T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN DİSPERSİF OPTİK SOLİTONLARIN ANALİTİK ÇALIŞMASI

OKAN NAZLI

Tez Danışmanı

Doç. Dr. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

YOZGAT – 2022

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN DİSPERSİF OPTİK SOLİTONLARIN ANALİTİK ÇALIŞMASI

OKAN NAZLI

Tez Danışmanı

Doç. Dr. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

YOZGAT - 2022

Her hakkı saklıdır

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İMZA
Okan NAZLI
20/07/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN DİSPERSİF OPTİK SOLİTONLARIN ANALİTİK ÇALIŞMASI

OKAN NAZLI

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI:Doç. Dr. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

Optik solitonlar, nonlineer optik alanındaki en zengin araştırma alanlarından biridir. Bu alanda bu günlere dayanan birkaç araştırma yönü vardır. Bu tür konulardan birkaçı soliton pertürbasyon teorisi, yarı-durağan solitonlar, aşırı büyük dalgalar, fotonik kristal lifler, metamateryal ve meta-yüzeyler ve diğerleridir. Bu çalışmada Kerr, yerel olmayan ve kübik-kuintik-septik nonlineerlik yasalarına sahip yüksek mertebeden dispersif optik solitonlar genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılımının uygulanmasıyla araştırıldı. Açılım, üç tip eliptik fonksiyon cinsinden gerçekleştirilirdi. Bu formlar sn, cn ve dn fonksiyonları cinsindendir. Çok sayıda Jacobi eliptik fonksiyon çözüm elde edildi. Eliptiklik modülü bire yaklaştığında, bu çözümler soliton çözümler türetildi. Böylece parlak, koyu, tekil ve birkaç birleşik optik çözüm ortaya çıkarıldı ve bu çözümlerin hepsi karşılık gelen varlık kriterleri ile sunuldu.

2022, ix+54 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Kübik-kuintik-septik yasası, Kerr yasası, Yerel olmayan, Genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılımı.

ABSTRACT

MASTER THESIS

ANALYTİCAL STUDY OF HİGHER ORDER DİSPERSİVE OPTİCAL SOLİTONS

OKAN NAZLI

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATİCS

SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. ABDULLAH SÖNMEZOĞLU

Optical solitons is one of the richest area of research in the field of nonlinear optics. There are several aspects of research that are touched base upon these days in this field. A few of such topics are soliton perturbation theory, quasi-stationary solitons, rogue waves, photonic crystal fibers, metamaterials and meta-surfaces and many others. This study investigates highly dispersive optical solitons with Kerr, nonlocal and cubic-quintic-septic laws of nonlinearity by the application of extended Jacobi's elliptic function expansion. The expansion is carried out in terms of three types of elliptic functions. These forms are in terms of sn, cn and dn functions. A plethora of Jacobi's elliptic function solutions is recovered. When the modulus of ellipticity approached unity, these solutions approached soliton solutions. Thus, bright, dark, singular and several combo optical solutions are revealed and they are all presented with their corresponding existence criteria.

2022, ix+54 PAGE

KEYWORDS: Cubic-quintic-septic law, Kerr law, Non-local, Extended Jacobi's elliptic function expansion.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na, tezi inceleyerek değerli yorumlarıyla teze katkı sağlayan Dr. Öğr. Üyesi Mehmet EKİCİ hocama, tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

OKAN NAZLI

20/07/2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Özet iv

Abstract v

Önsöz vi

İçindekiler vii

Simgeler ve Kısıtlamalar Listesi ix

1. GİRİŞ 1

2. KERR YASASI NONLİNEERLİĞİNE SAHİP YÜKSEK MERTEBELİ NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ 3

2.1. Ana Model 3

2.2. Matematiksel Analiz 3

2.2.1. Genişletilmiş Jacobi Eliptik sn Fonksiyon Açılım Şeması 6

2.2.1.1. Soliton Çözümler 15

3. YEREL OLMAYAN NONLİNEERLİĞE SAHİP YÜKSEK MERTEBELİ NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ 17

3.1. Ana Model 17

3.2. Matematiksel Analiz 17

3.2.1. Genişletilmiş Jacobi Eliptik sn Fonksiyon Açılım Şeması 20

3.2.1.1. Soliton Çözümler 25

3.2.2. Genişletilmiş Jacobi Eliptik cn Fonksiyon Açılım Şeması 25

3.2.2.1. Soliton çözümler 30

3.2.3. Genişletilmiş Jacobi Eliptik dn Fonksiyon Açılım Şeması 31

3.2.3.1 Soliton Çözümler 35

4. KÜBİK-KUİNTİK-SEPTİK YASASINA SAHİP YÜKSEK MERTEBELİ NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ 36

4.1. Ana Model 36

4.2. Matematiksel Analiz 36

4.2.1. Genişletilmiş Jacobi Eliptik sn Fonksiyon Açılım Şeması 40

4.2.1.1. Soliton Çözümler 43

Sayfa

4.2.2. Genişletilmiş Jacobi Eliptik cn Fonksiyon Açılım Şeması 43

4.2.2.1. Soliton Çözümler 47

4.2.3. Genişletilmiş Jacobi Eliptik dn Fonksiyon Açılım Şeması 47

4.2.3.1. Soliton Çözümler 51

5. SONUÇ VE ÖNERİLER 52

KAYNAKÇA 53

ÖZGEÇMİŞ .....

SİMGELER VE KISITLAMALAR LİSTESİ

α	: Alfa
β	: Beta
θ	: Teta
λ	: Lambda
φ	: Phi
κ	: Kappa
ω	: Omega
υ	: Upsilon
σ	: Sigma

GVD	: Grup Hız Dağılım
IMD	: Modlar Arası Dağılım
3OD	: Üçüncü Dereceden Dağılım
4OD	: Dördüncü Dereceden Dağılım
5OD	: Beşinci Dereceden Dağılım
6OD	: Altıncı Dereceden Dağılım
NLS	: Nonlineer Schrödinger

1. GİRİŞ

Optik solitonlar telekomünikasyon alanında kalıcı bir etki bırakmıştır. Halen çalışılan soliton çalışmalarından kaynaklanan çeşitli kavramlar vardır. Onlardan birkaçı, dağılım-yönetimli solitonlar, Bragg ızgaraları, saf (pure)-kübik solitonlar, saf-kuartik solitonlar, kübik-kuartik solitonlar, yüksek mertebeden dispersif solitonlar, yarı-lineer darbeler ve diğerleridir. Son zamanlarda önerilen ve oldukça ilgi gören kavramlardan biri de yüksek mertebeden dispersif solitonlardır. Bu tür solitonlar, çeşitli nonlineer kırılma indisi formları ile kapsamlı bir şekilde incelenmiş ve daha sonra sonuçların bir serisi sunulmuştur (Biswas, Ekici, Sonmezoglu ve Belic, 2019a, 2019b, 2019c, 2019d, 2019e, 2019f, 2019g). Bu tür solitonlar, olağan grup hız dağılımına (GVD) ek olarak, modlar arası dağılım (IMD), üçüncü dereceden dağılım (3OD), dördüncü dereceden dağılım (4OD), beşinci dereceden dağılım (5OD) ve altıncı dereceden dağılım (6OD) terimlerinin varlığında ortaya çıkar (Biswas vd., 2019b, 2019c, 2019d, 2019e, 2019f, 2019g). Bu tür solitonlarda, dispersif etkiler nonlineerliğe baskındır. Bu nedenle, şu ana kadar, sadece Kerr yasası, kuadratik-kübik yasası, kübik-kuintik-septik yasası ve yerel olmayan yasaya sahip yüksek mertebeden dispersif solitonları elde etmek mümkün olmuştur. Bu bağlamda F-açılım şeması ve genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi etkileyici sonuçlar vermiştir. F-açılım algoritması Kerr yasası, kuadratik-kübik yasası, kübik-kuintik-septik yasası ve yerel olmayan yasaya sahip NLS denklemine uygulanmıştır (Abdou ve Elhanbaly, 2007; Bhrawy, Abdelkawy ve Biswas, 2013; Petrović ve Bohra, 2016; Zhang H., 2007; Zhang Z., 2015). Belirsiz katsayılar yönteminin, NLS denklemi tarafından modellenen yüksek mertebeden dispersif optik solitonlar bağlamında başarısız olduğunun kanıtlandığı belirtilmelidir (Biswas vd., 2019). Bu tez çalışmasında, (Biswas vd., 2019a, 2019c, 2019f)'deki sonuçlar, yani genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon yöntemi ile Kerr yasası, yerel olmayan yasa ve kübik-kuintik-septik yasasına sahip NLS denkleminin yüksek mertebeden dispersif optik solitonlarının elde edilmesi incelenmiştir.

Tez çalışmasının organizasyonu aşağıdaki gibidir: 2. Bölümde ana model olan Kerr yasası nonlineerliğine sahip yüksek mertebeli NLS denklemi sunuldu ve modelin matematiksel analizi gerçekleştirilerek model denklem istenen formda yazıldı. Daha sonra bu form kullanılarak ele alınan denkleme, genişletilmiş Jacobi eliptik sn

fonksiyon açılım yaklaşımı yardımıyla eliptik fonksiyon çözümler elde edildi. Son olarak bu bölümde, eliptik modülün sınır değerleri göz önüne alınarak, m modülü 1'e yaklaşırken koyu-tekil birleşik dispersif solitonlar türetildi. Sonraki bölüm olan 3. Bölümde, aynı modelin yerel olmayan nonlineerlik durumu incelendi. Yerel olmayan nonlineerliğe sahip yüksek mertebeli NLS denkleminin matematiksel analizi tamamlandıktan sonra model denklem genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılımlarının üç farklı versiyonu ile çalışıldı. Bu açılımlar, genişletilmiş Jacobi eliptik sn, cn ve dn fonksiyon açılımlarından oluşmaktadır. Jacobi eliptik fonksiyon açılımlarının bu üç genişletilmiş versiyonu aracılığıyla yerel olmayan nonlineerliğe sahip NLS denklemine eliptik sn, cn ve dn fonksiyonları cinsinden çözümler çıkarıldı. Daha sonra m modülü 1'e yaklaşırken bu eliptik fonksiyon çözümler, çeşitli dispersif soliton çözümlere dejenere oldu. Kübik-kuintik-septik yasasına sahip yüksek mertebeli NLS denklemi Jacobi eliptik fonksiyon açılımları, yani eliptik sn, cn ve dn fonksiyonları yardımıyla 4. bölümde ele alındı ve modele Jacobi eliptik fonksiyon çözümler ve dispersif soliton çözümler elde edildi. Son bölüm olan 5. Bölümde, bazı sonuç ve önerilerden bahsedildi.

2. KERR YASASI NONLİNEERLİĞİNE SAHİP YÜKSEK MERTEBELİ NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ

2.1. Ana Model

Altı dispersif teriminin varlığında, nonlineer formuna sahip NLS denklemi boyutsuz formunda aşağıdaki gibidir (Biswas vd. , 2019c):

$$iq_t + ia_1 q_x + a_2 q_{xx} + ia_3 q_{xxx} + a_4 q_{xxxx} + ia_5 q_{xxxxx} + a_6 q_{xxxxxx} + b|q|^2 q = 0. \quad (2.1)$$

Burada (2.1) denkleminde $q(x,t)$, x ve t'nin sırasıyla bağımsız uzaysal ve zamansal değişkenler olduğu dalga profilini temsil eder. İlk terim lineer zamansal gelişimi temsil ederken, $1 \leq j \leq 6$ için a_j sırasıyla, modlar arası dağılım, grup hız dağılım, üçüncü dereceden dağılım, dördüncü dereceden dağılım, beşinci dereceden dağılım, ve altıncı dereceden dağılım katsayılarıdır. Son olarak b, kendi kendine faz modülasyonunun katsayısıdır. Kompleks değerli $q(x,t)$ fonksiyonu bağımlı değişken olan dispersif soliton profilidir. $i = \sqrt{-1}$ iken katsayıların tümü reel değerli sabitlerdir.

2.2. Matematiksel Analiz

(2.1) denklemi için, başlangıç hipotezi aşağıdaki gibidir (Biswas vd. , 2019c):

$$q(x,t) = g(\varsigma)e^{i\varphi(x,t)}. \quad (2.2)$$

Burada $g(\varsigma)$ dalganın şeklini temsil eder ve dalga değişkeni v solitonun hızı olmak üzere

$$\varsigma = x - vt \quad (2.3)$$

şeklindedir. Ayrıca faz bileşeni

$$\varphi(x,t) = -\kappa x + \omega t + \theta \quad (2.4)$$

şeklinde yapılanır. Burada (2.4) denkleminde κ soliton frekansı, ω soliton dalga sayısı ve θ faz sabitidir. (2.2), (2.3) ve (2.4) denklemleri kullanılarak (2.1) denkleminde bulunan $q_x, q_{xx}, q_{xxx}, q_{xxxx}, q_{xxxxx}, q_{xxxxxx}, q_t$ ve $|q|^2$ terimleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$q_x = g'e^{i\varphi} - i\kappa g e^{i\varphi}$$

$$q_{xx} = g'' e^{i\varphi} - i\kappa g e^{i\varphi} - i\kappa\left[g' e^{i\varphi} - i\kappa g e^{i\varphi}\right]$$

$$= [g'' - 2i\kappa g' - \kappa^2 g]e^{i\varphi}$$

$$q_{xxx} = -i\kappa[g'' - 2i\kappa g' - \kappa^2 g]e^{i\varphi} + [g''' - 2i\kappa g'' - \kappa^2 g']e^{i\varphi}$$

$$= [g''' - 3i\kappa g'' - 3\kappa^2 g' + i\kappa^3 g]e^{i\varphi}$$

$$q_{xxxx} = -i\kappa[g''' - 3i\kappa g'' - 3\kappa^2 g + i\kappa^3 g]e^{i\varphi} + \left[g^{(4)} - 3i\kappa g''' - 3\kappa^2 g + i\kappa^3 g'\right]e^{i\varphi}$$

$$= \left[g^{(4)} - 4i\kappa g''' - 6\kappa^2 g + 4i\kappa^3 g' + \kappa^4 g\right]e^{i\varphi}$$

$$q_{xxxxx} = -i\kappa\left[g^{(4)} - 4i\kappa g''' - 6\kappa^2 g'' + 4i\kappa^3 g' + \kappa^4 g\right]e^{i\varphi}$$
$$+ \left[g^{(5)} - 4i\kappa g^{(4)} - 6\kappa^2 g''' + 4i\kappa^3 g'' + \kappa^4 g'\right]e^{i\varphi}$$

$$= \left[g^{(5)} - 5i\kappa g^{(4)} - 4\kappa^2 g''' + 10i\kappa^3 g'' + 5\kappa^4 g' - i\kappa^5 g\right]e^{i\varphi}$$

$$q_{xxxxxx} = -i\kappa\left[g^{(5)} - 5i\kappa g^{(4)} - 4\kappa^2 g''' + 10i\kappa^3 g'' + 5\kappa^4 g' - i\kappa^5 g\right]e^{i\varphi}$$
$$+ \left[g^{(6)} - 5i\kappa g^{(5)} - 4\kappa^2 g^{(4)} + 10i\kappa^3 g''' + 5\kappa^4 g'' - i\kappa^5 g'\right]e^{i\varphi}$$

$$= \left[g^{(6)} - 6i\kappa g^{(5)} - 9\kappa^2 g^{(4)} + 14i\kappa^3 g''' + 15\kappa^4 g'' - 6i\kappa^5 g' - \kappa^6 g\right]e^{i\varphi}$$

$$q_t = -vg'e^{i\varphi} + i\omega g\varphi' e^{i\varphi}$$

$$|q|^2 = g^2.$$

Bulunan sonuçlar

$$iq_t + ia_1 q_x + a_2 q_{xx} + ia_3 q_{xxx} + a_4 q_{xxxx} + ia_5 q_{xxxxx} + a_6 q_{xxxxxx} + b|q|^2 q = 0$$

denkleminde yazılarak

$$[ig' - g\omega]e^{i\varphi} + ia_1[g' - i\kappa g]e^{i\varphi}$$
$$+a_2[g'' - 2i\kappa g' - \kappa^2 g]e^{i\varphi}$$
$$+ia_3[g''' - 3i\kappa g'' - 3\kappa^2 g' + i\kappa^3 g]e^{i\varphi}$$
$$+a_4\left[g^{(4)} - 4i\kappa g''' - 6\kappa^2 g + 4i\kappa^3 g' + \kappa^4 g\right]e^{i\varphi}$$
$$+ia_5\left[g^{(5)} - 5i\kappa g^{(4)} - 4\kappa^2 g''' + 10i\kappa^3 g'' + 5\kappa^4 g' - i\kappa^5 g\right]e^{i\varphi}$$
$$+a_6\left[g^{(6)} - 6i\kappa g^{(5)} - 9\kappa^2 g^{(4)} + 14i\kappa^3 g''' + 15\kappa^4 g'' - 6i\kappa^5 g' - \kappa^6 g\right]e^{i\varphi}$$
$$+bg^3 e^{i\varphi} = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemelerle

$$\left\{\begin{array}{c}[ig^{'}-g\omega]+a_1[ig^{'}+\kappa g]+a_2[g^{''}-2i\kappa g^{'}-\kappa^2 g]\\ +a_3[ig^{'''}+3\kappa g^{''}-3i\kappa^2 g^{'}-\kappa^3 g]\\ +a_4\left[g^{(4)}-4i\kappa g^{'''}-6\kappa^2 g+4i\kappa^3 g^{'}+\kappa^4 g\right]\\ +a_5\left[ig^{(5)}+5\kappa g^{(4)}-4i\kappa^2 g^{'''}-10\kappa^3 g^{''}+5i\kappa^4 g^{'}+\kappa^5 g\right]\\ +a_6\left[g^{(6)}-6i\kappa g^{(5)}-9\kappa^2 g^{(4)}+14i\kappa^3 g^{'''}+15\kappa^4 g^{''}-6i\kappa^5 g-\kappa^6 g\right]\\ +bg^3\end{array}\right\}e^{i\varphi}=0$$

ve böylece

$$\begin{aligned}&[-\omega+\kappa a_1-\kappa^2 a_2-\kappa^3 a_3+\kappa^4 a_4+\kappa^5 a_5-\kappa^6 a_6]g\\ &\quad+[i+ia_1-2i\kappa a_2-3i\kappa^2 a_3+4i\kappa^3 a_4+5i\kappa^4 a_5-6i\kappa^5 a_6]g^{'}\\ &\quad+[a_2+3\kappa a_3-6\kappa^2 a_4-10\kappa^3 a_5+15\kappa^4 a_6]g^{''}\\ &\quad+[ia_3-4i\kappa a_4-4i\kappa^2 a_5+14i\kappa^3 a_6]g^{'''}\\ &\quad+[a_4+5\kappa a_5-15\kappa^2 a_6]g^{(4)}\\ &\quad+[ia_5-5i\kappa a_6]g^{(5)}+[a_6]g^{(6)}+bg^3=0\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1) denklemini sırasıyla reel ve imajiner kısımlarına ayırarak,

Reel kısım:

$$\begin{aligned}&-\left(\omega+\kappa\left(-a_1+\kappa\left(a_2+\kappa\left(a_3-\kappa(a_4+\kappa a_5)+\kappa^3 a_6\right)\right)\right)\right)g\\ &\quad+(a_2+3\kappa a_3-6\kappa^2 a_4-10\kappa^3 a_5+\kappa^4 a_6)g^{''}\\ &\quad+\left[a_4+5\kappa a_5-15\kappa^2 a_6\right]g^{(4)}\\ &\quad+[a_6]g^{(6)}+bg^3=0.\end{aligned}\qquad(2.5)$$

İmajiner kısım:

$$\begin{aligned}&(v-a_1+2\kappa a_2+3\kappa^2 a_3-4\kappa^3 a_4-5\kappa^4 a_5+6\kappa^5 a_6)g\\ &\quad+\left(\omega+\kappa\left(-a_3+2\kappa\left(2a_4+5\kappa(a_5-2\kappa a_6)\right)\right)\right)g^{''}\\ &\quad-(a_5-6\kappa a_6)g^{(4)}=0.\end{aligned}\qquad(2.6)$$

$Ag+Bg''+Cg^{(4)}=0$ denkleminde $\{g,\ g'',\ g^{(4)}\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan $A=0$, $B=0$ ve $C=0$ olmalıdır.

Bu yüzden, (2.6) denkleminden,

$$a_5 = 6\kappa a_6 \tag{2.7}$$

kısıtlama koşulu ve diğer koşullar

$$a_3 = 2\kappa\left(2a_4 + 5\kappa(a_5 - 2\kappa a_6)\right)$$

$$a_3 = 4\kappa(a_4 + 10\kappa^2 a_6) \tag{2.8}$$

şeklinde ortaya çıkar. Böylece solitonun hızı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} v &= a_1 - 2\kappa a_2 - 3\kappa^2 a_3 + 4\kappa^3 a_4 + 5\kappa^4 a_5 - 6\kappa^5 a_6 \\ &= a_1 - 2\kappa a_2 - 3\kappa^2\left[4\kappa\left(a_4 + 10\kappa^2 a_6\right)\right] + 4\kappa^3 a_4 + 5\kappa^4(6\kappa a_6) - 6\kappa^5 a_6 \\ &= a_1 - 2\kappa a_2 - 12\kappa^3 a_4 - 120\kappa^5 a_6 + 4\kappa^3 a_4 + 5\kappa^5 a_6 - 6\kappa^5 a_6 \\ &= a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Bu durumda reel kısım aşağıdaki gibi düzenlenir:

(2.5) denkleminde (2.7) ve (2.8) denklemleri yerine yazılarak

$$\begin{aligned} &\left[-\omega + \kappa a_1 - \kappa^2 a_2 - \kappa^3\left[4\kappa\left(a_4 + 10\kappa^2 a_6\right)\right] + \kappa^4 a_4 + 5\kappa^5(6\kappa a_6) - \kappa^6 a_6\right] g \\ &\qquad + \left[a_2 + 3\kappa\left(4\kappa\left(a_4 + 10\kappa^2 a_6\right)\right) - 6\kappa^2 a_4 - 10\kappa^3(6\kappa a_6) + 15\kappa^4 a_6\right] g'' \\ &\qquad + \left[a_4 + 5\kappa(6\kappa a_6) - 15\kappa^2 a_6\right] g^{(4)} + \left[a_6\right] g^{(6)} + b g^3 = 0 \end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeyle

$$\begin{aligned} &-\left[\omega - \kappa a_1 + \kappa^2 a_2 + 3\kappa^4 a_4 + 35\kappa^6 a_6\right] g + b g^3 + \left[a_2 + 6\kappa^2 a_4 + 75\kappa^4 a_6\right] g'' \\ &\qquad + \left[a_4 + 15\kappa^2 a_6\right] g^{(4)} + \left[a_6\right] g^{(6)} = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

elde edilir.

Şimdi sonraki bölümde genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılımı ile modele yüksek dereceli dispersif optik solitonlar ortaya çıkarmak için (2.10) denklemi incelenecektir (Abdou ve Elhanbaly, 2007; Bhrawy, Abdelkawy ve Biswas, 2013; Zhang H., 2007).

2.2.1. Genişletilmiş Jacobi Eliptik sn Fonksiyon Açılım Şeması

Modele soliton çözümler oluşturmak için (2.10) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi alınır (Biswas vd., 2019c):

$$g(x,t) = g(\varsigma) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \, sn^j \varsigma + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \, sn^{-j} \varsigma. \tag{2.11}$$

Burada α_0, a_j ve β_j $(j = 1,2,\dots,N)$ belirlenecek sabitlerdir. (2.10) denkleminde g^3 ile $g^{(6)}$ dengelenerek yani bu terimler arasında balans işlemi yapılarak

$3N = N + 6$

$2N = 6 \Rightarrow N = 3$

elde edilir. Böylece formal çözüm

$$g(\varsigma) = \alpha_0 + \alpha_1 sn\varsigma + \alpha_2 sn^2\varsigma + \alpha_3 sn^3\varsigma + \frac{\beta_1}{sn\,\varsigma} + \frac{\beta_2}{sn^2\varsigma} + \frac{\beta_3}{sn^3\varsigma}, \qquad (2.12)$$

şeklini alır. (2.12) denklemi (2.10) denkleminde yazılarak ve elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek aşağıdaki çözüm setleri elde edilir:

Set-1

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = Ή_6 - \frac{\sqrt{L_1}}{2} - \frac{\sqrt{\upsilon_1}}{2}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -m^{3/2}\beta_3,$$

$$\beta_1 = \frac{Ή_{10} + 1343m^{3/2}\sqrt{L_1} + 1343m^{3/2}\sqrt{\upsilon_1}}{2686m^2},$$

$$\beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \beta_3,$$

$$\omega = \frac{Ή_7 + Ή_8 + Ή_9 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + \upsilon_5 + \upsilon_6 + \upsilon_7 + \upsilon_8 + \upsilon_9}{1803649m^3\beta_3^3},$$

$$a_2 = -\frac{Ή_{11} + Ή_{12} + 498\alpha_6\beta_3\kappa^2m^{3/2}\sqrt{L_1} + 498\alpha_6\beta_3\kappa^2m^{3/2}\sqrt{\upsilon_1} - 2354\,\alpha_6m\sqrt{L_1}\sqrt{\upsilon_1} + \upsilon_{10} + \upsilon_{11} + \upsilon_{12} + \upsilon_{13}}{m^2\beta_3^2},$$

$$a_4 = -\frac{Ή_{13} - 111469\,\alpha_6m^{\frac{3}{2}}\sqrt{L_1} - 111469\,\alpha_6m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\upsilon_1}}{1343m^2\beta_3},$$

$$b = -\frac{20160a_6}{\beta_3^2}. \qquad (2.13)$$

Set-2

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = Ή_6 - \frac{\sqrt{L_1}}{2} + \frac{\sqrt{\upsilon_1}}{2}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -m^{3/2}\beta_3,$$

$$\beta_1 = \frac{Ή_{10} + 1343m^{3/2}\sqrt{L_1} - 1343m^{3/2}\sqrt{\upsilon_1}}{2686m^2},$$

$$\beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \beta_3,$$

$$\omega = \frac{\acute{H}_7 + \acute{H}_8 + \acute{H}_9 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + \upsilon_{14} + \upsilon_{15} + \upsilon_{16} + \upsilon_{17} + \upsilon_{18}}{1803649 m^3 \beta_3^3},$$

$$a_2 = -\frac{\acute{H}_{11} + \acute{H}_{12} + 498\alpha_6\beta_3\kappa^2 m^{3/2}\sqrt{L_1} - 498\alpha_6\beta_3\kappa^2 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\upsilon_1} + 2354\alpha_6 m\sqrt{L_1}\sqrt{\upsilon_1} + \upsilon_{10} + \upsilon_{12} + \upsilon_{13} + \upsilon_{19}}{m^2\beta_3^2},$$

$$a_4 = -\frac{\acute{H}_{13} - 111469\alpha_6 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{L_1} + 111469\alpha_6 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\upsilon_1}}{1343 m^2 \beta_3},$$

$$b = -\frac{20160\alpha_6}{\beta_3^2}. \qquad (2.14)$$

Set-3

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \acute{H}_6 + \frac{\sqrt{L_1}}{2} - \frac{\sqrt{\upsilon_2}}{2}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -m^{3/2}\beta_3,$$

$$\beta_1 = \frac{\acute{H}_{10} - 1343 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{L_1} + 1343 m^{3/2}\sqrt{\upsilon_2}}{2686 m^2},$$

$$\beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \beta_3,$$

$$\omega = \frac{\acute{H}_7 + \acute{H}_8 + \acute{H}_9 + \upsilon_{20} + \upsilon_{21} + \upsilon_{22} + \upsilon_{23} + \upsilon_{24} + \upsilon_{25} + \upsilon_{26}}{1803649 m^3 \beta_3^3},$$

$$a_2 = -\frac{\acute{H}_{11} + \acute{H}_{12} - 498\alpha_6\beta_3\kappa^2 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{L_1} + 498\alpha_6\beta_3\kappa^2 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\upsilon_2} + 2354\alpha_6 m\sqrt{L_1}\sqrt{\upsilon_2} + \upsilon_{27} + \upsilon_{28} + \upsilon_{29} + \upsilon_{30}}{m^2\beta_3^2},$$

$$a_4 = -\frac{\acute{H}_{13} + 111469\alpha_6 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{L_1} - 111469\alpha_6 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\upsilon_2}}{1343 m^2 \beta_3},$$

$$b = -\frac{20160\alpha_6}{\beta_3^2}. \qquad (2.15)$$

Set-4

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \acute{H}_6 + \frac{\sqrt{L_1}}{2} + \frac{\sqrt{\upsilon_2}}{2}, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = -m^{3/2}\beta_3,$$

$$\beta_1 = \frac{\acute{H}_{10} - 1343 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{L_1} - 1343 m^{3/2}\sqrt{\upsilon_2}}{2686 m^2},$$

$$\beta_2 = 0, \quad \beta_3 = \beta_3,$$

$$\omega = \frac{\acute{H}_7 + \acute{H}_8 + \acute{H}_9 + \upsilon_{20} + \upsilon_{21} + \upsilon_{31} + \upsilon_{32} + \upsilon_{33} + \upsilon_{34} + \upsilon_{35}}{1803649 m^3 \beta_3^3},$$

$$a_2 = -\frac{\acute{H}_{11} + \acute{H}_{12} - 498\alpha_6\beta_3\kappa^2 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{L_1} - 498\alpha_6\beta_3\kappa^2 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\upsilon_2} - 2354\alpha_6 m\sqrt{L_1}\sqrt{\upsilon_2} + \upsilon_{27} + \upsilon_{28} + \upsilon_{29} + \upsilon_{36}}{m^2\beta_3^2},$$

$$a_4 = -\frac{Ή_{13} + 111469\alpha_6 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{L_1} + 111469\alpha_6 m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\upsilon_2}}{1343m^2\beta_3},$$

$$b = -\frac{20160\,a_6}{\beta_3^2}. \tag{2.16}$$

Burada

$$\upsilon_1 = -\frac{Ή_4}{4\sqrt{L_1}} + L_2 + L_3$$

$$\upsilon_2 = \frac{Ή_4}{4\sqrt{L_1}} + L_2 + L_3$$

$$\upsilon_3 = -1803649\,a_6 m^{3/2} L_1 \left(\beta_3\sqrt{m}\left(1177\kappa^2 + 3045\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) + 1343\sqrt{L_1}\right)$$

$$\upsilon_4 = -28203\,a_6\beta_3^2 m^{5/2}\left(4394580\,m^{3/2} + 52801\,m^2 - 8049946m + 4394580\sqrt{m} + 52801\right)\sqrt{L_1}$$

$$\upsilon_5 = 4029\,a_6 m^{3/2}\sqrt{L_1}\left(\beta_3^2\kappa^2 m\left(111469\kappa^2 + 223930\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) - 1803649\sqrt{L_1}\sqrt{\upsilon_1}\right)$$

$$\upsilon_6 = -1343\,a_6\beta_3 m^2\sqrt{\upsilon_1}\left(1108821\,\beta_3\sqrt{m} + 2686\sqrt{L_1}\left(1177\kappa^2 + 3045\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right)\right)$$

$$\upsilon_7 = -28203\,a_6\beta_3^2 m^3\left(52801\,m^{3/2} + 4394580\,m - 8049946\sqrt{m} + 4394580\right)\sqrt{\upsilon_1}$$

$$\upsilon_8 = 4029\,a_6 m^{3/2}\sqrt{\upsilon_1}\left(\beta_3^2\kappa^2 m\left(111469\kappa^2 + 223930\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) - 1803649\sqrt{L_1}\sqrt{\upsilon_1}\right)$$

$$\upsilon_9 = -1803649\,a_6 m^{3/2}\upsilon_1\left(\beta_3\sqrt{m}\left(1177\kappa^2 + 3045\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) + 1343\sqrt{\upsilon_1}\right)$$

$$\upsilon_{10} = \frac{671790\,\alpha_6\beta_3 m^{3/2}(m - 6\sqrt{m} + 1)\sqrt{L_1}}{1343}$$

$$\upsilon_{11} = \frac{671790\,\alpha_6\beta_3 m^{3/2}(m - 6\sqrt{m} + 1)\sqrt{\upsilon_1}}{1343}$$

$$\upsilon_{12} = -\frac{753280\,\alpha_6\beta_3^3 m^{\frac{5}{2}}(3\sqrt{m}\left(74396406m - 574776886\sqrt{m} + 5314029\right) + 1360496)}{2422300607\sqrt{L_1}}$$

$$\upsilon_{13} = -\frac{753280\,\alpha_6\beta_3^3 m^{\frac{9}{2}}\left(1360496\mathrm{m} + 15942087\sqrt{m} - 172433064\right)}{2422300607\sqrt{L_1}}$$

$$\upsilon_{14} = 4029 a_6 m^{3/2}\sqrt{L_1}\left(\beta_3^2\kappa^2 m\left(111469\kappa^2 + 223930\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) + 1803649\sqrt{L_1}\sqrt{\upsilon_1}\right)$$

$$\upsilon_{15} = 1343 a_6\beta_3 m^2\sqrt{\upsilon_1}\left(1108821\,\beta_3\sqrt{m} + 2686\sqrt{L_1}\left(1177\kappa^2 + 3045\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right)\right)$$

$$\upsilon_{16} = 28203 a_6\beta_3^2 m^{5/2}\sqrt{\upsilon_1}\left(-31990\kappa^2 + 4394580\,m^{\frac{3}{2}} + 52801 m^2 - 8049946 m + 4394580\sqrt{m}\right)$$

$$\upsilon_{17} = 4029 a_6 m^{3/2}\sqrt{\upsilon_1}\left(\beta_3^2\kappa^2 m\left(-111469\kappa^2 - 223930\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) - 1343\sqrt{\upsilon_1}\left(1015\beta_3\sqrt{m} + 1343\sqrt{L_1}\right)\right)$$

$$\upsilon_{18} = -1803649 a_6 m^{3/2}\upsilon_1\left(\beta_3\left(1177\kappa^2\sqrt{m} + 3045\left(\sqrt{m} - 6\right)m\right) - 1343\sqrt{\upsilon_1}\right)$$

$$\upsilon_{19} = -\frac{671790\,\alpha_6\beta_3 m^{3/2}(m - 6\sqrt{m} + 1)\sqrt{\upsilon_1}}{1343}$$

$$\upsilon_{20} = -1803649 a_6 m^{3/2} L_1\left(\beta_3\sqrt{m}\left(1177\kappa^2 + 3045\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) - 1343\sqrt{L_1}\right)$$

$$\upsilon_{21} = 28203 a_6\beta_3^2 m^{5/2}\left(4394580\,m^{3/2} + 52801 m^2 - 8049946 m + 4394580\sqrt{m} + 52801\right)\sqrt{L_1} \qquad (2.17)$$

$$\upsilon_{22} = -4029 a_6 m^{3/2}\sqrt{L_1}\left(\beta_3^2\kappa^2 m\left(111469\kappa^2 + 223930\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) + 1803649\sqrt{L_1}\sqrt{\upsilon_2}\right)$$

$$\upsilon_{23} = 1343 a_6\beta_3 m^2\sqrt{\upsilon_2}\left(2686\sqrt{L_1}\left(1177\kappa^2 + 3045\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) - 1108821\,\beta_3\sqrt{m}\right)$$

$$\upsilon_{24} = -28203a_6\beta_3^2 m^{5/2}\sqrt{\upsilon_2}\left(-31990\kappa^2 + 4394580m^{\frac{3}{2}} + 52801m^2 - 8049946m + 4394580\sqrt{m}\right)$$

$$\upsilon_{25} = 4029a_6 m^{3/2}\sqrt{\upsilon_2}\left(\beta_3^2\kappa^2 m\left(111469\kappa^2 + 223930\left(m - 6\sqrt{m}\right)\right) + 1343\sqrt{\upsilon_2}\left(1343\sqrt{L_1} - 1015\beta_3\sqrt{m}\right)\right)$$

$$\upsilon_{26} = -1803649a_6 m^{3/2}\upsilon_2\left(\beta_3\left(1177\kappa^2\sqrt{m} + 3045\left(\sqrt{m} - 6\right)m\right) + 1343\sqrt{\upsilon_2}\right)$$

$$\upsilon_{27} = -\frac{671790\alpha_6\beta_3 m^{3/2}(m - 6\sqrt{m} + 1)\sqrt{L_1}}{1343}$$

$$\upsilon_{28} = \frac{753280\alpha_6\beta_3^3 m^{\frac{5}{2}}(3\sqrt{m}\left(74396406m - 574776886\sqrt{m} + 5314029\right) + 1360496)}{2422300607\sqrt{L_1}}$$

$$\upsilon_{29} = \frac{753280\alpha_6\beta_3^3 m^{\frac{9}{2}}\left(1360496m + 15942087\sqrt{m} - 172433064\right)}{2422300607\sqrt{L_1}}$$

$$\upsilon_{30} = \frac{671790\alpha_6\beta_3 m^{3/2}(m - 6\sqrt{m} + 1)\sqrt{\upsilon_2}}{1343}$$

$$\upsilon_{31} = -4029a_6 m^{3/2}\sqrt{L_1}\left(\beta_3^2\kappa^2 m\left(111469\kappa^2 + 223930\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) - 1803649\sqrt{L_1}\sqrt{\upsilon_2}\right)$$

$$\upsilon_{32} = -1343a_6\beta_3 m^2\sqrt{\upsilon_2}\left(2686\sqrt{L_1}\left(1177\kappa^2 + 3045\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\right) - 1108821\beta_3\sqrt{m}\right)$$

$$\upsilon_{33} = 28203a_6\beta_3^2 m^{5/2}\sqrt{\upsilon_2}\left(-31990\kappa^2 + 4394580m^{\frac{3}{2}} + 52801m^2 - 8049946m + 4394580\sqrt{m}\right)$$

$$\upsilon_{34} = 4029a_6 m^{3/2}\sqrt{\upsilon_2}\left(\beta_3^2\kappa^2 m\left(-111469\kappa^2 - 223930\left(m - 6\sqrt{m}\right)\right) + 1343\sqrt{\upsilon_2}\left(1343\sqrt{L_1} - 1015\beta_3\sqrt{m}\right)\right)$$

$$\upsilon_{35} = -1803649a_6 m^{3/2}\upsilon_2\left(\beta_3\left(1177\kappa^2\sqrt{m} + 3045\left(\sqrt{m} - 6\right)m\right) - 1343\sqrt{\upsilon_2}\right)$$

$$\upsilon_{36} = -\frac{671790\alpha_6\beta_3 m^{\frac{3}{2}}\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)\sqrt{\upsilon_2}}{1343} \qquad (2.18)$$

ve

$$L_1 = \frac{14533803642\sqrt[3]{\text{Ή}_2+\sqrt{\text{Ή}_1}}\text{Ή}_3 + 2^{\frac{2}{3}}(\text{Ή}_2+\sqrt{\text{Ή}_1})^{2/3}}{14533803642\sqrt[3]{\text{Ή}_2+\sqrt{\text{Ή}_1}}}$$

$$+\frac{21659904\sqrt[3]{2}\beta_3^4 m^2(-300m^{\frac{3}{2}}+120m^{\frac{5}{2}}+120m^{\frac{3}{2}}+m^4-527m^3+1668m^2-527m-300\sqrt{m}+1)}{\sqrt[3]{\text{Ή}_2+\sqrt{\text{Ή}_1}}}$$

$$L_2 = -\frac{21659904\sqrt[3]{2}\beta_3^4 m^2(-300m^{\frac{3}{2}}+120m^{\frac{5}{2}}+120m^{\frac{3}{2}}+m^4-527m^3+1668m^2-527m-300\sqrt{m}+1)}{\sqrt[3]{\text{Ή}_2+\sqrt{\text{Ή}_1}}}$$

$$L_3 = -\text{Ή}_3 + \text{Ή}_5 - \frac{\sqrt[3]{\text{Ή}_2+\sqrt{\text{Ή}_1}}}{7266901821\sqrt[3]{2}}. \qquad (2.19)$$

Ayrıca burada

$$\text{Ή}_1 = (l_1+l_2)^2$$

$$-1559830657252674831101913621929823044280574365243801 6\ l_3^3$$

$$\text{Ή}_2 = l_1 + l_2$$

$$\text{Ή}_3 = \frac{112\beta_3^2 m(-64785m^{\frac{3}{2}} + 2377m^2 + 162848m - 64785\sqrt{m} + 2377)}{1803649}$$

$$\text{Ή}_4 = -\frac{2560\beta_3^3 m^{\frac{3}{2}}(\text{m}-6\sqrt{m}+1)(24105063m^{\frac{3}{2}}+1360496m^2-29163182m-24105063\sqrt{m}+1360496)}{2422300607}$$

$$\text{Ή}_5 = \frac{336\beta_3^2 \text{m}(-64785m^{\frac{3}{2}} + 2377m^2 + 162848m - 64785\sqrt{m} + 2377)}{1803649}$$

$$\text{Ή}_6 = \frac{\beta_3\sqrt{m}(934m - 1575\sqrt{m} + 934}{1343}$$

$$Ḧ_7 = \beta_3^3 m^3 \Big(1803649\kappa a_1 - 5a_6 \Big(33 \Big(-3083070396\, m^{\frac{3}{2}} + 1627672015\, m^2 + 1627672015 m - 220219314\sqrt{m} \Big) + 134082497 \Big) \Big)$$

$$Ḧ_8 = -a_6 \beta_3^3 m^3 \Big(21\kappa^2 \Big(200278380\, m^{\frac{3}{2}} - 28188806 m + 200278380\sqrt{m} + 26597711 \Big) - 36336186810\, m^{\frac{5}{2}} + 670412485\, m^3 \Big)$$

$$Ḧ_9 = -a_6 \beta_3^3 \kappa^2 m^3 \Big(9018245\, \kappa^4 + 558551931\, m^2 + 175563675\, \kappa^2 \big(m - 6\sqrt{m} + 1 \big) \Big)$$

$$Ḧ_{10} = -2\beta_3 m^2 \big(934m - 1575\sqrt{m} + 934 \big)$$

$$Ḧ_{11} = \frac{315 a_6 \beta_3^2 m^2 (67983516\, m^{\frac{3}{2}} - 202570982 m + 67983516\sqrt{m} - 4757425)}{1803649}$$

$$Ḧ_{12} = -\frac{15 a_6 \beta_3^2 m^2 (1803649\, \kappa^4 + 99905925\, m^2 + 23408490\, \kappa^2 (m - 6\sqrt{m} + 1))}{1803649}$$

$$Ḧ_{13} = 15 a_6 \beta_3 m^2 \Big(1343\kappa^2 + 2905 \big(m - 6\sqrt{m} + 1 \big) \Big). \qquad (2.20)$$

Burada

$$l_1 = 175203812481445986276188 16\ \beta_3^6 m^3 x \Big(-63770 m^{\frac{5}{2}} + 175210 m^{\frac{3}{2}} + 552758m3 + 993126m2 - 30523m + 12880m + 666$$

$$l_2 = 175203812481445986276188 16\ \beta_3^6 m^{13/2} \Big(666 m^{\frac{5}{2}} - 30523\, m^{\frac{3}{2}} + 12880 m^2 + 175210 m + 993126\sqrt{m} + 63770 \Big)$$

$$l_3 = \beta_3^4 m^2 \Big(-300 m^{\frac{7}{2}} + 120 m^{\frac{5}{2}} + 120 m^{\frac{3}{2}} + m^4 - 527 m^3 + 1668 m^2 - 527 m - 300\sqrt{m} + 1 \Big). \qquad (2.21)$$

Bu sonuçlar yardımıyla, (2.1) denklemi için elde edilen Jacobi eliptik fonksiyon çözümler aşağıdaki gibi listelenir:

$$q(x,t)=\left\{\begin{array}{c}\left(\acute{\mathrm{H}}_6-\frac{\sqrt{L_1}+\sqrt{\upsilon_1}}{2}\right)sn[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_{10}+1343m^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{L_1}+\sqrt{\upsilon_1}\right)}{2686m^2}\right)ns[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\-m^{\frac{3}{2}}\beta_3sn^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\beta_3ns^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\end{array}\right\}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_7+\acute{\mathrm{H}}_8+\acute{\mathrm{H}}_9+\upsilon_3+\upsilon_4+\upsilon_5+\upsilon_6+\upsilon_7+\upsilon_8+\upsilon_9}{1803649\,m^3\beta_3^3}\right)t+\theta\right\}\right], \tag{2.22}$$

$$q(x,t)=\left\{\begin{array}{c}\left(\acute{\mathrm{H}}_6-\frac{\sqrt{L_1}-\sqrt{\upsilon_1}}{2}\right)sn[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_{10}+1343\,m^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{L_1}-\sqrt{\upsilon_1}\right)}{2686\,m^2}\right)ns[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\-m^{\frac{3}{2}}\beta_3sn^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\beta_3ns^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\end{array}\right\}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_7+\acute{\mathrm{H}}_8+\acute{\mathrm{H}}_9+\upsilon_3+\upsilon_4+\upsilon_{14}+\upsilon_{15}+\upsilon_{16}+\upsilon_{17}+\upsilon_{18}}{1803649\,m^3\beta_3^3}\right)t+\theta\right\}\right], \tag{2.23}$$

$$q(x,t)=\left\{\begin{array}{c}\left(\acute{\mathrm{H}}_6+\frac{\sqrt{L_1}+\sqrt{\upsilon_2}}{2}\right)sn[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_{10}-1343m^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{L_1}-\sqrt{\upsilon_2}\right)}{2686m^2}\right)ns[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\-m^{\frac{3}{2}}\beta_3sn^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\beta_3ns^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\end{array}\right\}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_7+\acute{\mathrm{H}}_8+\acute{\mathrm{H}}_9+\upsilon_{20}+\upsilon_{21}+\upsilon_{22}+\upsilon_{23}+\upsilon_{24}+\upsilon_{25}+\upsilon_{26}}{1803649\,m^3\beta_3^3}\right)t+\theta\right\}\right], \tag{2.24}$$

$$q(x,t)=\left\{\begin{array}{c}\left(\acute{\mathrm{H}}_6+\frac{\sqrt{L_1}+\sqrt{\upsilon_2}}{2}\right)sn[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_{10}-1343m^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{L_1}+\sqrt{\upsilon_2}\right)}{2686m^2}\right)ns[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\-m^{\frac{3}{2}}\beta_3sn^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\beta_3ns^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\end{array}\right\}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_7+\acute{\mathrm{H}}_8+\acute{\mathrm{H}}_9+\upsilon_{20}+\upsilon_{21}+\upsilon_{31}+\upsilon_{32}+\upsilon_{33}+\upsilon_{34}+\upsilon_{35}}{1803649\,m^3\beta_3^3}\right)t+\theta\right\}\right]. \tag{2.25}$$

2.2.1.1. Soliton Çözümler

Bu bölümde; eliptik modülün sınır değerleri göz önüne alınarak, önceki bölümde listelenen çift periyodik fonksiyonlardan soliton çözümler elde edilecektir. (2.22)-(2.25) denklemlerinde m modülü 1'e yaklaşırken yani $m \to 1^{-}$ iken koyu-tekil birleşik dispersif solitonlar ortaya çıkar:

$$q(x,t) = \left\{ \begin{array}{c} \left(\acute{\mathrm{H}}_6 + \frac{\sqrt{L_1} + \sqrt{\upsilon_1}}{2} \right) tanh[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \\ + \left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_{10} + 1343\left(\sqrt{L_1} + \sqrt{\upsilon_1}\right)}{2686m^2} \right) coth[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \\ -\beta_3 tanh^3[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \\ +\beta_3 coth^3[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \end{array} \right\}$$

$$exp\left[i\left\{ -\kappa x + \left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_7 + \acute{\mathrm{H}}_8 + \acute{\mathrm{H}}_9 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + \upsilon_5 + \upsilon_6 + \upsilon_7 + \upsilon_8 + \upsilon_9}{1803649\ \beta_3^3} \right) t + \theta \right\} \right], \quad (2.26)$$

$$q(x,t) = \left\{ \begin{array}{c} \left(\acute{\mathrm{H}}_6 - \frac{\sqrt{L_1} - \sqrt{\upsilon_1}}{2} \right) tanh[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \\ + \left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_{10} + 1343\left(\sqrt{L_1} - \sqrt{\upsilon_1}\right)}{2686} \right) coth[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \\ -\beta_3 tanh^3[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \\ +\beta_3 coth^3[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \end{array} \right\}$$

$$exp\left[i\left\{ -\kappa x + \left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_7 + \acute{\mathrm{H}}_8 + \acute{\mathrm{H}}_9 + \upsilon_3 + \upsilon_4 + \upsilon_{14} + \upsilon_{15} + \upsilon_{16} + \upsilon_{17} + \upsilon_{18}}{1803649\ \beta_3^3} \right) t + \theta \right\} \right], \quad (2.27)$$

$$q(x,t) = \left\{ \begin{array}{c} \left(\acute{\mathrm{H}}_6 + \frac{\sqrt{L_1} - \sqrt{\upsilon_2}}{2} \right) tanh[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \\ + \left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_{10} - 1343\left(\sqrt{L_1} - \sqrt{\upsilon_2}\right)}{2686} \right) coth[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \\ -\beta_3 tanh^3[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \\ +\beta_3 coth^3[x - (a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 96\kappa^5 a_6)t] \end{array} \right\}$$

$$exp\left[i\left\{ -\kappa x + \left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_7 + \acute{\mathrm{H}}_8 + \acute{\mathrm{H}}_9 + \upsilon_{20} + \upsilon_{21} + \upsilon_{22} + \upsilon_{23} + \upsilon_{24} + \upsilon_{25} + \upsilon_{26}}{1803649\ \beta_3^3} \right) t + \theta \right\} \right], \quad (2.28)$$

$$q(x,t)=\left\{\begin{array}{c}\left(\acute{\mathrm{H}}_6+\frac{\sqrt{L_1}+\sqrt{\upsilon_2}}{2}\right)tanh[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_{10}-1343\left(\sqrt{L_1}+\sqrt{\upsilon_2}\right)}{2686}\right)coth[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\-\beta_3tanh^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\\+\beta_3coth^3[x-(a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3a_4-96\kappa^5a_6)t]\end{array}\right\}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{\acute{\mathrm{H}}_7+\acute{\mathrm{H}}_8+\acute{\mathrm{H}}_9+\upsilon_{20}+\upsilon_{21}+\upsilon_{31}+\upsilon_{32}+\upsilon_{33}+\upsilon_{34}+\upsilon_{35}}{1803649\ \beta_3^3}\right)t+\theta\right\}\right], \qquad (2.29)$$

3. YEREL OLMAYAN NONLİNEERLİĞE SAHİP YÜKSEK MERTEBELİ NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ

3.1. Ana Model

Tüm mertebeden dispersif terimlerinin varlığında nonlineer formuna sahip NLS denklemi boyutsuz formunda aşağıdaki gibidir (Biswas vd., 2019f):

$$iq_t + ia_1 q_x + a_2 q_{xx} + ia_3 q_{xxx} + a_4 q_{xxxx} + ia_5 q_{xxxxx} + a_6 q_{xxxxxx} + b\left(|q|^2\right)_{xx} q = 0 \quad (3.1)$$

şeklindedir. Burada (3.1) denkleminde $q(x,t)$, x ve t'nin sırasıyla bağımsız uzaysal ve zamansal değişkenler olduğu soliton moleküllerini temsil eder. İlk terim lineer zamansal gelişimi temsil eder. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ve a_6 modlar arası dağılım, grup hız dağılım, üçüncü dereceden dağılım, dördüncü dereceden dağılım, beşinci dereceden dağılım ve altıncı dereceden dağılım katsayılarıdır. Son olarak b, yerel olmayan nonlineerliğin katsayısıdır. Kompleks değerli $q(x,t)$ fonksiyonu, bağımlı değişkeni temsil eden dalga profilidir. Bu modelde, $i = \sqrt{-1}$ ve tüm katsayılar reel değerli sabitlerdir.

3.2. Matematiksel Analiz

(3.1) denklemini çözmek için, benimsenen hipotez aşağıdaki gibidir (Biswas vd., 2019f):

$$q(x,t) = g(\varsigma)e^{i\varphi(x,t)}. \quad (3.2)$$

Burada $g(\varsigma)$ dalganın şeklini temsil eder ve dalga değişkeni v soliton hızı olmak üzere

$$\varsigma = x - vt \quad (3.3)$$

şeklindedir. Ayrıca faz bileşeni

$$\varphi(x,t) = -\kappa x + \omega t + \theta \quad (3.4)$$

şeklinde yapılanır. Burada (3.4) denkleminde κ soliton frekansı, ω soliton dalga sayısı ve θ faz sabitidir. (3.2), (3.3) ve (3.4) denklemleri kullanılarak (3.1) denkleminde bulunan $q_x, q_{xx}, q_{xxx}, q_{xxxx}, q_{xxxxx}, q_{xxxxxx}, q_t$ ve $(|q|^2)_{xx}$ terimleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$q_x = g'e^{i\varphi} - i\kappa g e^{i\varphi}$$

$$q_{xx} = g'' e^{i\varphi} - i\kappa g e^{i\varphi} - i\kappa\left[g' e^{i\varphi} - i\kappa g e^{i\varphi}\right]$$

$$= [g'' - 2i\kappa g' - \kappa^2 g]e^{i\varphi}$$

$$q_{xxx} = -i\kappa[g'' - 2i\kappa g' - \kappa^2 g]e^{i\varphi} + [g''' - 2i\kappa g'' - \kappa^2 g']e^{i\varphi}$$

$$= [g''' - 3i\kappa g'' - 3\kappa^2 g' + i\kappa^3 g]e^{i\varphi},$$

$$q_{xxxx} = -i\kappa[g''' - 3i\kappa g'' - 3\kappa^2 g + i\kappa^3 g]e^{i\varphi} + \left[g^{(4)} - 3i\kappa g''' - 3\kappa^2 g + i\kappa^3 g'\right]e^{i\varphi}$$

$$= \left[g^{(4)} - 4i\kappa g''' - 6\kappa^2 g + 4i\kappa^3 g' + \kappa^4 g\right]e^{i\varphi},$$

$$q_{xxxxx} = -i\kappa\left[g^{(4)} - 4i\kappa g''' - 6\kappa^2 g'' + 4i\kappa^3 g' + \kappa^4 g\right]e^{i\varphi}$$
$$+ \left[g^{(5)} - 4i\kappa g^{(4)} - 6\kappa^2 g''' + 4i\kappa^3 g'' + \kappa^4 g'\right]e^{i\varphi}$$

$$= \left[g^{(5)} - 5i\kappa g^{(4)} - 4\kappa^2 g''' + 10i\kappa^3 g'' + 5\kappa^4 g' - i\kappa^5 g\right]e^{i\varphi},$$

$$q_{xxxxxx} = -i\kappa\left[g^{(5)} - 5i\kappa g^{(4)} - 4\kappa^2 g''' + 10i\kappa^3 g'' + 5\kappa^4 g' - i\kappa^5 g\right]e^{i\varphi}$$
$$+ \left[g^{(6)} - 5i\kappa g^{(5)} - 4\kappa^2 g^{(4)} + 10i\kappa^3 g''' + 5\kappa^4 g'' - i\kappa^5 g'\right]e^{i\varphi}$$

$$= \left[g^{(6)} - 6i\kappa g^{(5)} - 9\kappa^2 g^{(4)} + 14i\kappa^3 g''' + 15\kappa^4 g'' - 6i\kappa^5 g' - \kappa^6 g\right]e^{i\varphi},$$

$$q_t = -vg'e^{i\varphi} + i\omega g\varphi' e^{i\varphi}$$

$$(|q|^2)_{xx} = (g^2)_{xx}$$

$$= (2gg')_x$$

$$= 2(g')^2 + 2g^{(2)}g.$$

Bulunan sonuçlar

$$iq_t + ia_1 q_x + a_2 q_{xx} + ia_3 q_{xxx} + a_4 q_{xxxx} + ia_5 q_{xxxxx} + a_6 q_{xxxxxx} + b\left(|q|^2\right)_{xx} q = 0,$$

denkleminde yazılarak

$$[ig' - g\omega]e^{i\varphi} + ia_1[g' - i\kappa g]e^{i\varphi}$$

$$+a_2[g'' - 2i\kappa g' - \kappa^2 g]e^{i\varphi}$$

$$+ia_3[g''' - 3i\kappa g'' - 3\kappa^2 g' + i\kappa^3 g]e^{i\varphi}$$

$$+a_4\left[g^{(4)} - 4i\kappa g^{'''} - 6\kappa^2 g + 4i\kappa^3 g^{'} + \kappa^4 g\right]e^{i\varphi}$$

$$+ia_5\left[g^{(5)} - 5i\kappa g^{(4)} - 4\kappa^2 g^{'''} + 10i\kappa^3 g^{''} + 5\kappa^4 g^{'} - i\kappa^5 g\right]e^{i\varphi}$$

$$+a_6\left[g^{(6)} - 6i\kappa g^{(5)} - 9\kappa^2 g^{(4)} + 14i\kappa^3 g^{'''} + 15\kappa^4 g^{''} - 6i\kappa^5 g^{'} - \kappa^6 g\right]e^{i\varphi}$$

$$+b\left(2(g')^2 + 2g^{(2)}g\right)ge^{i\varphi} = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemelerle

$$\left\{\begin{array}{c} [ig^{'} - g\omega] + a_1[ig^{'} + \kappa g] + a_2[g^{''} - 2i\kappa g^{'} - \kappa^2 g] \\ +a_3[ig^{'''} + 3\kappa g^{''} - 3i\kappa^2 g^{'} - \kappa^3 g] \\ +a_4\left[g^{(4)} - 4i\kappa g^{'''} - 6\kappa^2 g + 4i\kappa^3 g^{'} + \kappa^4 g\right] \\ +a_5\left[ig^{(5)} + 5\kappa g^{(4)} - 4i\kappa^2 g^{'''} - 10\kappa^3 g^{''} + 5i\kappa^4 g^{'} + \kappa^5 g\right] \\ +a_6\left[g^{(6)} - 6i\kappa g^{(5)} - 9\kappa^2 g^{(4)} + 14i\kappa^3 g^{'''} + 15\kappa^4 g^{''} - 6i\kappa^5 g - \kappa^6 g\right] \\ +\left(2b(g')^2 g + 2g^{(2)}g^2\right) \end{array}\right\} e^{i\varphi} = 0$$

ve böylece

$$\begin{aligned}[-\omega + \kappa a_1 - \kappa^2 a_2 - \kappa^3 a_3 + \kappa^4 a_4 + \kappa^5 a_5 - \kappa^6 a_6]g \\ + [i + ia_1 - 2i\kappa a_2 - 3i\kappa^2 a_3 + 4i\kappa^3 a_4 + 5i\kappa^4 a_5 - 6i\kappa^5 a_6]g' \\ + [a_2 + 3\kappa a_3 - 6\kappa^2 a_4 - 10\kappa^3 a_5 + 15\kappa^4 a_6]g'' \\ + [ia_3 - 4i\kappa a_4 - 4i\kappa^2 a_5 + 14i\kappa^3 a_6]g''' + [a_4 + 5\kappa a_5 - 15\kappa^2 a_6]g^{(4)} \\ + [ia_5 - 5i\kappa a_6]g^{(5)} + [a_6]g^{(6)} + \left(2b(g')^2 g + 2g^{(2)}g^2\right) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1) denklemini sırayla reel ve imajiner kısımlarına ayırarak,

Reel kısım:

$$\begin{aligned}-\Big(\omega + \kappa\Big(\kappa\Big(a_2 + \kappa(a_3 - \kappa(a_4 + \kappa a_5) + \kappa^3 a_6)\Big)\Big)\Big)g \\ + \Big(a_2 + \kappa\big(3a_3 + \kappa(5\kappa(3a_6 - 2a_5) - 6a_4)\big)\Big)g'' \\ +\left[a_4 + 5\kappa a_5 - 15\kappa^2 a_6\right]g^{(4)} + [a_6]g^{(6)} + 2bg^2 g'' = 0. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

İmajiner kısım:

$$(v - a_1 + 2\kappa a_2 + 3\kappa^2 a_3 - 4\kappa^3 a_4 - 5\kappa^4 a_5 + 6\kappa^5 a_6)g$$
$$+\left(-a_3 + 2\kappa\left(2a_4 + 5\kappa(a_5 - 2\kappa a_6)\right)\right)g''$$
$$-(a_5 - 6\kappa a_6)g^{(4)} = 0. \tag{3.6}$$

(3.6) denkleminden

$$a_5 = 6\kappa a_6 \tag{3.7}$$

kısıtlama koşulu ve diğer koşullar

$$a_3 = 2\kappa\left(2a_4 + 5\kappa(a_5 - 2\kappa a_6)\right)$$
$$= \frac{4\kappa(3a_4 + 5\kappa a_5)}{3} \tag{3.8}$$

şeklinde ortaya çıkar. Böylece solitonun hızı aşağıdaki gibi bulunur:

$$v = a_1 - 2\kappa a_2 - 3\kappa^2 a_3 + 4\kappa^3 a_4 + 5\kappa^4 a_5 - 6\kappa^5 a_6$$
$$= a_1 - 2\kappa a_2 - 3\kappa^2\left[\frac{4\kappa(3a_4 + 5\kappa a_5)}{3}\right] + 4\kappa^3 a_4 + 5\kappa^4 a_5 - 6\kappa^5 \frac{a_5}{6\kappa}$$
$$= a_1 - 2\kappa a_2 - 12\kappa^3 a_4 - 20\kappa^4 a_5 + 4\kappa^3 a_4 + 5\kappa^4 a_5 - \kappa^4 a_5$$
$$= a_1 - 2\kappa\left(a_2 - 4\kappa^2 a_4 + 8\kappa^3 a_5\right). \tag{3.9}$$

Bu durumda reel kısım aşağıdaki gibi düzenlenir:

(3.5) denkleminde (3.7) ve (3.8) denklemleri yerine yazılarak

$$\kappa[6\omega - 6\kappa a_1 + 6\kappa^2 a_2 + 18\kappa^4 a_4 + 35\kappa^5 a_5]g$$
$$+\left[3\kappa\left(2a_2 + \kappa^2(12a_4 + 25\kappa a_5)\right)\right]g''$$
$$+[6\kappa a_4 + 15\kappa^2 a_5]g^{(4)} + [a_5]g^{(6)} + 12b\kappa g^2 g'' = 0 \tag{3.10}$$

elde edilir. Şimdi, sonraki bölümde genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılımı ile modele yüksek dereceli dispersif optik solitonlar ortaya çıkarmak için (3.10) denklemi incelenecektir (Petrović ve Bohra, 2016; Zhang H., 2007; Zhang Z. , 2015).

3.2.1. Genişletilmiş Jacobi Eliptik sn Fonksiyon Açılım Şeması

Modele soliton çözümler oluşturmak için (3.10) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi alınır (Biswas vd., 2019f):

$$g(x,t) = g(\varsigma) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j sn^j \varsigma + \sum_{j=1}^{N} \beta_j sn^{-j} \varsigma. \tag{3.11}$$

Burada a_0, a_j ve β_j $(j = 1,2,\dots,N)$ belirlenecek sabitlerdir. (3.10) denkleminde $g^2 g''$ ile $g^{(6)}$ dengelenerek yani bu terimler arasında balans işlemi yapılarak

$$2N + N + 2 = N + 6$$

$$2N = 4 \Rightarrow N = 2$$

elde edilir. Böylece formal çözüm

$$g(\varsigma) = \alpha_0 + \alpha_1 sn\varsigma + \alpha_2 sn^2\varsigma + \frac{\beta_1}{sn\,\varsigma} + \frac{\beta_2}{sn^2\varsigma}, \tag{3.12}$$

şeklini alır. (3.12) denklemi (3.10) denkleminde yazılarak ve elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek aşağıdaki çözüm setleri elde edilir.

Set-1

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -\beta_2 m, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \beta_2,$$

$$\omega = \frac{1260\alpha_1\kappa + b\beta_2^2(25\kappa^6 - 336\kappa^4 + 560\kappa^2 + 768m^3 + 80(7\kappa^2 + 36)m^2 - 16ml_1 + 768)}{1260},$$

$$\alpha_2 = -\frac{b\beta_2^2(75\kappa^4 - 672\kappa^2 + 560m^2 - 112(6\kappa^2 + 35)\mathrm{m} + 560)}{1260},$$

$$\alpha_4 = -\frac{b\beta_2^2(-75\kappa^2 + 112\mathrm{m} + 112)}{1260},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\kappa\beta_2^2}{42}. \tag{3.13}$$

Set-2

$$\alpha_0 = -\frac{2(\beta_2(m^3 + 23m^2 + 23m + 1) + l_2)}{7l_9},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \beta_2 m, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \beta_2,$$

$$\omega = \frac{8820\kappa a_1 l_9^2 + b\beta_2(\beta_2(-48m^5 l_4 + m^4 l_5 + 4m^3 l_7 + 6m^2 l_8 + 4ml_6 + l_{10}) - 96l_2 l_3)}{8820 l_9^2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{b\beta_2(\beta_2(3m^4 l_{12} + 4m^3 l_{14} + 6m^2 l_{15} + 12\mathrm{m} l_{13} + l_{16}) - 96 l_2 l_{11})}{8820 l_9^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{b\beta_2(\beta_2(75\kappa^2 - 16m^3 + (75\kappa^2 + 528)m^2 + 6(175\kappa^2 + 88)\mathrm{m} - 16) + 96 l_2)}{1260 l_9},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\kappa\beta_2^2}{42}. \qquad (3.14)$$

Set-3

$$\alpha_0 = -\frac{\beta_2(4m^3 + m^2 + m + l_{18} + 4)}{14 l_{17}},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \beta_2,$$

$$\omega = \frac{8820\kappa a_1 l_{17}^2 + b\beta_2^2(m^4 \upsilon_1 - 2m^3 \upsilon_4 + 3m^2 \upsilon_3 - 2m\upsilon_2 + l_{19} + \upsilon_5)}{8820 l_{17}^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{b\beta_2^2(2m^3 \upsilon_6 - 3m^2 \upsilon_8 + 6m\upsilon_7 - 336\kappa^2(3l_{18} - 2) + 40(3l_{18} - 86) + l_{20})}{8820\, l_{17}^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{b\beta_2^2(75\kappa^2 - 16m^3 + 3(25\kappa^2 + 8)m^2 + (24 - 75\kappa^2)\mathrm{m} + 24 l_{18} - 16)}{1260 l_{17}},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\kappa\beta_2^2}{42}. \qquad (3.15)$$

Set-4

$$\alpha_0 = -\frac{\alpha_2(4m^3 + m^2 + m + l_{18} + 4)}{14 m l_{17}},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0,$$

$$\omega = \frac{8820\kappa m^2 a_1 l_{17}^2 + b\alpha_2^2(m^4 \upsilon_1 - 2m^3 \upsilon_4 + 3m^2 \upsilon_3 - 2m\upsilon_2 + l_{19} + \upsilon_5)}{8820 l_{17}^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{b\alpha_2^2(2m^3 \upsilon_6 - 3m^2 \upsilon_8 + 6m\upsilon_7 - 336\kappa^2(3l_{18} - 2) + 40(3l_{18} - 86) + l_{20})}{8820 m^2 l_{17}^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{b\alpha_2^2(75\kappa^2 - 16m^3 + 3(25\kappa^2 + 8)m^2 + (24 - 75\kappa^2)\mathrm{m} + 24 l_{18} - 16)}{1260 m^2 l_{17}},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\kappa\beta_2^2}{42m^2}. \tag{3.16}$$

Burada

$$\upsilon_1 = 175\kappa^6 + 840\kappa^4 + 20100\kappa^2 - 672(l_{18} + 10)$$

$$\upsilon_2 = 175\kappa^6 + 84\kappa^4(3l_{18} - 5) + \kappa^2(5160 - 90l_{18}) - 672(l_{18} - 7)$$

$$\upsilon_3 = 175\kappa^6 + 56\kappa^4(3l_{18} - 2) + 20\kappa^2(6l_{18} + 335) - 672(l_{18} - 6)$$

$$\upsilon_4 = 175\kappa^6 + 168\kappa^4 + 20\kappa^2(3l_{18} + 575) - 672(l_{18} - 5)$$

$$\upsilon_5 = 168\kappa^4(3l_{18} - 2) - 40\kappa^2(3l_{18} - 86) - 672(l_{18} - 4)$$

$$\upsilon_6 = 525\kappa^4 + 336\kappa^2 + 60l_{18} + 11500$$

$$\upsilon_7 = 175\kappa^4 + 56\kappa^2(3l_{18} - 5) - 30l_{18} + 1720$$

$$\upsilon_8 = 525\kappa^4 + 112\kappa^2(3l_{18} - 2) + 60l_{18} + 6700 \tag{3.17}$$

$$l_1 = 21\kappa^4 + 245\kappa^2 - 180$$

$$l_2 = \sqrt{\beta_2^2(m^6 + 39m^5 + 603m^4 + 2810m^3 + 603m^2 + 39m + 1}$$

$$l_3 = -21\kappa^4 + 5\kappa^2 + 28m^4 + m^3(5\kappa^2 + 784) - 3m^2(7\kappa^4 + 55\kappa^2 - 1848) + m(-294\kappa^4 - 165\kappa^2 + 784) + 28$$

$$l_4 = 7\kappa^4 + 2830\kappa^2 + 42504$$

$$l_5 = 175\kappa^6 + 6384\kappa^4 + 2067600\kappa^2 - 19969152$$

$$l_6 = 1225\kappa^6 + 1596\kappa^4 + 33960\kappa^2 - 3360$$

$$l_7 = 1225\kappa^6 + 41496\kappa^4 + 2419120\kappa^2 - 4992288$$

$$l_8 = 5775\kappa^6 + 27664\kappa^4 + 344600\kappa^2 - 340032$$

$$l_9 = m^2 + 14m + 1$$

$$l_{10} = 175\kappa^6 - 36\kappa^4 + 3440\kappa^2 + 2688m^7 + 80m^6(43\kappa^2 - 68) + 2688$$

$$l_{11} = -42\kappa^2 + 5m^3 - 3m^2(14\kappa^2 + 55) - 3m(196\kappa^2 + 55) + 5$$

$$l_{12} = 175\kappa^4 + 4256\kappa^2 + 689200$$

$$l_{13} = 1225\kappa^4 + 1064\kappa^2 + 11320$$

$$l_{14} = 3675\kappa^4 + 82992\kappa^2 + 2419120$$

$$l_{15} = 17325\kappa^4 + 55328\kappa^2 + 344600$$

$$l_{16} = 525\kappa^4 - 672\kappa^2 + 3440m^6 - 96m^5(7\kappa^2 - 1415) + 3440$$

$$l_{17} = m^2 - m + 1$$

$$l_{18} = \sqrt{16m^6 - 48m^5 + 93m^4 - 106m^3 + 93m^2 - 48m + 16}$$

$$l_{19} = 175\kappa^6 + 2688m^7 + 16m^6(215\kappa^2 - 588) - 48m^5(7\kappa^4 + 215\kappa^2 - 252)$$

$$l_{20} = -525\kappa^4 - 3440m^6 + 48m^5(215\kappa^2 - 588) - 15m^4(35\kappa^4 + 112\kappa^2 + 1340) \quad (3.18)$$

Sonuç olarak aşağıda listelenen Jacobi eliptik fonksiyon çözümler elde edilir:

$$q(x,t) = \begin{Bmatrix} -m\beta_2 sn^2[x - \{a_1 - 2\kappa(a_2 + 4\kappa^2 a_4 + 8\kappa^3 a_5)\}t] \\ +\beta_2 ns^2[x - \{a_1 - 2\kappa(a_2 + 4\kappa^2 a_4 + 8\kappa^3 a_5)\}t] \end{Bmatrix}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{1260\,\kappa\alpha_1 + b\beta_2^2(25\kappa^6 - 336\,\kappa^4 + 560\,\kappa^2 + 768\,m^3 + 80(7\kappa^2 + 36)m^2 - 16\,m\,l_1 + 768}{1260}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (3.19)$$

$$q(x,t) = \begin{Bmatrix} -\dfrac{2(\beta_2(m^3 + 23m^2 + 23m + 1) + l_2)}{7l_9} \\ +m\beta_2 sn^2[x - \{a_1 - 2\kappa(a_2 + 4\kappa^2 a_4 + 8\kappa^3 a_5)\}t] \\ +\beta_2 ns^2[x - \{a_1 - 2\kappa(a_2 + 4\kappa^2 a_4 + 8\kappa^3 a_5)\}t] \end{Bmatrix}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{1260\,\kappa\alpha_1 l_9^2 + b\beta_2(\beta_2(-48m^5 l_4 + m^4 l_5 + 4m^3 l_7 + 6m^2 l_8 + 4m\,l_6 + l_{10}) - 96 l_2 l_3}{8820\,l_9^2}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (3.20)$$

$$q(x,t) = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\beta_2(4m^3 + m^2 + m + l_{18} + 4)}{14l_{17}} \\ +\beta_2 ns^2[x - \{a_1 - 2\kappa(a_2 + 4\kappa^2 a_4 + 8\kappa^3 a_5)\}t] \end{Bmatrix}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{8820\,\kappa\alpha_1 l_{17}^2 + b\beta_2^2(m^4\upsilon_1 - 2m^3\upsilon_4 + 3m^2\upsilon_3 - 2m\upsilon_2 + l_{19} + \upsilon_5)}{8820\,l_{17}^2}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (3.21)$$

$$q(x,t)=\left\{-\frac{\alpha_2\left(4m^3+m^2+m+l_{18}+4\right)}{14l_{17}}+\alpha_2 sn^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{8820\kappa\alpha_1l_{17}^2+b\alpha_2^2(m^4\upsilon_1-2m^3\upsilon_4+3m^2\upsilon_3-2m\upsilon_2+l_{19}+\upsilon_5)-96l_2l_3}{8820m^2l_{17}^2}\right)t+\theta\right\}\right].(3.22)$$

3.2.1.1. Soliton Çözümler

Bu bölümde; eliptik modülün sınır değerleri göz önüne alınarak, önceki bölümde listelenen çift periyodik fonksiyonlardan soliton çözümler elde edilecektir. (3.19)-(3.22) denklemlerinde m modülü 1'e yaklaşırken yani $m\to 1^-$ iken koyu-tekil birleşik dispersif solitonlar ortaya çıkar:

$$q(x,t)=\beta_2(coth^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]$$
$$-tanh^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t])$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(a_1\kappa+\frac{b\beta_2^2(25\kappa^6-672\kappa^4-2800\kappa^2+7296)}{1260}\right)t+\theta\right\}\right], \quad (3.23)$$

$$q(x,t)=4\beta_2 csch^2[2(x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t)]$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(a_1\kappa+\frac{b\beta_2^2(25\kappa^6-1344\kappa^4+8960\kappa^2-49152}{1260}\right)t+\theta\right\}\right], \quad (3.24)$$

$$q(x,t)=\beta_2 csch^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(a_1\kappa+\frac{b\beta_2^2(25\kappa^6+336\kappa^4+560\kappa^2-768)}{1260}\right)t+\theta\right\}\right], \quad (3.25)$$

$$q(x,t)=-\alpha_2 sech[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(a_1\kappa+\frac{b\beta_2^2(25\kappa^6+336\kappa^4+560\kappa^2-768)}{1260}\right)t+\theta\right\}\right]. \quad (3.26)$$

3.2.2. Genişletilmiş Jacobi Eliptik cn Fonksiyon Açılım Şeması

Modele soliton çözümler oluşturmak için (3.10) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi alınır (Biswas vd., 2019f):

$$g(x,t)=g(\varsigma)=\sum_{j=0}^{N}\alpha_j\, cn^j\varsigma+\sum_{j=1}^{N}\beta_j\, cn^{-j}\varsigma. \quad (3.27)$$

Burada a_0, a_j ve β_j $(j = 1,2, \dots, N)$ belirlenecek sabitlerdir. (3.10) denkleminde $g^{(6)}$ ile $g(g')^2$ veya $g^2 g''$ dengelenerek yani bu terimler arasında balans işlemi yapılarak

$3N + 2 = N + 6$

$2N = 4 \Rightarrow N = 2$

elde edilir. Böylece formal çözüm

$$g(\varsigma) = \alpha_0 + \alpha_1 cn\varsigma + \alpha_2 cn^2\varsigma + \frac{\beta_1}{cn\,\varsigma} + \frac{\beta_2}{cn^2\varsigma}, \tag{3.28}$$

şeklini alır. (3.28) denklemi (3.10) denkleminde yazılarak ve elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek aşağıdaki çözüm setleri elde edilir.

Set-1

$$\alpha_0 = -\frac{\alpha_2(10m^3 - 15m^2 + 13m + l_1 - 4)}{14ml_2},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0,$$

$$\omega = \frac{8820\alpha_1\kappa m^2 l_2^2 + b\alpha_2^2(m^4\upsilon_1 + 2m^3\upsilon_2 - 3m^2\upsilon_3 + 2m\upsilon_4 + l_3 + \upsilon_5)}{8820m^2 l_2^2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{b\alpha_2^2\left(15m^4 l_5 - 2m^3 l_8 + 3m^2 l_7 - 30ml_6 + 12l_1 l_4 + l_9\right)}{8820m^2 l_2^2},$$

$$\alpha_4 = -\frac{b\alpha_2^2(75\kappa^2 - 16m^3 + 3(25\kappa^2 + 8)m^2 + (24 - 75\kappa^2)m - 24l_1 - 16)}{1260m^2 l_2},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\alpha_2^2\kappa}{42m^2}. \tag{3.29}$$

Set-2

$$\alpha_0 = -\frac{2(\alpha_2(48m^3 - 72m^2 + 26m - 1) + l_{10})}{7ml_{11}},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{\alpha_2(m-1)}{m},$$

$$\omega = \frac{8820\alpha_1\kappa m^2 l_{11}^2 + b\alpha_2(\alpha_2(-512m^3 l_{16} + 96m^2 l_{17} - 32m l_{15} + l_{18} + \upsilon_6) + 96 l_{10} l_{12})}{8820 m^2 l_{11}^2}$$

$$\alpha_2 = -\frac{b\alpha_2(\alpha_2\,(3840m^4 l_{20} - 2560m^3 l_{21} + 480m^2 l_{23} - 96m l_{22} + l_{24}) + 96 l_{10} l_{19})}{8820 m^2 l_{11}^2},$$

$$\alpha_4 = -\frac{b\alpha_2(\alpha_2(-75\kappa^2+1024m^3-48(25\kappa^2+32)m^2+240(5\kappa^2+2)m+16)+96 l_{10})}{1260 m^2 l_{11}},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\alpha_2^2\kappa}{42m^2}. \tag{3.30}$$

Set-3

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = -\frac{\alpha_2(m-1)}{m},$$

$$\omega = \frac{1260 a_1\kappa m^2 + b\alpha_2^2(25\kappa^6 - 336\kappa^4 + 560\kappa^2 - 7296m^3 + l_{25} + l_{26} + 768)}{1260 m^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{b\alpha_2^2(-75\kappa^4 + 672\kappa^2 + 2800m^2 - 112(12\kappa^2+25)m - 560)}{1260 m^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{b\alpha_2^2(75\kappa^2 + 224m - 112)}{1260 m^2},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\alpha_2^2\kappa}{42m^2}. \tag{3.31}$$

Set-4

$$\alpha_0 = -\frac{\beta_2(10m^3 - 15m^2 + 13m + l_1 - 4)}{14 l_{27}},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \beta_2,$$

$$\omega = \frac{8820 a_1\kappa l_{27}^2 + b\beta_2^2(m^4\upsilon_1 + 2m^3\upsilon_2 - 3m^2\upsilon_3 + 2m\upsilon_4 + l_3 + \upsilon_5)}{8820(m-1)^2 l_2^2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{b\beta_2^2(15m^4 l_5 - 2m^3 l_8 + 3m^2 l_7 - 30m l_6 + 12 l_1 l_4 + l_9)}{8820(m-1)^2 l_2^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{b\beta_2^2(75\kappa^2 - 16m^3 + 3(25\kappa^2+8)m^2 + (24 - 75\kappa^2)\mathrm{m} - 24 l_1 - 16)}{1260\,(m-1)^2 l_2},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\beta_2^2\kappa}{42(m-1)^2}. \tag{3.32}$$

Burada

$$\upsilon_1 = 175\kappa^6 + 840\kappa^4 + 20100\kappa^2 + 672(l_1 - 10)$$

$$\upsilon_2 = -175\kappa^6 - 168\kappa^4 + 20\kappa^2(3l_1 - 575) - 672(l_1 + 5)$$

$$\upsilon_3 = -175\kappa^6 + 56\kappa^4(3l_1 + 2) + 20\kappa^2(3l_1 - 335) - 672(l_1 + 6)$$

$$\upsilon_4 = -175\kappa^6 + 84\kappa^4(3l_1 + 5) - 30\kappa^2(3l_1 + 172) - 672(l_1 + 7)$$

$$\upsilon_5 = -168\kappa^4(3l_1 + 2) + 40\kappa^2(3l_1 + 86) + 672(l_1 + 4)$$

$$\upsilon_6 = 1280m^4 l_{14} - 49152m^5 l_{13} \tag{3.33}$$

$$l_1 = \sqrt{16m^6 - 48m^5 + 93m^4 - 106m^3 + 93m^2 - 48m + 16}$$

$$l_2 = m^2 - m + 1$$

$$l_3 = 175\kappa^6 + 2688m^7 + 16m^6(215\kappa^2 - 588) - 48m^5(7\kappa^4 + 215\kappa^2 - 252)$$

$$l_4 = -84\kappa^2 + 10m^3 - 3m^2(28\kappa^2 + 5) + 3m(28\kappa^2 - 5) + 10$$

$$l_5 = 35\kappa^4 + 112\kappa^2 + 1340$$

$$l_6 = 35\kappa^4 - 56\kappa^2 + 344$$

$$l_7 = 525\kappa^4 - 224\kappa^2 + 6700$$

$$l_8 = 525\kappa^4 + 336\kappa^2 + 11500$$

$$l_9 = 525\kappa^4 - 672\kappa^2 + 3440m^6 - 48m^5(14\kappa^2 + 215) + 3440$$

$$l_{10} = \sqrt{\alpha_2^2(4096m^6 - 12288m^5 + 13056m^4 - 5632m^3 + 813m^2 - 45m + 1)}$$

$$l_{11} = 16m^2 - 16m + 1$$

$$l_{12} = -21\kappa^4 + 5\kappa^2 + 7168m^4 + 64m^3(5\kappa^2 - 244) - 48m^2(7\kappa^4 + 10\kappa^2 - 168) + 2m(168\kappa^4 + 75\kappa^2 - 448) + 28$$

$$l_{13} = 7\kappa^4 + 860\kappa^2 - 4116$$

$$l_{14} = 35\kappa^6 + 672\kappa^4 + 35088\kappa^2 - 94080$$

$$l_{15} = 175\kappa^6 + 147\kappa^4 + 4890\kappa^2 + 168$$

$$l_{16} = 175\kappa^6 + 1365\kappa^4 + 37840\kappa^2 - 59136$$

$$l_{17} = 525\kappa^6 + 1960\kappa^4 + 29150\kappa^2 - 21504$$

$$l_{18} = 175\kappa^6 - 336\kappa^4 + 3440\kappa^2 + 44040192m^7 + 65536m^6(215\kappa^2 - 2352) + 2688$$

$$l_{19} = -42\kappa^2 + 320m^3 + 96m^2(7\kappa^2 + 5) + 6m(112\kappa^2 + 25) + 5$$

$$l_{20} = 35\kappa^4 + 448\kappa^2 + 11696 \qquad (3.34)$$

$$l_{21} = 105\kappa^4 + 546\kappa^2 + 7568$$

$$l_{22} = 175\kappa^4 + 98\kappa^2 + 1630$$

$$l_{23} = 315\kappa^4 + 784\kappa^2 + 5830$$

$$l_{24} = 525\kappa^4 - 672\kappa^2 + 14090240m^6 - 98304m^5(7\kappa^2 + 430) + 3440$$

$$l_{25} = 16m(42\kappa^4 + 175\kappa^2 - 324)$$

$$l_{26} = -16m^2(175\kappa^2 - 684)$$

$$l_{27} = m^3 - 2m^2 + 2m - 1 \qquad (3.35)$$

Bu sonuçlar yardımıyla, (3.1) denkleminin Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri aşağıdaki gibi listelenir:

$$q(x,t) = \left\{ -\frac{\alpha_2(10m^3 - 15m^2 + 13m + l_2 - 1)}{14ml_2} + \alpha_2 cn^2[x - \{a_1 - 2\kappa(a_2 + 4\kappa^2 a_4 + 8\kappa^3 a_5)\}t] \right\}$$

$$exp\left[i\left\{ -\kappa x + \left(\frac{8820\,\alpha_1 \kappa m^2 l_2^2 + b\alpha_2^2(m^4 \upsilon_1 + 2m^3 \upsilon_2 - 3m^2 \upsilon_3 + 2m\upsilon_4 + l_3 + \upsilon_5) - 96 l_2 l_3}{8820\, m^2 l_2^2} \right) \right) t + \theta \right\}\Big], \qquad (3.36)$$

$$q(x,t)=\left\{-\frac{2(\alpha_2(48m^3-72m^2+26m-1)+l_{10})}{7ml_{11}}\right.$$
$$+\alpha_2 cn^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]$$
$$\left.+\frac{\alpha_2(m-1)}{m}nc^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{8820\,\alpha_1\kappa m^2l_{11}^2+b\alpha_2(\alpha_2(-512\,m^3l_{16}+96m^2l_{17}-32ml_{15}+l_{18}+\upsilon_6)+96l_{10}l_{12}}{8820\,m^2l_{11}^2}\right)t+\theta\right\}\right],\tag{3.37}$$

$$q(x,t)=\left\{\alpha_2 cn^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_2(m-1)}{m}nc^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{1260\,\alpha_1\kappa m^2+b\alpha_2^2(25\kappa^6-336\,\kappa^4+560\,\kappa^2-7296\,m^3+l_{25}+l_{26}+768)}{1260\,m^2}\right)t+\theta\right\}\right],\tag{3.38}$$

$$q(x,t)=\left\{-\frac{\beta_2(10m^3-15m^2+13m+l_1-4)}{14l_{27}}\right.$$
$$\left.+\beta_2 nc^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{8820\,\alpha_1\kappa l_{27}^2+b\beta_2^2(m^4\upsilon_1+2m^3\upsilon_2-3m^2\upsilon_3+2m\upsilon_4+l_3+\upsilon_5)}{8820\,(m-1)^2l_2^2}\right)t+\theta\right\}\right].\tag{3.39}$$

3.2.2.1. Soliton çözümler

$m\to 1^-$ için, parlak dispersif soliton çözümler ortaya çıkar:

$$q(x,t)=\alpha_2\left(-\frac{4}{7}+sech^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right)$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(a_1\kappa+\frac{b\kappa^2\alpha_2^2(35\kappa^4-336\,\kappa^2+592}{1764}\right)t+\theta\right\}\right],\tag{3.40}$$

$$q(x,t)=\alpha_2 sech^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(a_1\kappa+\frac{b\alpha_2^2(25\kappa^6+336\kappa^4+560\,\kappa^2-768}{1260}\right)t+\theta\right\}\right].\tag{3.41}$$

3.2.3. Genişletilmiş Jacobi Eliptik dn Fonksiyon Açılım Şeması

Modele soliton çözümler oluşturmak için (3.10) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi alınır (Biswas vd., 2019f):

$$g(x,t) = g(\varsigma) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j dn^j \varsigma + \sum_{j=1}^{N} \beta_j dn^{-j} \varsigma. \tag{3.42}$$

Burada a_0, a_j ve β_j $(j = 1,2,\dots,N)$ belirlenecek sabitlerdir. (3.10) denkleminde $g^{(6)}$ ile $g(g')^2$ veya $g^2 g''$ dengelenerek yani bu terimler arasında balans işlemi yapılarak

$$3\mathrm{N} + 2 = \mathrm{N} + 6$$

$$2\mathrm{N} = 4 \Rightarrow \mathrm{N} = 2$$

elde edilir. Böylece formal çözüm

$$\mathrm{g}(\varsigma) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{dn}\varsigma + \alpha_2 \mathrm{dn}^2\varsigma + \frac{\beta_1}{\mathrm{dn}\,\varsigma} + \frac{\beta_2}{\mathrm{dn}^2\varsigma}, \tag{3.43}$$

şeklini alır. (3.43) denklemi (3.10) denkleminde yazılarak ve elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek aşağıdaki çözüm setleri elde edilir.

Set-1

$$\alpha_0 = -\frac{\alpha_2(-4m^3 + 13m^2 - 15m + l_1 + 10)}{14 l_2},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0,$$

$$\omega = \frac{8820 a_1 \kappa l_2^2 + b\alpha_2^2(m^4 \upsilon_1 + 2m^3 \upsilon_2 - 3m^2 \upsilon_3 + 2m\upsilon_4 + l_3 + \upsilon_5)}{8820 l_2^2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{b\alpha_2^2(15m^4 l_5 - 2m^3 l_7 + 3m^2 l_6 - 30\mathrm{m} l_4 + 12 l_1 l_8 + l_9)}{8820 l_2^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{b\alpha_2^2(75\kappa^2 - 16m^3 + 3(25\kappa^2 + 8)m^2 + (24 - 75\kappa^2)\mathrm{m} - 24 l_1 - 16)}{1260 l_2},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\alpha_2^2 \kappa}{42}. \tag{3.44}$$

Set-2

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \alpha_2(m-1),$$

$$\omega = \frac{1260a_1\kappa + b\alpha_2^2(25\kappa^6 + 672\kappa^4 - 2800\kappa^2 + 768m^3 + l_{10} + l_{11} - 7296)}{1260},$$

$$\alpha_2 = -\frac{b\alpha_2^2(75\kappa^4 + 1344\kappa^2 + 560m^2 - 112(6\kappa^2 - 25)\mathrm{m} - 2800)}{1260},$$

$$\alpha_4 = -\frac{b\alpha_2^2(-75\kappa^2 + 112\mathrm{m} - 224)}{1260},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\alpha_2^2\kappa}{42}. \tag{3.45}$$

Set-3

$$\alpha_0 = \frac{2(l_{12} - \alpha_2(m^3 - 26m^2 + 72m - 48)}{7l_{13}},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_2, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \alpha_2(m-1),$$

$$\omega = \frac{8820a_1\kappa l_{13}^2 + ba_2(a_2(m^4 l_{17} + 96m^2 l_{20} - 512ml_{18} + 256l_{19} + \upsilon_6) + 96l_{12}l_{14})}{8820l_{13}^2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{b\alpha_2(\alpha_2(3m^4 l_{24} - 160m^3 l_{23} + 480m^2 l_{25} - 7680ml_{22} + 256l_{26} + l_{27}) + 96l_{12}l_{21})}{8820\, l_{13}^2},$$

$$\alpha_4 = -\frac{b\alpha_2(\alpha_2(16(64 - 75\kappa^2) + 16m^3 + (480 - 75\kappa^2)m^2 + 48(25\kappa^2 - 32)\mathrm{m}) + 96l_{12})}{1260\, l_{13}},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\alpha_2^2\kappa}{42}. \tag{3.46}$$

Set-4

$$\alpha_0 = -\frac{\beta_2(4m^3 - 13m^2 + 15m + l_1 - 10)}{14l_{28}},$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \beta_2,$$

$$\omega = \frac{8820a_1\kappa m^2 l_{28}^2 + b\beta_2^2(m^4\upsilon_7 - 2m^3\upsilon_{10} + 3m^2\upsilon_9 - 2m\upsilon_8 + l_3 + \upsilon_{11})}{8820(m-1)^2 l_2^2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{b\beta_2^2(15m^4 l_5 - 2m^3 l_7 + 3m^2 l_6 - 30ml_4 - 12l_1 l_8 + l_9)}{8820(m-1)^2 l_2^2},$$

$$\alpha_4 = \frac{b\beta_2^2(75\kappa^2 - 16m^3 + 3(25\kappa^2 + 8)m^2 + (24 - 75\kappa^2)\mathrm{m} + 24l_1 - 16)}{1260(m-1)^2 l_2},$$

$$\alpha_5 = -\frac{b\beta_2^2\kappa}{42(m-1)^2}. \qquad (3.47)$$

Burada

$$\upsilon_1 = 175\kappa^6 + 840\kappa^4 + 20100\kappa^2 + 672(l_1 - 10)$$

$$\upsilon_2 = -175\kappa^6 - 168\kappa^4 + 20\kappa^2(3l_1 - 575) - 672(l_1 + 5)$$

$$\upsilon_3 = -175\kappa^6 + 56\kappa^4(3l_1 + 2) + 20\kappa^2(3l_1 - 335) - 672(l_1 + 6)$$

$$\upsilon_4 = -175\kappa^6 + 84\kappa^4(3l_1 + 5) - 30\kappa^2(3l_1 + 172) - 672(l_1 + 7)$$

$$\upsilon_5 = -168\kappa^4(3l_1 + 2) + 40\kappa^2(3l_1 + 86) + 672(l_1 + 4)$$

$$\upsilon_6 = 2688m^7 + 16m^6(215\kappa^2 - 336) - 48m^5 l_{15} - 160m^3 l_{16}$$

$$\upsilon_7 = 175\kappa^6 + 8400\kappa^4 + 20100\kappa^2 - 672(l_1 + 10)$$

$$\upsilon_8 = 175\kappa^6 + 84\kappa^4(3l_1 - 5) + \kappa^2(5160 - 90l_1) - 672(l_1 - 7)$$

$$\upsilon_9 = 175\kappa^6 + 56\kappa^4(3l_1 - 2) + 20\kappa^2(3l_1 + 335) - 672(l_1 - 6)$$

$$\upsilon_{10} = 175\kappa^6 + 168\kappa^4 + 20\kappa^2(3l_1 + 575) - 672(l_1 - 5)$$

$$\upsilon_{11} = -336\kappa^4 + 3440\kappa^2 + 24(21\kappa^4 - 5\kappa^2 - 28)l_1 + 2688 \qquad (3.48)$$

$$l_1 = \sqrt{16m^6 - 48m^5 + 93m^4 - 106m^3 + 93m^2 - 48m + 16}$$

$$l_2 = m^2 - m + 1$$

$$l_3 = 175\kappa^6 + 2688m^7 + 16m^6(215\kappa^2 - 588) - 48m^5(7\kappa^4 + 215\kappa^2 - 252)$$

$$l_4 = 35\kappa^4 - 56\kappa^2 + 344$$

$$l_5 = 35\kappa^4 + 112\kappa^2 + 1340$$

$$l_6 = 35\kappa^4 - 224\kappa^2 + 6700$$

$$l_7 = 525\kappa^4 + 336\kappa^2 + 11500$$

$$l_8 = -84\kappa^2 + 10m^3 - 3m^2(28\kappa^2 + 5) + 3m(28\kappa^2 - 5) + 10$$

$$l_9 = 525\kappa^4 - 672\kappa^2 + 3440m^6 - 48m^5(14\kappa^2 + 215) + 3440$$

$$l_{10} = 16m^2(35\kappa^2 - 324)$$

$$l_{11} = -16m(21\kappa^4 - 175\kappa^2 - 684)$$

$$l_{12} = \sqrt{\alpha_2^2(m^6 - 45m^5 + 813m^4 - 5632m^3 + 13056m^2 - 12288m + 4096)}$$

$$l_{13} = m^2 - 16m + 16$$

$$l_{14} = -336\kappa^4 + 320\kappa^2 + 28m^4 + m^3(5\kappa^2 - 896) + m^2(-21\kappa^4 + 150\kappa^2 + 8064) + 16m(21\kappa^4 - 30\kappa^2 - 896) + 7168$$

$$l_{15} = 7\kappa^4 + 3260\kappa^2 + 43008$$

$$l_{16} = 35\kappa^6 - 1176\kappa^4 + 121088\kappa^2 + 752640$$

$$l_{17} = 175\kappa^6 - 4704\kappa^4 + 2798400\kappa^2 + 30277632$$

$$l_{18} = 175\kappa^6 - 1680\kappa^4 + 82560\kappa^2 + 301056$$

$$l_{19} = 175\kappa^6 - 1344\kappa^4 + 55040\kappa^2 + 172032$$

$$l_{20} = 525\kappa^6 - 7280\kappa^4 + 46840\kappa^2 + 2107392 \tag{3.49}$$

$$l_{21} = -672\kappa^2 + 5m^3 - 6m^2(7\kappa^2 - 25) + 96m(7\kappa^2 - 5) + 320$$

$$l_{22} = 35\kappa^4 - 224\kappa^2 + 5504$$

$$l_{23} = 105\kappa^4 - 2352\kappa^2 + 121088$$

$$l_{24} = 175\kappa^4 - 3136\kappa^2 + 932800$$

$$l_{25} = 315\kappa^4 - 2912\kappa^2 + 93568$$

$$l_{26} = 525\kappa^4 - 2688\kappa^2 + 55040$$

$$l_{27} = 3440m^6 - 96m^5(7\kappa^2 + 1630)$$

$$l_{28} = m^3 - 2\kappa^2 + 2m - 1 \tag{3.50}$$

Bu sonuçlar yardımıyla, (3.1) denkleminin Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri aşağıdaki gibi listelenir:

$$q(x,t)=\left\{-\frac{\alpha_2(-4m^3+13m^2-15m+l_1+10)}{14l_2}\right.$$
$$\left.+\alpha_2 dn^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{8820\,\alpha_1\kappa l_2^2+b\alpha_2^2(m^4\upsilon_1+2m^3\upsilon_2-3m^2\upsilon_3+2m\upsilon_4+l_3+\upsilon_5)}{8820\,l_2^2}\right)t+\theta\right\}\right], \quad (3.51)$$

$$q(x,t)=\{\alpha_2 dn^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]$$
$$+\alpha_2(m-1)nd^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{1260\,\alpha_1\kappa+b\alpha_2^2(25\kappa^6-672\kappa^4-2800\kappa^2-768m^3+l_{10}+l_{11}-7296)}{1260}\right)t+\theta\right\}\right], \quad (3.52)$$

$$q(x,t)=\left\{-\frac{2(l_{12}-\alpha_2(m^3-26m^2+72m-48))}{7l_{13}}\right.$$
$$+\alpha_2 dn^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]$$
$$\left.+\alpha_2(1-m)nd^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{8820\,\alpha_1\kappa l_{13}^2+b\alpha_2(\alpha_2(m^4l_{17}+96m^2l_{20}-512\,ml_{18}+256\,l_{19}+\upsilon_6)+96l_{12}l_{14})}{8820\,l_{13}^2}\right)t+\theta\right\}\right],$$
$$(3.53)$$

$$q(x,t)=\left\{-\frac{\beta_2(4m^3-13m^2+15m+l_1-10)}{14l_{28}}\right.$$
$$\left.+\beta_2 nd^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{8820\,\alpha_1\kappa l_{28}^2+b\beta_2^2(m^4\upsilon_7-2m^3\upsilon_{10}+3m^2\upsilon_9-2m\upsilon_8+l_3+\upsilon_{11})}{8820\,(m-1)^2l_2^2}\right)t+\theta\right\}\right]. \quad (3.54)$$

3.2.3.1 Soliton Çözümler

$m\to 1^-$ ise, parlak dispersif soliton çözümler ortaya çıkar:

$$q(x,t)=\alpha_2\left(-\frac{4}{7}+sech^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]\right)$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(a_1\kappa+\frac{b\kappa^2\alpha_2^2(35\kappa^4-336\kappa^2+592}{1764}\right)t+\theta\right\}\right], \quad (3.55)$$

$$q(x,t)=\alpha_2 sech^2[x-\{a_1-2\kappa(a_2+4\kappa^2a_4+8\kappa^3a_5)\}t]$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(a_1\kappa+\frac{b\alpha_2^2(25\kappa^6+336\kappa^4+560\kappa^2-768}{1260}\right)t+\theta\right\}\right]. \quad (3.56)$$

4. KÜBİK-KUİNTİK-SEPTİK YASASINA SAHİP YÜKSEK MERTEBELİ NONLİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ

4.1. Ana Model

Kübik-kuintik-septik yasa varlığında, nonlineer formuna sahip NLS denklemi boyutsuz formunda aşağıdaki gibidir (Biswas vd., 2019a):

$$iq_t + ia_1 q_x + a_2 q_{xx} + ia_3 q_{xxx} + a_4 q_{xxxx} + ia_5 q_{xxxxx} + a_6 q_{xxxxxx}$$

$$+(b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3|q|^6)q = 0 \quad (4.1)$$

Burada, (4.1) denkleminde bağımlı değişken $q(x,t)$, x ve t nin sırasıyla bağımsız uzaysal ve zamansal değişkenler olduğu soliton profilini temsil eder. İlk terim lineer zamansal gelişimi temsil ederken, $1 \leq j \leq 6$ için a_j sırasıyla modlar arası dağılım, grup hız dağılım, üçüncü dereceden dağılım, dördüncü dereceden dağılım, beşinci dereceden dağılım ve altıncı dereceden dağılım katsayılarıdır. Daha sonra, b_1,b_2 ve b_3 terimleri birlikte kübik-kuintik-septik nonlineerlik yasasını oluşturur. Bu katsayıların hepsi gerçek değerli sabitler ve $i = \sqrt{-1}$.

4.2. Matematiksel Analiz

(3.1) denklemini çözmek için, benimsenen hipotez aşağıdaki gibidir (Biswas vd., 2019a):

$$q(x,t) = g(\varsigma)e^{i\varphi(x,t)}. \quad (4.2)$$

Burada $g(\varsigma)$dalganın şeklini temsil eder ve dalga değişkeni v soliton hızı olmak üzere

$$\varsigma = x - vt \quad (4.3)$$

şeklindedir. Ayrıca faz bileşeni:

$$\varphi(x,t) = -\kappa x + \omega t + \theta \quad (4.4)$$

şeklinde yapılanır. Burada (4.4) denkleminde κ soliton frekansı, ω soliton dalga sayısı ve θ faz sabitidir. (4.2), (4.3) ve (4.4) denklemleri kullanılarak (4.1) denkleminde bulunan $q_x, q_{xx}, q_{xxx}, q_{xxxx}, q_{xxxxx}, q_{xxxxxx}, q_t$, $|q|^2$, $|q|^4$ ve $|q|^6$ terimleri;

$$q_x = g'e^{i\varphi} - i\kappa g e^{i\varphi}$$

$$q_{xx} = g^{''} e^{i\varphi} - i\kappa g e^{i\varphi} - i\kappa\left[g^{'} e^{i\varphi} - i\kappa g e^{i\varphi}\right]$$

$$= [g^{''} - 2i\kappa g^{'} - \kappa^2 g]e^{i\varphi}$$

$$q_{xxx} = -i\kappa[g^{''} - 2i\kappa g^{'} - \kappa^2 g]e^{i\varphi} + [g^{'''} - 2i\kappa g^{''} - \kappa^2 g']e^{i\varphi}$$

$$= [g^{'''} - 3i\kappa g^{''} - 3\kappa^2 g^{'} + i\kappa^3 g]e^{i\varphi}$$

$$q_{xxxx} = -i\kappa[g^{'''} - 3i\kappa g^{''} - 3\kappa^2 g + i\kappa^3 g]e^{i\varphi} + \left[g^{(4)} - 3i\kappa g^{''\prime} - 3\kappa^2 g + i\kappa^3 g'\right]e^{i\varphi}$$

$$= \left[g^{(4)} - 4i\kappa g^{'''} - 6\kappa^2 g + 4i\kappa^3 g^{'} + \kappa^4 g\right]e^{i\varphi}$$

$$q_{xxxxx} = -i\kappa\left[g^{(4)} - 4i\kappa g^{'''} - 6\kappa^2 g^{''} + 4i\kappa^3 g^{'} + \kappa^4 g\right]e^{i\varphi}$$
$$+ \left[g^{(5)} - 4i\kappa g^{(4)} - 6\kappa^2 g^{'''} + 4i\kappa^3 g^{''} + \kappa^4 g'\right]e^{i\varphi}$$

$$= \left[g^{(5)} - 5i\kappa g^{(4)} - 4\kappa^2 g^{'''} + 10i\kappa^3 g^{''} + 5\kappa^4 g^{'} - i\kappa^5 g\right]e^{i\varphi}$$

$$q_{xxxxxx} = -i\kappa\left[g^{(5)} - 5i\kappa g^{(4)} - 4\kappa^2 g^{'''} + 10i\kappa^3 g^{''} + 5\kappa^4 g^{'} - i\kappa^5 g\right]e^{i\varphi}$$
$$+ \left[g^{(6)} - 5i\kappa g^{(5)} - 4\kappa^2 g^{(4)} + 10i\kappa^3 g^{'''} + 5\kappa^4 g^{''} - i\kappa^5 g'\right]e^{i\varphi}$$

$$= \left[g^{(6)} - 6i\kappa g^{(5)} - 9\kappa^2 g^{(4)} + 14i\kappa^3 g^{'''} + 15\kappa^4 g^{''} - 6i\kappa^5 g' - \kappa^6 g\right]e^{i\varphi}$$

$$q_t = -vg'e^{i\varphi} + i\omega g\varphi' e^{i\varphi}$$

$$|q|^2 = g^2,$$

$$|q|^4 = g^4,$$

$$|q|^6 = g^6.$$

Bulunan sonuçlar

$$iq_t + ia_1 q_x + a_2 q_{xx} + ia_3 q_{xxx} + a_4 q_{xxxx} + ia_5 q_{xxxxx} + a_6 q_{xxxxxx}$$
$$+(b_1|q|^2 + b_2|q|^4 + b_3|q|^6)q = 0$$

denkleminde yazılarak

$$[ig^{'} - g\omega]e^{i\varphi} + ia_1[g^{'} - i\kappa g]e^{i\varphi}$$
$$+a_2[g^{''} - 2i\kappa g^{'} - \kappa^2 g]e^{i\varphi}$$

$$+ia_3[g''' - 3i\kappa g'' - 3\kappa^2 g' + i\kappa^3 g]e^{i\varphi}$$

$$+a_4\left[g^{(4)} - 4i\kappa g''' - 6\kappa^2 g + 4i\kappa^3 g' + \kappa^4 g\right]e^{i\varphi}$$

$$+ia_5\left[g^{(5)} - 5i\kappa g^{(4)} - 4\kappa^2 g''' + 10i\kappa^3 g'' + 5\kappa^4 g' - i\kappa^5 g\right]e^{i\varphi}$$

$$+a_6\left[g^{(6)} - 6i\kappa g^{(5)} - 9\kappa^2 g^{(4)} + 14i\kappa^3 g''' + 15\kappa^4 g'' - 6i\kappa^5 g' - \kappa^6 g\right]e^{i\varphi}$$

$$+(b_1 g^2 + b_2 g^4 + b_3 g^6)ge^{i\varphi} = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemelerle

$$\left\{\begin{array}{c} [ig' - g\omega] + a_1[ig' + \kappa g] \\ +a_2[g'' - 2i\kappa g' - \kappa^2 g] \\ +a_3[ig''' + 3\kappa g'' - 3i\kappa^2 g' - \kappa^3 g] \\ +a_4\left[g^{(4)} - 4i\kappa g''' - 6\kappa^2 g + 4i\kappa^3 g' + \kappa^4 g\right] \\ +a_5\left[ig^{(5)} + 5\kappa g^{(4)} - 4i\kappa^2 g''' - 10\kappa^3 g'' + 5i\kappa^4 g' + \kappa^5 g\right] \\ +a_6\left[g^{(6)} - 6i\kappa g^{(5)} - 9\kappa^2 g^{(4)} + 14i\kappa^3 g''' + 15\kappa^4 g'' - 6i\kappa^5 g - \kappa^6 g\right] \\ +(b_1 g^3 + b_2 g^5 + b_3 g^7) \end{array}\right\} e^{i\varphi(x,t)} = 0$$

ve böylece

$$\begin{aligned}[-\omega + \kappa a_1 - \kappa^2 a_2 - \kappa^3 a_3 + \kappa^4 a_4 + \kappa^5 a_5 - \kappa^6 a_6]g \\ + [i + ia_1 - 2i\kappa a_2 - 3i\kappa^2 a_3 + 4i\kappa^3 a_4 + 5i\kappa^4 a_5 - 6i\kappa^5 a_6]g' \\ + [a_2 + 3\kappa a_3 - 6\kappa^2 a_4 - 10\kappa^3 a_5 + 15\kappa^4 a_6]g'' \\ + [ia_3 - 4i\kappa a_4 - 4i\kappa^2 a_5 + 14i\kappa^3 a_6]g''' + [a_4 + 5\kappa a_5 - 15\kappa^2 a_6]g^{(4)} \\ + [ia_5 - 5i\kappa a_6]g^{(5)} + [a_6]g^{(6)} + (b_1 g^3 + b_2 g^5 + b_3 g^7) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) denklemini sırasıyla reel ve imajiner kısımlara ayırarak.

Reel kısım:

$$\begin{aligned}-\left(\omega + \kappa\left(\kappa\left(a_2 + \kappa(a_3 - \kappa(a_4 + \kappa a_5) + \kappa^3 a_6)\right)\right)\right)g \\ +(b_1 g^3 + b_2 g^5 + b_3 g^7) + (a_2 + 3\kappa a_3 - 6\kappa^2 a_4 - 10\kappa^3 a_5 + 15\kappa^4 a_6)g'' \\ +[a_4 + 5\kappa a_5 - 15\kappa^2 a_6]g^{(4)} + [a_6]g^{(6)} = 0 \qquad (4.5)\end{aligned}$$

İmajiner kısım:

$$(v - a_1 + 2\kappa a_2 + 3\kappa^2 a_3 - 4\kappa^3 a_4 - 5\kappa^4 a_5 + 6\kappa^5 a_6)g$$
$$+\left(-a_3 + 2\kappa\left(2a_4 + 5\kappa(a_5 - 2\kappa a_6)\right)\right)g''$$
$$-(a_5 - 6\kappa a_6)g^{(4)} = 0 \tag{4.6}$$

(4.6) denkleminde,

$$a_5 = 6\kappa a_6 \tag{4.7}$$

kısıtlama koşulu ve sonra diğer koşulları

$$a_3 = 2\kappa\left(2a_4 + 5\kappa(a_5 - 2\kappa a_6)\right)$$
$$= \frac{4\kappa(3a_4 + 5\kappa a_5)}{3} \tag{4.8}$$

şeklinde ortaya çıkar. Böylece solitonun hızı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$v = a_1 - 2\kappa a_2 - 3\kappa^2 a_3 + 4\kappa^3 a_4 + 5\kappa^4 a_5 - 6\kappa^5 a_6$$
$$= a_1 - 2\kappa a_2 - 3\kappa^2\left[\frac{4\kappa(3a_4 + 5\kappa a_5)}{3}\right] + 4\kappa^3 a_4 + 5\kappa^4(a_5) - 6\kappa^5\frac{a_5}{6\kappa}$$
$$= a_1 - 2\kappa a_2 - 12\kappa^3 a_4 - 20\kappa^4 a_5 + 4\kappa^3 a_4 + 5\kappa^4 a_5 - \kappa^4 a_5$$
$$= a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3 a_4 - 16\kappa^4 a_5. \tag{4.9}$$

Bu durumda reel kısım aşağıdaki gibi düzenlenir:

(4.5) denkleminde (4.7) ve (4.8) denklemleri yerine yazılarak

$$-\kappa\left[6\omega - 6\kappa a_1 + 6\kappa^2 a_2 + 18\kappa^4 a_4 + 35\kappa^5 a_5\right]g$$
$$+6b_1\kappa g^3 + 6b_2\kappa g^5 + 6b_3\kappa g^7$$
$$+3\kappa\left[2a_2 + 12\kappa^2 a_4 + 25\kappa^3 a_5\right]g''$$
$$+3\kappa[2a_4 + 5\kappa a_5]g^{(4)} + [a_5]g^{(6)} = 0 \tag{4.10}$$

bulunur. Şimdi sonraki bölümde genişletilmiş Jacobi eliptik fonksiyon açılımı ile modele yüksek dereceli dispersif optik solitonları ortaya çıkarmak için (4.10) denklemi incelenecektir (Abdou ve Elhanbaly, 2007; Petrović ve Bohra, 2016; Zhang H., 2007; Zhang Z., 2015).

4.2.1. Genişletilmiş Jacobi Eliptik sn Fonksiyon Açılım Şeması

Modele soliton çözümler oluşturmak için, (4.10) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi alınır (Biswas vd., 2019a):

$$g(x,t) = g(\varsigma) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \, sn^j \varsigma + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \, sn^{-j} \varsigma. \tag{4.11}$$

Burada α_0, a_j ve β_j $(j = 1,2,\dots,N)$ belirlenecek sabitlerdir. (4.10) denkleminde $g^{(6)}$ ile g^7 dengelenerek yani bu terimler arasında balans işlemi yapılarak

$7\mathrm{N} = \mathrm{N} + 6$

$6\mathrm{N} = 6 \Rightarrow \mathrm{N} = 1$

elde edilir. Böylece formal çözüm

$$\mathrm{g}(\varsigma) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{sn}\varsigma + \frac{\beta_1}{\mathrm{sn}\,\varsigma}, \tag{4.12}$$

şeklini alır. (4.12) denklemi (4.10) denkleminde yazılarak ve elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek aşağıdaki çözüm setleri elde edilir.

Set-1

$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \beta_1,$

$\omega = \frac{6\alpha_1\kappa^2 - 6\alpha_1\kappa\left(-3\kappa^4+9m^2+10\kappa^2(m+1)+6m+9\right)+2a_5 l_1+3b_1\beta_1^2\kappa(\kappa^2+m+1)}{6\kappa},$

$\alpha_2 = -\frac{(12\alpha_4\kappa\left(3\kappa^2-5m-5\right)+a_5(75\kappa^4-150\kappa^2(m+1)+7m(13m+62)+91)+3b_1\beta_1^2\kappa)}{6\kappa},$

$b_2 = \frac{4(5a_5(-3\kappa^2+7m+7)-6a_4\kappa}{\beta_1^4\kappa},$

$b_3 = -\frac{120a_5}{\beta_1^6\kappa}.$ (4.13)

Set-2

$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_1, \quad \beta_1 = 0,$

$\omega = \frac{6\kappa m(\alpha_1\kappa - a_4\left(-3\kappa^4+9m^2+10\kappa^2(m+1)+6m+9\right)+2a_5 m l_1+3b_1\alpha_1^2\kappa(\kappa^2+m+1)}{6\kappa m},$

$$\alpha_2 = -\frac{(-12\alpha_4\kappa m(-3\kappa^2+5m+5)+a_5 m(75\kappa^4-150\kappa^2(m+1)+7m(13m+62)+91)+3b_1\alpha_1^2\kappa)}{6\kappa m},$$

$$b_2 = \frac{4m^2(5a_5(-3\kappa^2+7m+7)-6a_4\kappa}{\alpha_1^4\kappa},$$

$$b_3 = -\frac{120a_5m^3}{\alpha_1^6\kappa}. \qquad (4.14)$$

Set-3

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = -\beta_1\sqrt{m}, \quad \beta_1 = \beta_1,$$

$$\omega = \frac{2a_5(20\kappa^6-75\kappa^4(m-6\sqrt{m}+1)-2\kappa^2 l_4+15l_6)+3b_1\beta_1^2\kappa(\kappa^2+m-6\sqrt{m}+1)+6\kappa l_2}{6\kappa},$$

$$\alpha_2 = \frac{(12\alpha_4\kappa(-3\kappa^2+5m-30\sqrt{m}+5)+a_5(-75\kappa^4+150\kappa^2(m-6\sqrt{m}+1)-7l_8)-3b_1\beta_1^2\kappa)}{6\kappa},$$

$$b_2 = -\frac{4(\alpha_4\kappa+5a_5(3\kappa^2-7m+42\sqrt{m}-7))}{\beta_1^4\kappa},$$

$$b_3 = -\frac{120a_5}{\beta_1^6\kappa}. \qquad (4.15)$$

Set-4

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \beta_1\sqrt{m}, \quad \beta_1 = \beta_1,$$

$$\omega = \frac{2a_5(20\kappa^6-75\kappa^4(m+6\sqrt{m}+1)+2\kappa^2 l_5+15l_7)+3b_1\beta_1^2\kappa(\kappa^2+m+6\sqrt{m}+1)+6\kappa l_3}{6\kappa},$$

$$\alpha_2 = -\frac{(12\alpha_4\kappa(+3\kappa^2-5(m+6\sqrt{m}+1))+a_5(75\kappa^4-150\kappa^2(m+6\sqrt{m}+1)+7l_9)+3b_1\beta_1^2\kappa)}{6\kappa},$$

$$b_2 = \frac{4(5a_5(-3\kappa^2+7m+42\sqrt{m}+7)-6a_4\kappa)}{\beta_1^4\kappa},$$

$$b_3 = -\frac{120a_5}{\beta_1^6\kappa}. \qquad (4.16)$$

Burada

$$l_1 = 20\kappa^6 - 75\kappa^4(m+1) - 2\kappa^2(m(11m-86)+11) + 15(m+1)(m+3)(3m+1)$$

$$l_2 = a_1\kappa + a_4\left(3\kappa^4 + 60m^{3/2} - 9m^2 - 10\kappa^2\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right) - 246m + 60\sqrt{m} - 9\right)$$

$$l_3 = a_1\kappa - a_4\left(-3\kappa^4 + 60m^{\frac{3}{2}} + 9m^2 + 10\kappa^2\left(m + 6\sqrt{m} + 1\right) + 246m + 60\sqrt{m} + 9\right)$$

$$l_4 = 300m^{\frac{3}{2}} + 11m^2 - 446m + 300\sqrt{m} + 11$$

$$l_5 = 300m^{\frac{3}{2}} - 11m^2 + 446m + 300\sqrt{m} - 11$$

$$l_6 = \left(\sqrt{m} - 3\right)\left(3\sqrt{m} - 1\right)\left(m - 14\sqrt{m} + 1\right)\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right)$$

$$l_7 = \left(\sqrt{m} + 3\right)\left(3\sqrt{m} + 1\right)\left(m + 14\sqrt{m} + 1\right)\left(m + 14\sqrt{m} + 1\right)$$

$$l_8 = -300m^{\frac{3}{2}} + 13m^2 + 782m - 300\sqrt{m} + 13$$

$$l_9 = 300m^{\frac{3}{2}} + 13m^2 + 782m + 300\sqrt{m} + 13 \qquad (4.17)$$

Sonuç olarak aşağıda listelenen Jacobi eliptik fonksiyon çözümleri elde edilir:

$$q(x,t) = \{\beta_1 ns[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6a_1\kappa^2 - 6\alpha_4\kappa\left(-3\kappa^4 + 9m^2 + 10\kappa^2(m+1) + 6m + 9\right) + 2a_5 l_1 + 3b_1\beta_1^2\kappa(\kappa^2 + m + 1)}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right],$$

(4.18)

$$q(x,t) = \{\alpha_1 sn[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6\kappa m\left(a_1\kappa - \alpha_4\left(-3\kappa^4 + 9m^2 + 10\kappa^2(m+1) + 6m + 9\right) + 2a_5 l_1 + 3b_1\alpha_1^2\kappa(\kappa^2 + m + 1)\right.}{6\kappa m}\right)t + \theta\right\}\right],$$

(4.19)

$$q(x,t) = \{\beta_1 ns[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$
$$- \beta_1\sqrt{m}sn[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]\}$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{2\alpha_5\left(20\kappa^6 - 75\kappa^4\left(m - 6\sqrt{m} + 1\right) - 2\kappa^2 l_4 + 15 l_6\right) + 3b_1\beta_1^2\kappa\left(\kappa^2 + m - 6\sqrt{m} + 1\right) + 6\kappa l_2}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right],$$

(4.20)

$$q(x,t) = \{\beta_1 ns[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t] - \beta_1\sqrt{m}sn[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]\}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{2\alpha_5(20\kappa^6 - 75\kappa^4(m + 6\sqrt{m} + 1) + 2\kappa^2 l_5 + 15 l_7) + 3b_1\beta_1^2\kappa(\kappa^2 + m + 6\sqrt{m} + 1) + 6\kappa l_3}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right]. \quad (4.21)$$

4.2.1.1. Soliton Çözümler

Bu bölümde; eliptik modülün sınır değerleri göz önüne alınarak, önceki bölümde listelenen çift periyodik fonksiyonlardan soliton çözümler elde edilecektir. (4.18)-(4.21) denklemlerinde m modülü 1'e yaklaşırken yani $m \to 1^-$ iken koyu-tekil birleşik dispersif solitonlar ortaya çıkar:

$$q(x,t) = \beta_1 coth[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6\kappa(\alpha_4(3\kappa^4 - 20\kappa^2 - 24) + a_1\kappa) + 4a_5(10\kappa^6 - 75\kappa^4 + 64\kappa^2 + 240) + 3b_1\beta_1^2\kappa(\kappa^2 + 2)}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (4.22)$$

$$q(x,t) = \alpha_1 tanh[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6\kappa(\alpha_4(3\kappa^4 - 20\kappa^2 - 24) + a_1\kappa) + 4a_5(10\kappa^6 - 75\kappa^4 + 64\kappa^2 + 240) + 3b_1\alpha_1^2\kappa(\kappa^2 + 2)}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (4.23)$$

$$q(x,t) = 2\beta_1 csch2[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6\kappa(\alpha_4(3\kappa^4 + 40\kappa^2 - 144) + a_1\kappa) + 8a_5(5\kappa^6 + 75\kappa^4 - 88\kappa^2 - 720) + 3b_1\beta_1^2\kappa(\kappa^2 - 4)}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (4.24)$$

$$q(x,t) = 2\beta_1 coth[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6\kappa(\alpha_4(3\kappa^4 - 80\kappa^2 - 384) + a_1\kappa) + 8a_5(5\kappa^6 - 150\kappa^4 + 512\kappa^2 + 7680) + 3b_1\beta_1^2\kappa(\kappa^2 + 8)}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right]. \quad (4.25)$$

4.2.2. Genişletilmiş Jacobi Eliptik cn Fonksiyon Açılım Şeması

Modele soliton çözümler oluşturmak için, (4.10) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi alınır (Biswas vd., 2019a):

$$g(x,t) = g(\varsigma) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j cn^j \varsigma + \sum_{j=1}^{N} \beta_j cn^{-j} \varsigma. \tag{4.26}$$

Burada α_0, a_j ve β_j $(j = 1,2,\dots,N)$ belirlenecek sabitlerdir. (4.10) denkleminde $g^{(6)}$ ile g^7 dengelenerek yani bu terimler arasında balans işlemi yapılarak

$7\mathrm{N} = \mathrm{N} + 6$

$6\mathrm{N} = 6 \Rightarrow \mathrm{N} = 1$

elde edilir. Böylece formal çözüm

$$\mathrm{g}(\varsigma) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{cn}\varsigma + \frac{\beta_1}{\mathrm{cn}\,\varsigma}, \tag{4.27}$$

şeklini alır. (4.27) denklemi (4.10) denkleminde yazılarak ve elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek aşağıdaki çözüm setleri elde edilir.

Set-1

$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \beta_1,$

$$\omega = \frac{24a_1\kappa^2(m-1)^2 + 4\alpha_1(m-1)^2\upsilon_1 + b_2\beta_1^4\kappa\upsilon_2 - 12b_1\beta_1^2\kappa(m-1)(\kappa^2 - 2m + 1)}{24\kappa(m-1)^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{2a_5\upsilon_3}{\kappa} + \frac{b_2\beta_1^4(3\kappa^2 + 10m - 5) + 6b_1\beta_1^2(m-1)}{(m-1)^2}\right),$$

$$\alpha_4 = -\frac{5a_5(3\kappa^2 + 14m - 7)}{6\kappa} - \frac{b_2\beta_1^4}{24(m-1)^2},$$

$$b_3 = \frac{120a_5(m-1)^3}{\beta_1^6\kappa}. \tag{4.28}$$

Set-2

$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_1, \quad \beta_1 = 0,$

$$\omega = \frac{24a_1\kappa^2m^2 + 4\alpha_5m^2\upsilon_1 + b_2\alpha_1^4\kappa\upsilon_2 - 12b_1\alpha_1^2\kappa m(k^2 - 2m + 1)}{24\kappa m^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{2\alpha_5m^2\upsilon_3 + b_2\alpha_1^4\kappa(3\kappa^2 + 10m - 5) + 6b_1\alpha_1^2\kappa m}{12\kappa m^2},$$

$$\alpha_4 = -\frac{5a_5(3\kappa^2 + 14m - 7)}{6\kappa} - \frac{b_2\alpha_1^4}{24m^2},$$

$$b_3 = \frac{120a_5m^3}{\alpha_1^6\kappa}. \tag{4.29}$$

Set-3

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_1, \quad \beta_1 = -\alpha_1\sqrt{\frac{m-1}{m}},$$

$$\omega = \frac{24a_1\kappa^2m^2 + 4\alpha_5m^2\upsilon_4 + \alpha_1^2\kappa(b_2\alpha_1^2\upsilon_6 + 12b_1m(-\kappa^2 + 2m - 6\sqrt{m-1}\sqrt{m} - 1))}{24\kappa m^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{2\alpha_5m^2\upsilon_8 + \alpha_1^2\kappa(\alpha_1^2b_2\left(3\kappa^2 + 10m - 30\sqrt{m-1}\sqrt{m} - 5\right) + 6b_1m}{12\kappa m^2},$$

$$\alpha_4 = -\frac{20\alpha_5m^2\left(3\kappa^2 + 14m - 42\sqrt{m-1}\sqrt{m} - 7\right) + \alpha_1^4b_2\kappa}{24\kappa m^2},$$

$$b_3 = \frac{120a_5m^3}{\alpha_1^6\kappa}. \tag{4.30}$$

Set-4

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_1, \quad \beta_1 = \alpha_1\sqrt{\frac{m-1}{m}},$$

$$\omega = \frac{24a_1\kappa^2m^2 + 4\alpha_5m^2\upsilon_5 + \alpha_1^2\kappa(b_2\alpha_1^2\upsilon_7 + 12b_1m(-\kappa^2 + 2m + 6\sqrt{m-1}\sqrt{m} - 1))}{24\kappa m^2},$$

$$\alpha_2 = \frac{2\alpha_5m^2\upsilon_9 + \alpha_1^2\kappa(\alpha_1^2b_2\left(3\kappa^2 + 10m + 30\sqrt{m-1}\sqrt{m} - 5\right) + 6b_1m}{12\kappa m^2},$$

$$\alpha_4 = -\frac{20\alpha_5m^2\left(3\kappa^2 + 14m + 42\sqrt{m-1}\sqrt{m} - 7\right) + \alpha_1^4b_2\kappa}{24\kappa m^2},$$

$$b_3 = \frac{120a_5m^3}{\alpha_1^6\kappa}. \tag{4.31}$$

$$\upsilon_1 = -5\kappa^6 + 105\kappa^4(1 - 2m) - 7\kappa^2(112(m-1)m + 37) + 45(2m-1)(8(m-1)m + 5)$$

$$\upsilon_2 = -3\kappa^4 + 10\kappa^2 - 20\kappa^2m + 24(m-1)m + 9$$

$$\upsilon_3 = 15\kappa^4 + 20\kappa^2(2m-1) + 784(m-1)m + 259$$

$$\begin{aligned}\upsilon_4 = {} & -5\kappa^6 + 105\kappa^4 - 259\kappa^2 + 840(5\kappa^2+36)\sqrt{m-1}m^{\frac{3}{2}} - 30240\sqrt{m-1}m^{\frac{5}{2}} \\ & + 15840m^3 - 8(1043\kappa^2+2970)m^2 \\ & + (-210\kappa^4 + 8344\kappa^2 + 8370)m + 210(3\kappa^4 - 10\kappa^2 - 9)\sqrt{m-1}\sqrt{m} \\ & - 225\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\upsilon_5 = {} & -5\kappa^6 + 105\kappa^4 - 259\kappa^2 - 840(5\kappa^2+36)\sqrt{m-1}m^{\frac{3}{2}} + 30240\sqrt{m-1}m^{\frac{5}{2}} \\ & + 15840m^3 - 8(1043\kappa^2+2970)m^2 \\ & + (-210\kappa^4 + 8344\kappa^2 + 8370)m - 210(3\kappa^4 - 10\kappa^2 - 9)\sqrt{m-1}\sqrt{m} \\ & - 225\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\upsilon_6 = {} & -3\kappa^4 + 10\kappa^2 - 120\sqrt{m-1}m^{\frac{3}{2}} + 264m^2 + 60(\kappa^2+1)\sqrt{m-1}\sqrt{m} \\ & - 4(5\kappa^2+66)m + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\upsilon_7 = {} & -3\kappa^4 + 10\kappa^2 + 120\sqrt{m-1}m^{\frac{3}{2}} + 264m^2 - 60(\kappa^2+1)\sqrt{m-1}\sqrt{m} \\ & - 4(5\kappa^2+66)m + 9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\upsilon_8 = {} & 15\kappa^2(\kappa^2-14) - 4200\sqrt{m-1}m^{\frac{3}{2}} + 8344m^2 + 28(15\kappa^2-298)m \\ & + 420(3\kappa^2-5)\sqrt{m-1}\sqrt{m} + 259\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\upsilon_9 = {} & 15\kappa^2(\kappa^2-14) + 4200\sqrt{m-1}m^{\frac{3}{2}} + 8344m^2 + 28(15\kappa^2-298)m \\ & + 420(3\kappa^2-5)\sqrt{m-1}\sqrt{m} + 259. \qquad (4.32)\end{aligned}$$

Bu sonuçlar yardımıyla, (4.1) denklemi için elde edilen Jacobi eliptik fonksiyon çözümler aşağıdaki gibi listelenir:

$$q(x,t) = \beta_1 nc[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{24a_1\kappa^2(m-1)^2 + 4\alpha_5(m-1)^2\upsilon_1 + b_2\beta_1^4\kappa\upsilon_2 - 12b_1\beta_1^2\kappa(m-1)(\kappa^2-2m+1)}{24\kappa(m-1)^2}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (4.33)$$

$$q(x,t) = \alpha_1 cn[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{24a_1\kappa^2 m^2 + 4\alpha_5 m^2\upsilon_1 + b_2\alpha_1^4\kappa\upsilon_2 - 12b_1\alpha_1^2\kappa m(\kappa^2-2m+1)}{24\kappa m^2}\right)t + \theta\right\}\right], \qquad (4.34)$$

$$q(x,t)=\left\{\alpha_1 cn[x-\{a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3(a_4+2\kappa a_5)\}t]\right.$$

$$\left.-\alpha_1\sqrt{\frac{m-1}{m}}nc[x-\{a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3(a_4+2\kappa a_5)\}t]\right\}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{24a_1\kappa^2m^2+4\alpha_5m^2\upsilon_4+\alpha_1^2\kappa(b_2\alpha_1^2\upsilon_6+12b_1m(-\kappa^2+2m-6\sqrt{m-1}\sqrt{m}-1))}{24\kappa m^2}\right)t+\theta\right\}\right], \quad (4.35)$$

$$q(x,t)=\left\{\alpha_1 cn[x-\{a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3(a_4+2\kappa a_5)\}t]\right.$$

$$\left.+\alpha_1\sqrt{\frac{m-1}{m}}nc[x-\{a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3(a_4+2\kappa a_5)\}t]\right\}$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{24a_1\kappa^2m^2+4\alpha_5m^2\upsilon_5+\alpha_1^2\kappa(b_2\alpha_1^2\upsilon_7+12b_1m(-\kappa^2+2m+6\sqrt{m-1}\sqrt{m}-1))}{24\kappa m^2}\right)t+\theta\right\}\right]. \quad (4.36)$$

4.2.2.1. Soliton Çözümler

$m\to 1^-$ için, parlak dispersif soliton çözümler ortaya çıkar:

$$q(x,t)=\alpha_1 sech[x-\{a_1-2\kappa a_2-8\kappa^3(a_4+2\kappa a_5)\}t]$$

$$exp\left[i\left\{-\kappa x+\left(\frac{\kappa\left(24a_1\kappa-5\alpha_5\kappa\kappa_1-12\alpha_1^2b_1(\kappa^2-1)+\alpha_1^4b_2(-3\kappa^4-10\kappa^2+9)\right)+900a_5))}{24\kappa}\right)t+\theta\right\}\right], \quad (4.37)$$

burada

$$\kappa_1=5(\kappa^2+21)\kappa^2+259. \quad (4.38)$$

4.2.3. Genişletilmiş Jacobi Eliptik dn Fonksiyon Açılım Şeması

Modele soliton çözümler oluşturmak için, (4.10) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi alınır (Biswas vd., 2019a):

$$g(x,t)=g(\varsigma)=\sum_{j=0}^{N}\alpha_j\,dn^j\varsigma+\sum_{j=1}^{N}\beta_j\,dn^{-j}\varsigma. \quad (4.39)$$

Burada α_0, a_j ve β_j $(j=1,2,\dots,N)$ belirlenecek sabitlerdir. (4.10) denkleminde $g^{(6)}$ ile g^7 dengelenerek yani bu terimler arasında balans işlemi yapılarak

$7\mathrm{N} = \mathrm{N} + 6$

$6\mathrm{N} = 6 \Rightarrow \mathrm{N} = 1$

elde edilir. Böylece formal çözüm

$$g(\varsigma) = \alpha_0 + \alpha_1 \mathrm{dn}\varsigma + \frac{\beta_1}{\mathrm{dn}\,\varsigma}, \tag{4.40}$$

şeklini alır. (4.40) denklemi (4.10) denkleminde yazılarak ve elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek aşağıdaki çözüm setleri elde edilir.

Set-1

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \beta_1,$$

$$\omega = \frac{6\kappa\left(a_1\kappa - a_2\left(\kappa^2 + m - 2\right) + a_4 N_1\right) - a_5 N_2}{6\kappa},$$

$$b_1 = -\frac{(m-1)(6\kappa(2a_4(3\kappa^2 - 5m + 10) + a_2)a_5 N_3)}{3\beta_1^2\kappa},$$

$$b_2 = \frac{4(m-1)^2(5a_5(-3\kappa^2 + 7m - 14) - 6a_4\kappa)}{\beta_1^4\kappa},$$

$$b_3 = -\frac{120a_5(m-1)^3}{\beta_1^6\kappa}. \tag{4.41}$$

Set-2

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \alpha_1, \quad \beta_1 = 0,$$

$$\omega = \frac{6\kappa\left(a_1\kappa - a_2\left(\kappa^2 + m - 2\right) + a_4 N_1\right) - a_5 N_2}{6\kappa},$$

$$b_1 = \frac{6\kappa(2a_4(3\kappa^2 - 5m + 10) + a_2)a_5 N_3)}{3\alpha_1^2\kappa},$$

$$b_2 = -\frac{4(6a_4\kappa + 5a_5(3\kappa^2 - 7m + 14))}{\alpha_1^4\kappa},$$

$$b_3 = \frac{120a_5}{\alpha_1^6\kappa}. \tag{4.42}$$

Set-3

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = -\frac{\beta_1}{\sqrt{1-m}}, \quad \beta_1 = \beta_1,$$

$$\omega = -\frac{-6a_1\kappa^2 + 6a_4\kappa N_4 + 6a_2\kappa\left(\kappa^2 + m + 6\sqrt{1-m} - 2\right) + a_5N_6 + N_7 + N_8}{6\kappa},$$

$$b_1 = -\frac{(m-1)(6a_2\kappa + 12a_4\kappa\left(3\kappa^2 - 5m - 30\sqrt{1-m} + 10\right) + a_5N_9)}{3\beta_1^2\kappa},$$

$$b_2 = \frac{4(m-1)^2(5a_5\left(-3\kappa^2 + 7m + 42\sqrt{1-m} - 14\right) - 6a_4\kappa)}{\beta_1^4\kappa},$$

$$b_3 = -\frac{120a_5(m-1)^3}{\beta_1^6\kappa}. \tag{4.43}$$

Set-4

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{\beta_1}{\sqrt{1-m}}, \quad \beta_1 = \beta_1,$$

$$\omega = \frac{6a_1k^2 + 6a_4kN_5 - 6a_2k\left(k^2 + m - 6\sqrt{1-m} - 2\right) - a_5N_6 + N_7 + N_8}{6k},$$

$$b_1 = -\frac{(m-1)(6a_2\kappa + 12a_4\kappa\left(3\kappa^2 - 5m + 30\sqrt{1-m} + 10\right) + a_5N_{10})}{3\beta_1^2\kappa},$$

$$b_2 = -\frac{4(m-1)^2(6a_4\kappa + 5a_5\left(3\kappa^2 - 7m + 42\sqrt{1-m} - 14\right))}{\beta_1^4\kappa},$$

$$b_3 = -\frac{120a_5(m-1)^3}{\beta_1^6\kappa}. \tag{4.44}$$

$$N_1 = -3\kappa^4 + m^2 - 6\kappa^2(m-2) - 16m + 16$$

$$N_2 = 35\kappa^4 + m^3 - 138m^2 + 75\kappa^4(m-2) - 15\kappa^2\left((m-16)m + 16\right) + 408m - 272$$

$$N_3 = 75\kappa^4 - 150\kappa^2(m-2) + 7(m(13m-88) + 88)$$

$$N_4 = 3\kappa^4 - m^2 + 6\kappa^2(m-2) + 136m - 136$$

$$N_5 = -3\kappa^4 + m^2 - 6\kappa^2(m-2) - 136m + 136$$

$$N_6 = 35\kappa^4 + m^3 - 4338m^2 + 75\kappa^4(m-2) - 15\kappa^2\big((m-136)m + 136\big) + 13008m - 8672$$

$$N_7 = 216a_4\kappa^3\sqrt{1-m} - 360a_4\kappa\sqrt{1-m}m + 720a_4\kappa\sqrt{1-m} - 8736a_5\sqrt{1-m}m + 8736a_5\sqrt{1-m}$$

$$N_8 = 545a_5\sqrt{1-m}m^2 + 450a_5\kappa^4\sqrt{1-m}m - 900a_5\kappa^2\sqrt{1-m}m + 1800a_5\kappa^2\sqrt{1-m}$$

$$N_9 = 91m^2 + 2m\big(-75\kappa^2 + 1050\sqrt{1-m} - 2828\big) + 75\kappa^2\big(\kappa^2 - 12\sqrt{1-m} + 4\big) - 4200\sqrt{1-m} + 5656$$

$$N_9 = 91m^2 - 2m\big(75\kappa^2 + 1050\sqrt{1-m} + 2828\big) + 75\kappa^2\big(\kappa^2 + 12\sqrt{1-m} + 4\big) + 56\big(75\sqrt{1-m} + 101\big)$$

(4.45)

Bu sonuçlar yardımıyla, (4.1) denklemi için elde edilen Jacobi eliptik fonksiyon çözümler aşağıdaki gibi listelenir:

$$q(x,t) = \beta_1 nd[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t] \; exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6\kappa\left(a_1\kappa - a_2\left(\kappa^2+m-2\right)+a_4N_1\right)-a_5N_2}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (4.46)$$

$$q(x,t) = \alpha_1 dn[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t] \; exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6\kappa\left(a_1\kappa - a_2\left(\kappa^2+m-2\right)+a_4N_1\right)-a_5N_2}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (4.47)$$

$$q(x,t) = \beta_1 nd[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t] - \frac{\beta_1}{\sqrt{1-m}} dn[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t] \; exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{-6a_1\kappa^2+6a_4\kappa N_4+6a_2\kappa\left(\kappa^2+m+6\sqrt{1-m}-2\right)+a_5N_6+N_7+N_8)}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right], \quad (4.48)$$

$$q(x,t) = \beta_1 nd[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$
$$+ \frac{\beta_1}{\sqrt{1-m}} dn[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6a_1\kappa^2 + 6a_4\kappa N_4 - 6a_2\kappa\left(\kappa^2 + m - 6\sqrt{1-m} - 2\right) - a_5 N_6 + N_7 + N_8)}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right]. \quad (4.49)$$

4.2.3.1. Soliton Çözümler

$m \to 1^-$ için, parlak dispersif soliton çözümler ortaya çıkar:

$$q(x,t) = \alpha_1 sech[x - \{a_1 - 2\kappa a_2 - 8\kappa^3(a_4 + 2\kappa a_5)\}t]$$
$$exp\left[i\left\{-\kappa x + \left(\frac{6\kappa(\kappa\left(-3a_4\kappa\left(\kappa^2 - 2\right) - a_2\kappa + a_1\right) + a_2 + a_4) + a_5\left(-35\kappa^6 + 75\kappa^4 + 15\kappa^2 + 1\right)\right)}{6\kappa}\right)t + \theta\right\}\right]. \quad (4.50)$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde Kerr yasası, yerel olmayan yasa ve kübik-kuintik-septik yasasına sahip NLS denklemi için parlak, koyu ve tekil yüksek mertebeli dispersif optik solitonlar Jacobi eliptik fonksiyon açılımları yardımıyla incelendi. Açılımlar üç tip eliptik fonksiyonlar cinsinden yani eliptik sn, cn ve dn fonksiyonları yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Bu açılımlar yardımıyla ele alınan modele Jacobi eliptik fonksiyonlar cinsinden çok sayıda çözüm elde edilir. Eliptiklik modülü yani $m \to 1^{-}$ yaklaştığı durumda elde edilen Jacobi eliptik fonksiyon çözümler soliton çözümlere dejenere olur. Böylece parlak, koyu, tekil ve birkaç kombo optik soliton çözümler ortaya çıkarıldı ve bu çözümler karşılık gelen varlık kriterleri ile sunuldu. Bu yaklaşımın başarısı, daha sonraki çalışmaların yolunu açacak olmasıdır.

Gelecekte, bu tezde incelenen model denklemler pertürbasyon terimleri dahil edilerek çalışılacaktır. Ayrıca Lie simetri analizi, yarı-invers varyasyonel prensibi, Kudryashov metodu, deneme denklem yöntemi, G'/G −açılım yöntemi gibi birçok integrasyon şeması modelin pertürbe edilmiş versiyonuna uygulanacaktır. Dahası model, DWDM topoloji, optik bağlayıcılar ve optik metamateryallerin yanı sıra çift kırılımlı fiberlere de uygulanacaktır. Bu tür çalışmaların sonuçları yavaş yavaş görünür hale gelecektir.

KAYNAKÇA

Abdou, M., & Elhanbaly, A. (2007). Construction of Periodic and Solitary Wave Solutions By The Extended Jacobi Elliptic Function Expansion Method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 12(7),* 1229-1241.

Bhrawy, A., Abdelkawy, M., & Biswas, A. (2013). Cnoidal and Snoidal Wave Solutions to Coupled Nonlinear Wave Equations By The Extended Jacobi's Elliptic Function Method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18(4),* 915-925.

Biswas, A., Ekici, M., Sonmezoglu, A., & Belic, M. (2019). Highly Dispersive Optical Solitons With Cubic–Quintic–Septic Law By Extended Jacobi's Elliptic Function Expansion. *Optik, 183*, 571-578.

Biswas, A., Ekici, M., Sonmezoglu, A., & Belic, M. (2019). Highly Dispersive Optical Solitons With Cubic-Quintic-Septic Law By F-Expansion. *Optik, 182*, 897-906.

Biswas, A., Ekici, M., Sonmezoglu, A., & Belic, M. (2019). Highly Dispersive Optical Solitons With Kerr Law Nonlinearity By Extended Jacobi's Elliptic Function Expansion. *Optik, 183*, 395-400.

Biswas, A., Ekici, M., Sonmezoglu, A., & Belic, M. (2019). Highly Dispersive Optical Solitons With Kerr Law Nonlinearity By F-Expansion. *Optik, 181*, 1028-1038.

Biswas, A., Ekici, M., Sonmezoglu, A., & Belic, M. (2019). Highly Dispersive Optical Solitons With Non-Local Nonlinearity By Exp-Function. *Optik, 186*, 288-292.

Biswas, A., Ekici, M., Sonmezoglu, A., & Belic, M. (2019). Highly Dispersive Optical Solitons With Non-Local Nonlinearity By Extended Jacobi's Elliptic Function Expansion. *Optik, 184*, 277-286.

Biswas, A., Ekici, M., Sonmezoglu, A., & Belic, M. (2019). Highly Dispersive Optical Solitons With Quadratic-Cubic Law By F-Expansion. *Optik, 182*, 930-943.

Biswas, A., Vega-Guzman, J., Mahmood, M., Khan, S., Ekici, M., Zhou, Q., . . . Belic, M. (2019). Highly Dispersive Optical Solitons With Undetermined Coefficients. *Optik, 182*, 890-896.

Petrović, N., & Bohra, M. (2016). General Jacobi Elliptic Function Expansion Method Applied To The Generalized (3+1)-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equation. *Optical And Quantum Electronics, 48(4)*, 1-8.

Zhang, H. (2007). Extended Jacobi Elliptic Function Expansion Method and İts Applications. *Communications İn Nonlinear Science And Numerical Simulation, 12(5)*, 627-635.

Zhang, Z. (2015). Jacobi Elliptic Function Expansion Method For The Modified Korteweg-De Vries-Zakharov-Kuznetsov And The Hirota Equations. *Romanian Journal Of Physics, 60(9-10)*, 1384-1394.