümlerle karşılaştırma yapılabilir. Çizdiğimiz grafikler bize farklı soliton dalga çeşitlerinin bir arada olabileceğini

göstermektedir. Bu yeni yöntem sayesinde literatürde Atangana(beta) kesirsel türevi içeren denklemlerin var olan soliton çözümlerinden farklı olan çözümlerin varlığı grafiklerle gösterilmiştir. Bu nedenle farklı fiziksel olayların daha iyi anlaşılabileceği düşüncesindeyiz. İleriki çalışmalarda (3.10) denklemiyle verilen ikinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemin farklı halleri incelemeye alınıp, bunun neticesinde bulunacak yeni G'/G çözüm fonksiyonları elde edilebilir. Böylece önerilen yöntemimizin farklı yeni tam çözümlerine ulaşma imkanı sahip olunabilecektir.

6.KAYNAKLAR

Aniqa, A., Ahmad, J. (2022). Soliton Solution of Fractional Sharma-Tasso-Olever Equation via an Efficient G'/G-expansion method. *Ain Shams Engineering Journal*, 13, 101528, 1-23.

Atangana, A., Baleanu, D., Alsaedi, A. (2015). New Properties of Conformable Derivative. *Open Mathematics*, 13, 1-10.

Atangana, A., Baleanu, D. (2016). New Fractional Derivatives with Nonlocal and Non-Singular Kernel: Theory and Application to Heat Transfer Model. *Thermal Science*, 20(2), 763-769.

Atangana, A., Baleanu, D., Alsaedi, A. (2016). Analysis of Time Fractional Hunter-Saxton Equation: A Model of Neumatic Liquid Crystal. *Open Physics*, 14, 145-149.

Bhatter, S., Mathur, A., Kumar, D., Nisar, K. S., Singh, J. (2020). Fractional Modified Kawahara Equation with Mittag-Leffler Law. *Chaos, Solitons & Fractals*, 131, 109508, 1-6.

Caputo, M., Fabrizio, M. (2015). A New Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications An International Journal*, 1(2), 73-85.

Cenesiz, Y., Kurt, A. (2014). The Solution of Time Fractional Heat Equation with New Fractional Derivative Definition. *In 8th International Conference on Applied Mathematics, Simulation and Modelling*, 195

Cenesiz, Y., Baleanu, D., Kurt, A., Tasbozan, O. (2016). New Exact Solutions of Burgers' Type Equations with Conformable Derivative. *Waves Random Complex Media*, 27(1), 103-116.

Chung, W.S. (2015). Fractional Newton Mechanics with Conformable Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290, 150-158.

Das, N., Singh, R., Wazwaz, A. M., Kumar, J. (2016). An Algorithm Based on the Variational Iteration Technique for the Bratu-Type and the Lane-Emden Problems. *Journal of Mathematical Chemistry*, 54, 527-551.

Deng, W. (2008). Finite Element Method for the Space and Time Fractional Fokker-Planck Equation. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 47(1), 204-226.

Gao, G. H., Sun, Z. Z., Zhang, Y. N. (2012). A Finite Difference Scheme for Fractional Sub-Diffusion Equations on an Unbounded Domain Using Artificial Boundary Conditions. Journal of Computational Physics, 231(7), 2865-2879.

Ghanbari, B., Gomez-Aguilar, J. F. (2019). The Generalized Exponential Rational Function Method for Radhakrishnan-Kundu Lakshmanan Equation with β-Conformable Time Derivative. *Revista Mexicana de Fisica*, 65(5), 503-518.

Hu, M.S., Agarwal, R. P., Yang, X. J. (2012). Local Fractional Fourier Series with Application to Wave Equation in Fractal Vibrating String. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 567401, 1-15.

Jafari, H., Tajadodi, H., Baleanu, D., Al-Zahrani, A. A., Alhamed, Y. A., Zahid, A. H. (2013). Exact Solutions of Boussinesq and KdV-mKdV Equations by Fractional Subequation Method. *Romanian Reports in Physics*, 65(4), 1119-1124.

Jafari, H., Jassim, H.K. (2015). Numerical Solutions of Telegraph and Laplace Equations on Cantor Sets Using Local Fractional Laplace Decomposition Method. *The International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2(3), 144-151.

Jumarie, G. (2006). Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Nondifferentiable Functions Further Results, *Computers and Mathematics with Applications*, 51(9-10), 1367-1376.

Jebreen, H. B. (2020). Some Nonlinear Fractional PDEs Involving β-Derivative by Using Rational $\exp\left(-\Omega\left(\eta\right)\right)$- Expansion Method, *Complexity*, 2020, Article ID 9179826, 1-22.

Khalil, R., Horani, M. A., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A New Definition of Fractional Derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264 65-70.

Lu, B. (2012). The First Integral Method for Some Time Fractional Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 395(2), 684-693.

Martinez, H. Y., Aguilar, J. F. G., Atangana, A. (2018). First Integral Method for Non-Linear Differential Equations with Conformable Derivative. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 13(1), 14-36.

Martinez, H. Y., Aguilar, J. F. G. (2019). Fractional Sub-Equation Method for Hirota-Satsuma-Coupled KdV Equation and Coupled mKdV Equation Using the Atangana's Conformable Derivative. *Waves in Random Complex Media*, 29(4), 678-693.

Martinez, H. Y., Aguilar, J. F. G. (2021). Optical Solitons Solution of Resonance Nonlinear Schrodinger Type Equation with Atangana's-Conformable Derivative using Sub-Equation Method. *Waves in Random Complex Media*, 31(3), 573-596.

Metzler, R., Klafter, J. (2000). The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach. *Physics Reports*, 339(1), 1-77.

Mohyud-Din, S. T., Bibi, S. (2017). Exact Solutions for Nonlinear Fractional Differential Equations Using Exponential Rational Function Method. *Optical and Quantum Electronics*, 49, 64, 1-12.

Nataraj, P. S. V. (2010). Fractional Calculus and Fractional Differential Equations with SCILAB, *SGGS IE & T*, Nanded.

Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E. (2013). The Extended Trial Equation Method for Some Time-Fractional Differential Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013, 491359, 1-13.

Pandir, Y., Gurefe, Y., Misirli, E. (2013). New Exact Solutions of the Time-Fractional Nonlinear Dispersive KdV Equation. *International Journal of Modeling and Optimization*, 3(4), 349-352.

Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego.

Wadati, M., Sogo, K. (1983). Gauge transformations in soliton theory. *Journal of the Physical Society of Japan*, 52(2), 394-398.

Wang, M., Li, X., Zhang, J. (2008). The G'/G-expansion Method and Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, 372(4), 417-423.

Wen, C., Zheng, B. (2013). A New Fractional Sub-Equation Method for Fractional Partial Differential Equations. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 12(5), 564-571.

Xu, F.(2008). Application of Exp-function Method to Symmetric Regularized Long Wave (SRLW) Equation. *Physics Letters A*, 372(3), 252-257.

Yang, X. J., Zhang, Y. D. (2012). A New Adomian Decomposition Procedure Scheme for Solving Local Fractional Volterra Integral Equation. *Advances in Information Technology and Management*, 1(4), 158-161.

Zhang, S., Zhang, H.Q. (2011). Fractional Sub-Equation Method and Its Applications to Nonlinear Fractional PDEs. *Physics Letters A*, 375(7), 1069-1073.