T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN KABA λ – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

OKTAY DEVECİ

Tez Danışmanı

Dr.Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN

YOZGAT – 2023

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN KABA λ – İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

OKTAY DEVECİ

Tez Danışmanı

Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN

YOZGAT –2023

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Oktay DEVECİ

……/……/……

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN KABA $\lambda-$ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

OKTAY DEVECİ

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ FUNDA BABAARSLAN

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümünde, istatistiksel yakınsaklık, kaba istatistiksel yakınsaklık ve fuzzy sayı kavramlarının öneminden ve tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel limit ve yığılma noktaları ile bu kavramların $\lambda-$analogları için bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde sonlu boyutlu normlu uzaylarda bir dizinin kaba istatistiksel yakınsaklığı, kaba istatistiksel yığılma noktası ve kaba istatistiksel limit noktası tanımları ve örneklerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise ilk olarak fuzzy sayı dizilerinin temel özellikleri hatırlatılmıştır. Sonra, fuzzy sayı dizilerinin kaba $\lambda-$istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmış, kaba $\lambda-$ istatistiksel limit kümesi ile dizinin $\lambda-$ istatistiksel limit infimumu ve $\lambda-$ istatistiksel limit supremumu arasındaki ilişki araştırılmıştır. Son olarak, fuzzy sayı dizileri için kaba $\lambda-$istatistiksel yığılma noktalarının kümesi ile kaba $\lambda-$ istatistiksel limit noktalarının kümesi tanımlanarak aralarındaki kapsama ilişkileri incelenmiştir.

2023, viii + 30 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Fuzzy sayı dizisi, $\lambda-$ İstatistiksel Yakınsaklık, Kaba $\lambda-$ İstatistiksel Yakınsaklık, Kaba $\lambda-$ İstatistiksel Limit Noktası, Kaba $\lambda-$İstatistiksel Yığılma Noktası.

ABSTRACT

MASTER THESIS

ROUGH λ – STATISTICAL CONVERGENCE OF SEQUENCES OF FUZZY NUMBERS

λ

OKTAY DEVECİ

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. FUNDA BABAARSLAN

In the first chapter of this thesis that consists of three chapters, the importance and historical development of the concepts of statistical convergence, rough statistical convergence and sequences of fuzzy numbers were mentioned.

In the second chapter, some fundamental definitions and theorems of statistical convergence, statistical limit points and statistical cluster points for real number sequences and their λ – analogues which will be used in the later chapters were given.

In the third chapter, the definitions and examples of rough statistical convergence, rough statistical limit points and rough statistical cluster points of a sequence in finite dimensional normed space were given.

In the forth chapter, some basic properties of sequences of fuzzy numbers were recalled. Then, the definition of rough λ – statistical convergence was introduced, the relation between the rough λ – statistical limit set and λ – statistical limit inferior and λ – statistical limit superior were examined. Finally, by defining the sets of rough λ – statistical limit points and rough λ – statistical cluster points of a sequence of fuzzy numbers, the inclusion of relations between them were investigated.

2023, viii + 30 PAGE

KEYWORDS: Sequence of Fuzzy Numbers, λ – Statistical Convergence, Rough λ – Statistical Convergence, Rough λ – Statistical Limit Point, Rough λ – Statistical Cluster Point.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Yozgat Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN yönetiminde hazırlanarak Yozgat Bozok Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur. Yüksek lisans eğitimim boyunca beni yönlendiren, çalışmamın her aşamasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Funda BABAARSLAN`a, çalışmalarım esnasında her zaman bana destek olan eşim Saliha`ya, hayatımın her alanında yanımda olan benden dualarını esirgemeyen anama ve babama saygılarımı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca doğumuyla evimizin neşesi yerli yersiz tebessümlerimizin vesilesi olan kızım Nezahat Ece`ye de yaşattığı mutluluktan ve verdiği manevi güçten dolayı teşekkür ederim.

İMZA

OKTAY DEVECİ

……/……/……

İÇİNDEKİLER

Tez Onay Sayfası…… ii

Tez Beyanı……... iii

Özet……. iv

Abstract……... v

Önsöz…….. vi

İçindekiler…… vii

Simgeler ve Kısaltmalar Listesi…….. viii

1. GİRİŞ…….. 1

2. TEMEL KAVRAMLAR..……..... 3

3. NORMLU UZAYLARDA KABA İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI VE İSTATİSTİKSEL YIĞILMA NOKTALARI…..... 11

3.1. Normlu Uzaylarda Kaba Yakınsaklık ve Kaba İstatistiksel Yakınsaklık…… 11

3.2. Normlu Uzaylarda Kaba İstatistiksel Yığılma Noktası……... 13

3.3. Normlu Uzaylarda Kaba İstatistiksel Limit noktası……..……. 17

4. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN KABA λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI... 19

4.1. Fuzzy Sayı Dizilerinin Kaba $\lambda-$ Yakınsaklığı ve Kaba $\lambda-$ İstatistiksel Yakınsaklığı…… 19

4.2. Fuzzy Sayı DizilerininKaba $\lambda-$İstatistiksel Yığılma Noktası…… 23

4.3. Fuzzy Sayı Dizilerinin Kaba $\lambda-$İstatistiksel Limit Noktası…… 26

5. KAYNAKLAR…… 28

ÖZGEÇMİŞ

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	**Açıklamalar**
$(x_\kappa) \subset X$	X uzayında bir dizisi
(X_κ)	Fuzzy sayı dizisi
R	Reel sayılar kümesi
$L(R)$	Fuzzy sayılar kümesi
$LIM^r X_\kappa$	(X_κ) dizisinin kaba limit kümesi
$S - LIM^r X_\kappa$	(X_κ) dizisinin kaba istatistiksel limit kümesi
$S_\lambda - LIM^r X_\kappa$	(X_κ) dizisinin kaba $\lambda -$ istatistiksel limit kümesi
$\Gamma_\lambda^r(X)$	(X_κ) dizisinin kaba λ-istatistiksel yığılma noktalarının kümesi
$\Lambda_\lambda^r(X)$	(X_κ) dizisinin kaba λ -istatistiksel limit noktalarının kümesi
$S_\lambda - \liminf X_\kappa$	(X_κ) dizisinin λ -istatistiksel limit infimumu
$S_\lambda - \limsup X_\kappa$	(X_κ) dizisinin λ -istatistiksel limit supremumu
$X_\kappa \xrightarrow{r} X_*$	(X_κ) dizisi (X_*) sayısına $r -$ yakınsak
$X_\kappa \xrightarrow{r-st} X_*$	(X_κ) dizisi (X_*) sayısına $r -$ istatistiksel yakınsak

1. GİRİŞ

Reel ya da kompleks terimli sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak Steinhaus (Steinhaus, 1951) ve Fast (Fast, 1951) tarafından birbirinden bağımsız olarak tanımlanmış, Schoenberg (Schoenberg, 1959) tarafından bir toplanabilme metodu olarak çalışılmıştır. Daha sonraki yıllarda, bu kavramın toplanabilme teorisi başta olmak üzere ölçü teorisi, sayılar teorisi, ergodik teori gibi alanlarla olan ilişkileri incelenmiştir. İstatistiksel yakınsaklık fikrinden yola çıkarak, Fridy (Fridy, 1993) istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktaları tanımlarını vermiş, Pehlivan ve Mamedov (Pehlivan ve Mamedov, 2000) klasik limit noktası yerine bir istatistiksel yığılma noktası alarak Turnpike teorisini ispatlamıştır. Aynı yıl içerisinde Mursaleen (Mursaleen, 2000) (V,λ) - toplanabilirlik kavramı yardımıyla $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırılan ve istatistiksel yakınsaklığın genellemesi olan yeni bir metot elde etmiştir.

Sınırlı ve yakınsak fuzzy sayı dizilerinin Matloka (Matloka, 1986) tarafından tanımlanmasından sonra, reel sayı dizilerinden farklı olarak grup yapısının bulunmamasından dolayı bu diziler literatürde birçok çalışma alanı bulmuştur. Bu dizilerin istatistiksel yakınsaklığı ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramları Nuray ve Savaş (Nuray ve Savaş, 1995) tarafından çalışılmıştır. Dahası, fuzzy sayı dizileri için Savaş (Savaş, 2000) $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklığı; Tuncer ve Benli (Tuncer ve Benli, 2007) $\lambda-$ istatistiksel limit noktası ve $\lambda-$ istatistiksel yığılma noktası ile Benli (Benli, 2013) $\lambda-$ istatistiksel limit infimum ve $\lambda-$ istatistiksel limit supremum tanımlarını vermişlerdir.

Klasik yakınsaklığın ilgi çekici bir diğer genellemesi olan kaba yakınsaklık teorisi 2001 yılında Phu (Phu, 2001) tarafından sonlu boyutlu normlu uzaylarda, ardından 2003 yılında (Phu, 2003) sonsuz boyutlu normlu uzaylarda tanımlanarak bu uzaylardaki bir dizinin kaba limit kümesinin geometrik ve topolojik özellikleri incelenmiştir. 2008 yılında Aytar (Aytar, 2008) R^n, $n-$ boyutlu reel uzayda kaba istatistiksel yakınsaklığı doğal yoğunluk yardımıyla tanımlayarak, kaba istatistiksel limit kümesinin kapalılığını ve konveksliğini göstermiştir. Bu çalışma birçok yazarı çeşitli diziler için kaba istatistiksel yakınsaklık kavramını çalışmaya teşvik etmiştir. Örneğin Maity (Maity, 2016) reel değerli fonksiyon dizileri için; Kişi ve Ünal (Kişi ve Ünal, 2021) sonlu boyutlu uzayların çift dizileri için; Demir ve Gümüş (Demir ve Gümüş, 2022) fark dizileri için kaba istatistiksel yakınsaklığı incelemişlerdir.

2017 yılında Aytar (Aytar, 2017) sonlu boyutlu normlu uzaylarda bir dizinin kaba istatistiksel limit noktalarının kümesi ve kaba istatistiksel yığılma noktalarının kümesini tanımlayarak aralarındaki kapsama ilişkisini araştırmıştır. Ayrıca, bu kavramları fonksiyon dizilerine uyarlamış ve istatistiksel yoğunlaşma noktası denilen yeni bir kavramla karşılaşmıştır.

Çoğunlukla normlu uzaylarda çalışılan kaba yakınsaklık, vektör uzayı olmadığı için normlu uzay kategorisinde bulunmayan fuzzy sayı uzayında Akçay ve Aytar (Akçay ve Aytar, 2015) tarafından çalışılmış ve onun istatistiksel analoğu ise Debnath ve Rakshit (Debnath ve Rakshit, 2019) tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak fuzzy sayı dizilerinin kaba istatistiksel yakınsaklığı genelleştirilerek kaba $\lambda-$ istatistiksel yakınsaklığı elde edilmiştir. Ayrıca bu diziler için kaba $\lambda-$ istatistiksel limit kümesi tanımlanarak, bu küme ile dizinin $\lambda-$ istatistiksel limit infimumu ve supremumu arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir. Son olarak, fuzzy sayı dizilerinin kaba $\lambda-$ istatistiksel limit noktalarının ve kaba $\lambda-$ istatistiksel yığılma noktalarının kümeleri tanımlanarak kapsama ilişkileri ispatlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde reel ya da kompleks terimli sayı dizileri için ve ayrıca fuzzy sayı dizileri için temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. K doğal sayıların bir alt kümesi ve $K_n = \{\kappa \in K : \kappa \leq n\}$ olsun. $|K_n|$, K_n kümesinin eleman sayısını göstermek üzere

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limitine K kümesinin doğal yoğunluğu, $\bar{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$ eşitliğine ise K kümesinin üst doğal yoğunluğu denir (Niven ve Zuckerman, 1980). Yoğunluk özelliklerinden, $K^c = N \setminus K$ olmak üzere $\delta(K^c) = 1 - \delta(K)$ dir. Ayrıca, sonlu kümenin doğal yoğunluğu sıfırdır ve eğer $K_1 \subseteq K_2$ ise $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$ dir (Freedman ve Sember, 1981).

Örnek 2.1. $K = \{\kappa \in N:\ 1 < \kappa < 5\}$ olsun. K kümesinin doğal yoğunluğu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{\kappa \in N:\ 1 < \kappa < 5\}| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$$

dır.

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir.

Tanım 2.2. $x = (x_\kappa)$ dizisi reel ya da kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer bu dizi sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer tüm κ lar için bir P özelliğini sağlıyorsa $x = (x_\kappa)$ dizisine hemen hemen her κ için P özelliğini sağlıyor denir ve *h.h.κ.* ile gösterilir (Fridy, 1985).

Tanım 2.3. $x = (x_\kappa)$ dizisi reel ya da kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{\kappa \leq n: |x_\kappa - \xi| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya buna denk olarak *h.h.κ.* için

$$|x_\kappa - \xi| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir ξ sayısı varsa $x = (x_\kappa)$ dizisi ξ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - limx = \xi$ şeklinde gösterilir (Fast 1951).

Tanım 2.4. $x = (x_\kappa)$ dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{\kappa_i : i \in N\}| = 0$$

ise (x_{κ_i}) alt dizisine seyrek alt dizi, aksi takdirde seyrek olmayan alt dizi denir (Fridy, 1993).

Tanım 2.5. $x = (x_\kappa)$ dizisinin seyrek olmayan υ ye yakınsak bir alt dizisi varsa, υ ye $x = (x_k)$ dizisinin bir istatistiksel limit noktası denir. $x = (x_\kappa)$ dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_x ile gösterilir (Fridy, 1993).

Tanım 2.6. $x = (x_\kappa)$ dizisi reel ya da kompleks sayıların bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\{\kappa \epsilon N : |x_\kappa - \mu| < \varepsilon\}$$

kümesi sıfır yoğunluğa sahip değilse μ sayısı $x = (x_\kappa)$ dizisinin bir istatistiksel yığılma noktasıdır denir. $x = (x_\kappa)$ dizisinin istatistiksel yığılma noktalarının kümesi Γ_x ile gösterilir (Fridy, 1993).

Tanım 2.7. $x = (x_\kappa)$ dizisinin istatistiksel limit supremum ve istatistiksel limit infimum kavramları

$$A_x = \{a \in R : \delta(\{\kappa \in N : x_\kappa < a\}) \neq 0\}$$

$$B_x = \{b \in R : \delta(\{\kappa \in N : x_\kappa > b\}) \neq 0\}$$

olmak üzere, sırasıyla

$$st - lim\,sup\, x := \begin{cases} sup\, B_x, & B_x \neq \varnothing \\ -\infty, & d.d. \end{cases}$$

$$st - lim\,inf\, x := \begin{cases} inf\, A_x, & A_x \neq \varnothing \\ +\infty, & d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Fridy, 1993).

Tanım 2.8. $\lambda = (\lambda_n)$ dizisi pozitif reel sayıların azalmayan, sonsuza yakınsayan ve

$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$, $\lambda_1 = 1$

koşulunu sağlayan bir dizisi olsun. $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere, $x = (x_\kappa)$ dizisi $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{\kappa \in I_n : |x_\kappa - \xi| > \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_\kappa)$ dizisi ξ ye λ −istatistiksel yakınsaktır denir. $st_\lambda - \lim_{\kappa\to\infty} x_\kappa = \xi$ veya $x_\kappa \to \xi\ (S_\lambda)$ ile gösterilir (Mursaleen, 2000).

Tanım 2.9. $X: R \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan ve aşağıdaki şartları sağlayan fonksiyona fuzzy sayısı denir.

i. X normaldir. Yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde en az bir $x_0 \in R$ vardır.

ii. X fuzzy konvekstir. Yani

$\forall x_1, x_2 \in R$, $0 \leq \lambda \leq 1$ için $X(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\{X(x_1), X(x_2)\}$ dir.

iii. X üst yarı süreklidir. Yani $\forall t \in [0,1]$için $\{x: X(x) < t\}$ kümesi açıktır.

iv. $X^0 = \{x \in R: X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır.

Fuzzy sayılar kümesi $L(R)$ ile gösterilir.

Fuzzy sayılar üzerinde Hausdorff metriği $\bar{d}: L(R) \times L(R) \to R^+ \cup \{0\}$ olmak üzere

$$\bar{d}(X,Y) = \sup_{\alpha\in[0,1]} maks\left\{\left|\underline{X^\alpha} - \underline{Y^\alpha}\right|, \left|\overline{X^\alpha} - \overline{Y^\alpha}\right|\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $X^\alpha = \left[\underline{X^\alpha}, \overline{X^\alpha}\right]$ ifadesi X fuzzy sayısının α kesmesidir. Fuzzy sayılarda sıralama bağıntısı

$X \leq Y \Leftrightarrow \forall \alpha \epsilon [0,1]$ için $\overline{X^\alpha} \leq \overline{Y^\alpha}$ ve $\underline{X^\alpha} \leq \underline{Y^\alpha}$

şeklindedir. Bu $\leq$ bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Kesin küçük bağıntısı ise

$X < Y \Leftrightarrow \exists \alpha \epsilon [0,1]$ için $\overline{X^\alpha} < \overline{Y^\alpha}$ ve $\underline{X^\alpha} < \underline{Y^\alpha}$

dir (Diamond ve Kloeden, 1994).

Tanım 2.10. $X = (X_\kappa)$ bir fuzzy sayı dizisi olmak üzere $\{X_\kappa : \kappa \in N\}$ kümesi sınırlı ise $X = (X_\kappa)$ dizisi sınırlıdır denir (Matloka, 1986).

Tanım 2.11. $X = (X_\kappa)$ bir fuzzy sayı dizisinin A fuzzy sayısına yakınsak bir alt dizisi varsa A fuzzy sayısına bu dizisinin limit noktası denir. $X = (X_\kappa)$ dizisinin tüm limit noktalarının kümesi L_x ile gösterilir (Aytar, 2004).

Tanım 2.12. Her $\varepsilon > 0$ için $\kappa > \kappa_0$ olduğunda $\bar{d}(X_\kappa, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir κ_0 sayısı varsa (X_κ) fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına yakınsaktır denir ve $\lim_{\kappa\to\infty} X_\kappa = X_0$ veya $\kappa \to \infty$ için $X_\kappa \to X_0$ şeklinde gösterilir (Matloka, 1986).

Tanım 2.13. $X = (X_\kappa)$ bir fuzzy sayı dizisi olmak üzere, $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{\kappa \le n : \bar{d}(X_\kappa, X_0) \ge \varepsilon\}\right| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_\kappa)$ dizisi X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_{\kappa\to\infty} X_\kappa = X_0$ ile gösterilir (Nuray ve Savaş, 1995).

Sonlu bir kümenin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak bir fuzzy sayı dizisi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Ancak istatistiksel yakınsaklığın klasik anlamda yakınsaklığı gerektirmediği aşağıdaki örnekten görülebilir.

Örnek 2.1. $X = (X_\kappa)$ bir fuzzy sayı dizisi

$$\mu_*(x) := \begin{cases} 0 & , \ x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty) \ ise \\ \dfrac{x}{2} & , \ x \in [0, 2] \ \ ise \\ \dfrac{4-x}{2}, & x \in [2, 4] \ \ ise \end{cases}$$

olmak üzere $\kappa = n^2 \ \ (n = 1, 2, 3, ...)$ ise

$$X_\kappa(x) := \begin{cases} 0 & , \ x \in (-\infty, \kappa - 2) \cup (\kappa + 2, \infty) \ \ ise \\ \dfrac{x-(\kappa-2)}{2} & , \ x \in [\kappa - 2, \kappa] \ \ ise \\ \dfrac{\kappa+2-x}{2} & , \ x \in [\kappa, \kappa + 2] \ \ ise \end{cases}$$

$\kappa \neq n^2 \ \ (n = 1, 2, 3, ...)$ ise $X_\kappa(x) = \mu_*(x)$ şeklinde tanımlansın. Burada $\forall \ \varepsilon > 0$ için

$\mathrm{K}(\varepsilon) = \left\{ \kappa \in N : \bar{d}(X_\kappa, \mu) \geq \varepsilon \right\} \subseteq \{9, 16, 25, ...\}$ ve $\delta\left(\mathrm{K}(\varepsilon)\right) = 0$ olduğundan (X_κ) dizisi μ_* sayısına istatistiksel yakınsaktır fakat yeterince küçük ε lar için $\mathrm{K}(\varepsilon)$ kümesi sonlu olmayacağından (X_κ) dizisi μ_* a yakınsak değildir.

Tanım 2.14. $X = (X_\kappa)$ bir fuzzy sayı dizisi olmak üzere, eğer

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \{ \kappa_j \in N : j \in N \} \right| = 0$$

ise (X_{κ_j}) alt dizisine seyrek (thin) alt dizi denir.

Eğer

$$\lim_{n \to \infty} sup \frac{1}{n} \left| \{ \kappa_j \in N : j \in N \} \right| > 0$$

ise (X_{κ_j}) alt dizisine seyrek olmayan (non-thin) alt dizi denir (Aytar, 2004).

Tanım 2.15. $X = (X_\kappa)$ fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\lambda_n} \left| \{ \kappa \in I_n : \bar{d}(X_\kappa, X_0) \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

ise $X = (X_\kappa)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına λ-istatistiksel yakınsaktır denir ve $s_\lambda - limX_\kappa = X_0$ ile gösterilir (Mursaleen, 2000).

Örnek 2.2. $X = (X_\kappa)$ bir fuzzy sayı dizisi

$$\mu_*(x) := \begin{cases} 0 \quad , \ x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty) \, ise \\ \dfrac{x}{2} \quad , \ x \in [0, 2] \ ise \\ \dfrac{4-x}{2}, x \in [2, 4] \ ise \end{cases}$$

olmak üzere $\kappa = n^2 \ (n = 1, 2, 3, ...)$ ise

$$X_\kappa(x) := \begin{cases} 0 \qquad , \ x \in (-\infty, \kappa - 2) \cup (\kappa + 2, \infty) \ ise \\ \dfrac{x-(\kappa-2)}{2} \ , \ x \in [\kappa - 2, \kappa] \ ise \\ \dfrac{\kappa + 2 - x}{2} \quad , \ x \in [\kappa, \kappa + 2] \ ise \end{cases}$$

ve $\kappa \neq n^2 \ (n = 1, 2, 3, ...)$ ise

$$X_\kappa(x) := \begin{cases} 0 \ , \ x \in (-\infty, 0) \cup (4 - \dfrac{1}{\kappa}, \infty) \ ise \\ \dfrac{x}{2} \ , \ x \in [0, 2] \ ise \\ \dfrac{4 - \dfrac{1}{\kappa} - x}{2 - \dfrac{1}{\kappa}} \quad , \ x \in [2, 4 - \dfrac{1}{\kappa}] \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada $\lambda_n = (n) = (1, 2, ...)$ alınırsa $X = (X_\kappa)$ dizisi μ_* sayısına λ-istatistiksel yakınsaktır. Aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır. Ancak $\lambda_n = (1, 1, 1...)$ alınırsa aynı dizi μ_* sayısına λ-istatistiksel yakınsak değildir. Dahası adi anlamda yakınsaklıktan da söz edilemez.

Tanım 2.16. $X = (X_\kappa)$ fuzzy sayı dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa_j \in I_n : j \in N\}\right| = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa (X_{κ_j}) alt dizisine λ-seyrek (thin) alt dizi,

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa_j \in I_n : j \in N\}\right| > 0$$

ise (X_{κ_j}) alt dizisine λ-seyrek olmayan (non-thin) alt dizi denir (Tuncer ve Benli, 2007).

Tanım 2.17. $X = (X_\kappa)$ fuzzy sayı dizisinin bir Y fuzzy sayısına klasik anlamda yakınsayan λ-seyrek olmayan bir alt dizisi varsa Y fuzzy sayısına bu dizinin λ – istatistiksel limit noktası denir. Bir $X = (X_\kappa)$ dizisinin λ – istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_X^λ ile gösterilir (Tuncer ve Benli, 2007).

Tanım 2.18. $X = (X_\kappa)$ fuzzy sayı dizisi olmak üzere eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \in I_n : \bar{d}(X_\kappa, Z) < \varepsilon\}\right| \neq 0$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \in I_n : \bar{d}(X_\kappa, Z) < \varepsilon\}\right| > 0$$

ise Z fuzzy sayısına bu dizinin $\lambda-$istatistiksel yığılma noktası denir. Bir $X = (X_\kappa)$ dizisinin λ – istatistiksel yığılma noktalarının kümesi Γ_X^λ ile gösterilir (Tuncer ve Benli, 2007).

Teorem 2.1. $X = (X_\kappa)$ fuzzy sayı dizisi için $\Lambda_X^\lambda \subseteq \Gamma_X^\lambda$ dir (Tuncer ve Benli, 2007).

Teorem 2.2. $X = (X_\kappa)$ fuzzy sayı dizisinin adi limit noktalarının kümesi L_x olmak üzere $\Gamma_X^\lambda \subseteq L_x$ dir (Tuncer ve Benli, 2007).

Teorem 2.3. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi için $s_\lambda - limX_k = X_0$ ise $\Lambda_X^\lambda = \Gamma_X^\lambda = \{X_0\}$ dır (Tuncer ve Benli, 2007).

Tanım 2.19. (X_k) dizisinin S_λ – limit supremum ve S_λ – limit infimum kavramları

$F_x = \{\rho \epsilon L(R): \delta_\lambda(\{\kappa \in N: X_\kappa \succ \rho\}) \neq 0\}$

$G_x = \{\rho \epsilon L(R): \delta_\lambda(\{\kappa \in N: X_\kappa \prec \rho\}) \neq 0\}$

olmak üzere, sırasıyla

$$S_\lambda - \liminf_\kappa X_\kappa := \inf F_X$$

$$S_\lambda - \limsup_\kappa X_\kappa := \sup G_X$$

şeklinde tanımlanır (Benli, 2013).

3. NORMLU UZAYLARDA KABA İSTATİSTİKSEL LİMİT NOKTALARI VE İSTATİSTİKSEL YIĞILMA NOKTALARI

3.1. Normlu Uzaylarda Kaba Yakınsaklık ve Kaba İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1. $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve (x_κ) X uzayında bir dizisi olsun. $r \geq 0$ olmak üzere, eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\kappa \geq \kappa_0(\varepsilon)$ olduğunda

$$\|x_\kappa - x_*\| < r + \varepsilon$$

koşulunu sağlayacak bir $\kappa_0(\varepsilon)$ sayısı varsa veya buna denk olarak

$$\lim_{\kappa\to\infty} sup\|x_\kappa - x_*\| \leq r$$

koşulu sağlanıyorsa (x_κ) dizisi x_* noktasına kaba yakınsaktır (veya r −yakınsaktır) denir. $\kappa \to \infty$ iken $x_\kappa \xrightarrow{r} x_*$ şeklinde gösterilir. Bu koşulu sağlayan bir x_* noktası, (x_κ) dizisinin bir r −limit noktası olarak adlandırılır. Ayrıca

$$LIM^r x_\kappa = \left\{x_* \in X: x_\kappa \xrightarrow{r} x_*\right\}$$

kümesine (x_κ) dizisinin r- limit kümesi denir. $LIM^r x_\kappa \neq \emptyset$ ise (x_κ) dizisi x_* noktasına r −yakınsaktır ve r sayısına (x_κ) dizisinin yakınsaklık derecesi denir (Phu, 2001).

Örnek 3.1.1. (y_κ) dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$(y_\kappa) = 0.5 + \frac{2(-1)^\kappa}{\kappa}$,κ=1,2,…

Açıkça görüldüğü üzere bu dizi 0.5 değerine klasik anlamda yakınsaktır. Ancak yeterli uzunluktaki κ lar için bu dizinin terimleri bilgisayarla kesin olarak hesaplanamaz. Böylece

$(x_\kappa) := \text{round}(y_\kappa) \coloneqq \text{z}$

yaklaşım dizisini tanımlayalım. Burada z, $\text{z} - 0.5 \leq y_\kappa < z + 0.5$ şartını sağlayan en yakın tamsayı değeri olsun.

$(x_1) = -1$, $(x_2) = 2$, $\left(x_{2j-1}\right)$ =0, $\left(x_{2j}\right)$ =1, j=2,3,…

olduğundan (x_κ) dizisi yakınsak değildir. Ancak $x_\kappa \xrightarrow{0.5} 0.5$ dir.

Ayrıca r- limit kümesi

$$LIM^r x_\kappa = \begin{cases} \emptyset \quad , & r < 0.5 \ ise \\ [1-r, r], & r \geq 0.5 \ ise \end{cases}$$

dir, (Phu, 2001).

Tanım 3.1.2. (x_κ) dizisi $\left(X, \|.\|\right)$ normlu uzayında bir dizi ve $r \geq 0$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{\kappa \in N: \|x_\kappa - x_*\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

ise veya buna denk olarak

$$st - \lim_{\kappa \to \infty} sup \|x_\kappa - x_*\| \leq r$$

ise (x_κ) dizisi x_* noktasına kaba istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_\kappa \overset{r-st}{\to} x_*$ ile gösterilir.

Ayrıca

$$st - LIM^r x_\kappa = \left\{x_* \in X: x_\kappa \overset{r-st}{\to} x_*\right\}$$

kümesine (x_κ) dizisinin r- istatistiksel limit kümesi denir.

Eğer $st - LIM^r x_\kappa \neq \emptyset$ ise $st - LIM^r x_\kappa = [st - limsupx - r, st - liminfx + r]$

dir, (Aytar, 2008).

Örnek 3.1.2. X reel sayılar uzayında (x_κ) dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\left(x_\kappa\right) := \begin{cases} (-1)^\kappa, & \kappa \neq n^2 \\ \kappa \quad , & \kappa = n^2 \end{cases}$$

dizisi sınırlı olmadığından $LIM^r x_\kappa = \emptyset$ dir. Ancak $\{1, 4, 9, ...\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan

$$st - LIM^r x_\kappa = \begin{cases} \emptyset \quad , & eğer\ r < 1\ ise \\ [1-r, r-1] \ , & diğer\ durumda \end{cases}$$

dir (Aytar, 2008).

3.2. Normlu Uzaylarda Kaba İstatistiksel Yığılma Noktası

Tanım 3.2.1. $r \geq 0$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$\delta(\{\kappa \epsilon N: \|x_\kappa - \mu\| < r + \varepsilon\}) \neq 0$

olacak şekildeki $\mu \epsilon X$ vektörüne (x_κ) dizisinin kaba istatistiksel yığılma noktası denir. Bu dizinin kaba istatistiksel yığılma noktalarının kümesi Γ_x^r ile gösterilir.

$r = 0$ olması durumunda Fridy (Fridy, 1993) tarafından tanımlanan istatistiksel yığılma noktası tanımı elde edilir. $r_1 \leq r_2$ için $\Gamma_x^{r_1} \subseteq \Gamma_x^{r_2}$ olduğu kolayca görülür (Aytar, 2017).

Fridy (Fridy, 1993) tarafından $\Gamma_x = \Gamma_x^0$ kümesinin kapalı olduğu gösterilmiştir. Aşağıdaki teoremde ise Aytar (Aytar, 2017) her bir $r > 0$ için Γ_x^r kümesinin kapalı olduğunu ispatlamıştır.

Teorem 3.2.1. $r \geq 0$ olmak üzere herhangi bir (x_κ) dizisi için, Γ_x^r kümesi kapalıdır.

İspat. $\Gamma_x^r \neq \emptyset$ ve $\lim_{\kappa \to \infty} y_\kappa = L$ şartını sağlayan bir $y = (y_\kappa) \subseteq \Gamma_x^r$ dizisini alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$\delta(\{\kappa \epsilon N: \|x_\kappa - y_*\| < r + \varepsilon\}) \neq 0$

olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ olsun. $\lim_{\kappa \to \infty} y_\kappa = y_*$ olduğundan bir $\kappa_0 = \kappa_0(\varepsilon) \in N$ vardır öyle ki tüm $\kappa > \kappa_0$ için

$\|y_\kappa - y_*\| < \frac{\varepsilon}{2}$

dir. $j_0 > \kappa_0$ olacak şekilde j_0 alalım. Bu takdirde, $\|y_{j_0} - y_*\| < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir.

Kabul edelim ki j, $\left\{k \epsilon N: \|x_\kappa - y_{j_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ kümesinin bir elemanı olsun.

$$\|x_j - y_{j_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğundan,

$$\|x_j - y_*\| \leq \|x_j - y_{j_0}\| + \|y_{j_0} - y_*\| < r + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = r + \varepsilon$$

dir. Bu ise $j \epsilon \{\kappa \epsilon N: \|x_\kappa - y_*\| < r + \varepsilon\}$ olduğunu gösterir.

Böylece

$\{\kappa \epsilon N: \|x_\kappa - y_{j_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\} \subseteq \{j \epsilon N: \|x_\kappa - y_*\| < r + \varepsilon\}$

kapsaması sağlanır. Doğal yoğunluğa geçilerek

$\delta(\{\kappa\epsilon N: \|x_\kappa - y_{j_0}\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq \delta(\{j\epsilon N: \|x_\kappa - y_*\| < r + \varepsilon\})$

elde edilir.

Kabulümüzden, kapsamanın sol tarafındaki kümenin doğal yoğunluğu sıfıra eşit olmadığından, sağ tarafındaki kümenin doğal yoğunluğu da sıfırdan farklıdır. Böylece $y_* \in \Gamma_x$ dir.

Eğer $\mu\epsilon\Gamma_x^r$ ise $\delta(\{\kappa: \|x_\kappa - \mu\| < r + \varepsilon\}) \neq 0$ dır. $K = \{\kappa: \|x_\kappa - \mu\| \leq r\}$ olmak üzere, Bolzano–Weierstrass teoreminden $(x_\kappa)_{\kappa\in K}$ alt dizisinin bir istatistiksel yığılma noktası vardır. Eğer bu nokta v ile gösterilirse $\|\mu - v\| \leq r$ dir. O halde $\mu\epsilon\Gamma_x^r$ ise $\|\mu - v\| \leq r$ olacak şekilde bir $v \in \Gamma_x$ vektörü vardır (Aytar, 2017).

Teorem 3.2.2. $r > 0$ olsun. Herhangi bir (x_κ)dizisi için $x_* \in \Gamma_x^r$ ancak ve ancak bir $y = (y_\kappa)$ dizisi vardır öyle ki $x_* \in \Gamma_y$ ve *h.h.k.* için $\|x_\kappa - y_\kappa\| \leq r$ dir (Aytar, 2017).

İspat. Gereklilik. $r > 0$ ve ε keyfi olsun. $x_*\epsilon\Gamma_x^r$ olduğunu var sayalım. O halde

$K = \{\kappa \in N: \|x_\kappa - x_*\| < r + \varepsilon\}$ olmak üzere $\delta(K) \neq 0$ dir.

$z = (z_\kappa)$ dizisi keyfi bir dizi olmak üzere $y = (y_k)$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$y_\kappa = \begin{cases} x_* & , \|x_* - x_\kappa\| \leq r \ \ ve \ \ \kappa \in K \\ x_\kappa + r\frac{x_* - x_\kappa}{\|x_* - x_\kappa\|} & , \|x_* - x_\kappa\| > r \ \ ve \ \ \kappa \in K \\ z_\kappa & , \ \kappa \notin K \end{cases} \qquad (3.1.)$$

O halde, her $\kappa \in K$ için

$$\|y_\kappa - x_*\| = \begin{cases} 0 & , \ \ \|x_* - x_\kappa\| \leq r \ ise \\ \|x_* - x_\kappa\| - r & , \ diğer \ durumda \end{cases} \qquad (3.2.)$$

ve buradan $\|x_k - y_k\| \leq r$ olduğu açıktır.

Şimdi $K \subseteq \{\kappa \in N: \|y_\kappa - x_*\| < \varepsilon\}$ kapsamasının sağlandığını gösterelim. Eğer $\kappa_0 \in K$ ise o zaman $\|x_{\kappa_0} - x_*\| < r + \varepsilon$ dir. Dolayısıyla aşağıdaki iki durum mümkündür:

i. Eğer $\|x_{\kappa_0} - x_*\| \leq r$ ise, (3.2.) den $\|y_{\kappa_0} - x_*\| = 0$ dır. Yani

$\kappa_0 \in \{\kappa \in N: \|y_\kappa - x_*\| < \varepsilon\}$ dir.

ii. Eğer $\|x_{\kappa_0} - x_*\| > r$ ise (3.2.) den $\|y_{\kappa_0} - x_*\| = \|x_{\kappa_0} - x_*\| - r < r + \varepsilon - r = \varepsilon$ yani $\kappa_0 \in \{\kappa \in N: \|y_\kappa - x_*\| < \varepsilon\}$ dir.

$\delta(K) \neq 0$ ve $K \subseteq \{\kappa \in N: \|y_\kappa - x_*\| < \varepsilon\}$ olduğundan $\delta(\{\kappa \in N: \|y_\kappa - x_*\| < \varepsilon\}) \neq 0$ elde edilir.

Yeterlilik. $x_* \in \Gamma_y$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu takdirde $\delta(\{\kappa \in N: \|y_\kappa - x_*\| < \varepsilon\}) \neq 0$ dir. $j \in \{\kappa \in N: \|y_\kappa - x_*\| < \varepsilon\}$ alalım. Böylece

$$\|x_j - x_*\| \leq \|x_j - y_j\| + \|y_j - y_*\| < r + \varepsilon$$

olduğundan $j \in \{\kappa \in N: \|x_\kappa - x_*\| < r + \varepsilon\}$ dir.

Bu ise

$$\{\kappa \in N: \|y_\kappa - x_*\| < \varepsilon\} \subseteq \{\kappa \in N: \|x_\kappa - x_*\| < r + \varepsilon\}$$

kapsamasının sağlandığını gösterir. Sonuç olarak $\delta(\{k \in N: \|x_k - x_*\| < r + \varepsilon\}) \neq 0$ dir (Aytar, 2017).

Aşağıdaki teorem Γ_x^r kümesini bulmak için kolaylık sağlar.

Teorem 3.2.3. $\overline{B_r}(\rho) = \{y \in X: \|y - \rho\| \leq r\}$ olmak üzere $\Gamma_x^r = \bigcup_{\rho \in \Gamma_x} \overline{B_r}(\rho)$ dir (Aytar, 2017).

İspat. $\mu \epsilon \bigcup_{\rho \in \Gamma_x} \overline{B_r}(\rho)$ olsun. O halde $\mu \epsilon \overline{B_r}(\rho)$ olacak şekilde en az bir $\rho \in \Gamma_x^r$ vektörü vardır yani $\|\mu - \rho\| \leq r$ dir. $\varepsilon > 0$ olsun. $\rho \in \Gamma_x$ olduğundan $\delta(K) \neq 0$ şartını sağlayan bir $K = K(\varepsilon) = \{\kappa \in N: \|x_\kappa - \rho\| < \varepsilon\}$ kümesi vardır. Her $\kappa \in K$ için

$$\|x_\kappa - \mu\| \leq \|x_\kappa - \rho\| + \|\rho - \mu\| < \varepsilon + r$$

olduğundan $\delta(\{\kappa \in N: \|x_\kappa - \mu\| < r + \varepsilon\}) \neq 0$dir.

Ters kapsama için $\mu \epsilon \Gamma_x^r$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{\kappa \in N: \|x_\kappa - \mu\| < r + \varepsilon\}) \neq 0$$

dir.

Şimdi $\mu \epsilon \bigcup_{\rho \in \Gamma_x} \overline{B_r}(\rho)$ olduğunu gösterelim. $\mu \notin \bigcup_{\rho \in \Gamma_x} \overline{B_r}(\rho)$ olduğunu kabul edelimyani her $\rho \epsilon \Gamma_x$ için $\|\mu - \rho\| > r$ olsun. Γ_x kümesi kapalı olduğundan

$\|\mu - \tilde{\rho}\| = min\{\|\mu - \rho\|: \rho \epsilon \Gamma_x\}$

olacak şekilde bir $\tilde{\rho} \in \Gamma_x$ vektörü vardır. Burada t her $\rho \in \Gamma_x$ için $\|\mu - \rho\| > r$ olduğundan $t = \|\mu - \tilde{\rho}\| > r$ yazabiliriz. $\tilde{\varepsilon} = \frac{t-r}{3}$ olarak tanımlansın. Böylece

$B_{\tilde{\varepsilon}}(\Gamma_x) = \{y \in X: min\{\|y - \rho\|: \rho \in \Gamma_x\} < \tilde{\varepsilon}\}$

olmak üzere

$X \backslash B_{\tilde{\varepsilon}}(\Gamma_x) \supseteq \{y \in X: \|\mu - y\| < r + \tilde{\varepsilon}\}$

dir.

Γ_x in tanımından $\{\kappa: x_\kappa \notin B_{\tilde{\varepsilon}}(\Gamma_x)\}$ kümesi sıfır yoğunluğa sahiptir. Buradan

$\{\kappa: x_\kappa \notin B_{\tilde{\varepsilon}}(\Gamma_x)\} \supseteq \{\kappa: \|x_\kappa - \mu\| < \tilde{\varepsilon} + r\}$

dir.

Bu kapsama ilişkisinde $\delta(\{\kappa: \|x_\kappa - \mu\| < \tilde{\varepsilon} + r\}) = 0$ olduğundan $\delta(\{\kappa \in N: \|x_\kappa - \mu\| < r + \varepsilon\}) \neq 0$ ile çelişir (Aytar, 2017).

Teorem 3.2.4. $x = (x_\kappa)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır ancak ve ancak $\Gamma_x^r = st - LIM^r x$ dir (Aytar, 2017).

İspat. Gereklilik. $x = (x_\kappa)$ dizisi x_* a istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $\Gamma_x = \{x_*\}$ olur. Teorem 3.2.3.den $\Gamma_x^r = \overline{B}_r(x) = st - LIM^r x$ elde edilir.

Yeterlilik. Teorem 3.2.3.den $\bigcup_{\rho \in \Gamma_x} \bar{B}_r(\rho) = \bigcap_{\rho \in \Gamma_x} \bar{B}_r(\rho)$ dir ancak ve ancak Γ_x kümesi ya boş küme ya da tek elemanlıdır. Böylece

$st - LIM^r x = \bigcap_{\rho \in \Gamma_x} \bar{B}_r(\rho) = \overline{B}_r(x_*)$

olduğundan $st - limx_k = x_*$ dir.

Teorem 3.2.4 de $x = (x_\kappa)$ dizisinin $\Gamma_x^r \subseteq st - LIM^r x_\kappa$ kapsama ilişkisinin sağlanması için istatistiksel yakınsak olması gerekmez, fakat kapsamanın tersi için bu dizinin istatistiksel yakınsak olması gerekmektedir (Aytar, 2017).

3.3. Normlu Uzaylarda Kaba İstatistiksel Limit noktası

Tanım 3.3.1. $r \geq 0$ olsun. Eğer (x_κ) dizisinin her $\varepsilon > 0$ için bir $i_0 = i_0(\varepsilon) \epsilon N$ sayısı var ve tüm $\kappa \geq \kappa_0$ için

$$\left\| x_{\kappa_i} - v \right\| < r + \varepsilon$$

şartını sağlayan seyrek olmayan bir $\left(x_{\kappa_i}\right)$ alt dizisi varsa $v \in X$ vektörüne bu dizinin kaba istatistiksel limit noktası (veya r −istatistiksel limit noktası) denir.

(x_κ) dizisinin tüm istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_x^r ile gösterilir (Aytar, 2017).

Eğer $r = 0$ alınırsa (Fridy, 1993) tarafından tanımlanan istatistiksel limit noktası kavramı elde edilir. Şimdi Λ_x^r kümesini karakterize eden bir sonuç verelim. İspatı tanımlardan kolaylıkla elde edilir.

Önerme 3.3.1. $v \in \Lambda_x^r$ vardır ancak ve ancak $\underset{i\to\infty}{limsup}\left\| x_{\kappa_i} - v \right\| \leq r$ olacak şekilde (x_κ) dizisinin seyrek olmayan bir $\left(x_{\kappa_i}\right)$ alt dizisi vardır (Aytar, 2017).

Örnek 3.3.1. Düzgün dağılımlı bir (x_κ) dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x = \left(0,0,1,0,\frac{1}{2},1,0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1,\ldots\right)$$

$L_x = [0,1], \Gamma_x = [0,1]$ ve $\Lambda_x = \Lambda_x^0 = \emptyset$ dir. Burada L_x, x dizisinin tüm adi limit noktalarını göstermektedir. d uzunluğunun herhangi bir alt aralığında (x_κ) indislerinin yoğunluğu d nin kendisine eşittir.

$r = 1$ olsun. Teorem 3.2.3. den $\Gamma_x^1 = \bigcup_{\rho \epsilon \Gamma_x} \bar{B}_1(\rho) = [-1,2]$dir.

Şimdi $1 \in \Lambda_x^1 ve\ 2 \notin \Lambda_x^1$ olduğu gösterilsin.

$\left(x_{\kappa_i}\right)$ dizisi her $i \in N$ için $x_{\kappa_i} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ olacak şekilde (x_κ) dizisinin bir alt dizisi olsun. Alt dizinin yoğunluğu $\frac{1}{2}$ dir yani $\left(x_{\kappa_i}\right)$ alt dizisi seyrek olmayan bir alt dizidir.

$i_0 = 1$ olsun. Böylece, tüm $i \geq i_0$ lar için $\left|x_{\kappa_i} - 1\right| < 1 + \varepsilon$ dir ve dolayısıyla $1 \in \Lambda_x^1$ dir. Aynı alt diziyi kullanarak tüm $a \in (1,2)$ için $a \in \Lambda_x^1$ elde edilir. Benzer şekilde, her $a \in (-1,2)$ için $a \in \Lambda_x^1$dir.

$2 \notin \Lambda_x^1$ olduğunu gösterelim. Eğer (x_{κ_i}) dizisi 2 ye 1-yakınsak olan (x_κ) dizisinin keyfi bir alt dizisi ise, bu alt dizi seyrektir. $\varepsilon > 0$ olsun.

$$\{i \in N: x_{\kappa_i}\} = \{i \in N: |x_{\kappa_i} - 2| < 1 + \varepsilon\} \cup \{i \in N: |x_{\kappa_i} - 2| \geq 1 + \varepsilon\}$$

$$\delta(\{i \in N: x_{\kappa_i}\}) = \delta(\{i \in N: |x_{\kappa_i} - 2| < 1 + \varepsilon\} \cup \{i \in N: |x_{\kappa_i} - 2| \geq 1 + \varepsilon\})$$

$$\leq \delta(\{i \in N: |x_{\kappa_i} - 2| < 1 + \varepsilon\}) + \delta(\{i \in N: |x_{\kappa_i} - 2| \geq 1 + \varepsilon\})$$

dir.

(x_{κ_i}) alt dizisi 2 ye 1- yakınsak olduğundan

$$\delta(\{i \in N: |x_{k_i} - 2| \geq 1 + \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. l uzunluğundaki herhangi bir aralıkta x_κ lerin yoğunluğu l nin kendisi olduğundan herhangi bir aralıktaki x_{κ_i} ların yoğunluğu l den daha küçüktür. Dolayısıyla

$$\delta(\{i \in N: |x_{\kappa_i} - 2| < 1 + \varepsilon\}) \leq \varepsilon.$$

Böylece $\delta(\{i \in N: x_{k_i}\}) \leq \varepsilon$ dir. ε keyfi seçildiğinden $\delta(\{i \in N: x_{\kappa_i}\}) = 0$ elde edilir, bu ise (x_{κ_i}) dizisinin seyrek olduğunu gösterir. (x_{κ_i}) alt dizisi keyfi olduğundan ispat tamamlanır.

Benzer hesaplar -1 için de yapılabilir.

Bu örneğin doğrudan bir sonucu olarak aşağıdakiler elde edilir.

- Eğer Γ_x^r ile Λ_x^r kümesini yer değiştirirsek Teorem 3.2.1. sağlanmaz.
- Λ_x kümesinin kapalı değildir. Ayrıca Λ_x^r kümesi $r > 0$ için de kapalı olmayabilir.
- $x = (x_\kappa)$ dizisi reel sayıların bir dizisi olsun. $\Lambda_x = \emptyset$ olmasına rağmen sınırlı olabilir. Eğer x dizisi seyrek olmayan sınırlı bir alt diziye sahipse o zaman $\Lambda_x^r \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $r \geq 0$ vardır (Aytar, 2017).

Teorem 3.3.2. Bir $x = (x_\kappa)$ dizisi için $\Lambda_x^r \subseteq \Gamma_x^r$ (Aytar, 2017).

4. FUZZY SAYI DİZİLERİNİN KABA λ-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

4.1. Fuzzy Sayı Dizilerinin Kaba λ-İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu bölümde normlu bir uzay olmayan fuzzy sayılar uzayındaki diziler için kaba λ–istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanacaktır. Ayrıca bu diziler için kaba λ- istatistiksel yığılma noktası ve kaba λ- istatistiksel limit noktası tanımları verilecektir.

Bu kısımda r negatif olmayan bir reel sayı ve $X = (X_\kappa)$ dizisi de fuzzy sayılarının bir dizisi olarak kabul edilecektir.

Tanım 4.1.1. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) \geq r + \varepsilon\}\right| = 0$$

ise $X = (X_\kappa)$ dizisi $\hat{X}$ fuzzy sayısına kaba λ-istatistiksel yakınsaktır denir ve $X_\kappa \overset{r-s_\lambda}{\to} \hat{X}$ şeklinde gösterilir. Buradaki $\hat{X}$ noktası (X_κ) dizisinin bir kaba λ-istatistiksel limit noktasıdır. Ayrıca, r sayısına yakınsaklık derecesi denir.

Eğer $r = 0$ ve $\lambda_n = (n)$ alınırsa, fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı elde edilir.

Genel olarak, $r > 0$ için bir dizinin kaba λ-istatistiksel limiti tek değildir. Böylece kaba λ-istatistiksel limit kümesi olarak adlandırılan aşağıdaki küme tanımlanır.

$$S_\lambda - LIM^r X_\kappa = \left\{\hat{X} \in L(R) : X_\kappa \overset{r-s_\lambda}{\to} \hat{X}\right\}$$

Eğer $S_\lambda - LIM^r X_\kappa \neq \emptyset$ ise (X_κ) dizisi kaba λ-istatistiksel yakınsaktır.

Fuzzy sayı dizilerinin kaba λ –istatistiksel yakınsaklığı kavramına neden ihtiyaç duyulduğu şu şekilde ifade edilebilir. Bir $\hat{X}$ fuzzy sayısına yakınsak olan herhangi bir $Y = (Y_\kappa)$ dizisinin terimleri ile işlem yapmak, üçgensel fuzzy sayılarla işlem yapmaktan daha zor olabilir. Böylece bu dizinin elemanlarının her biri için,

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left(\{\kappa \in I_n : \bar{d}(Y_\kappa, X_\kappa) > r\}\right) = 0$$

şartını sağlayan üçgensel bulanık sayılardan oluşan bir $X = (X_\kappa)$ yaklaşım dizisi elde edilebilir. Burada $X = (X_\kappa)$ dizisi $\hat{X}$ noktasına λ – istatistiksel yakınsak değildir ancak

$$\{\kappa \in I_n : \bar{d}(Y_\kappa, \hat{X}) \geq \varepsilon\} \supseteq \{\kappa \in I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) \geq r + \varepsilon\}$$

kapsaması sağlandığından, yoğunluğa geçilerek

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}(\{\kappa \in I_n : \bar{d}(Y_\kappa, \hat{X}) \geq \varepsilon)\}) \geq \lim_n \frac{1}{\lambda_n}(\{\kappa \in I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) \geq r + \varepsilon)\}) = 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $X = (X_\kappa)$ dizisinin $\hat{X}$ noktasına kaba λ – istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. Sonuç olarak bu yaklaşım dizisi fuzzy sayı dizileri için hesaplayacağımız işlemleri oldukça kolaylaştırır.

Öncelikle Teorem 4.1.1. in ispatında kullanılacak olan, bir dizinin kaba λ –istatistiksel limit noktalarıyla λ –istatistiksel limit supremumu ve limit infumumu arasındaki ilişkiyi veren bir lemma verelim.

Lemma 4.1.1. Her $\hat{X} \in S_\lambda - LIM^r X_\kappa$ için

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}(\{\kappa \in I_n : \bar{d}(S_\lambda - limsup X_\kappa, \hat{X}) > r\}) = 0$$

ve

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}(\{\kappa \in I_n : \bar{d}(S_\lambda - liminf X_\kappa, \hat{X}) > r\}) = 0 \text{ dir.}$$

İspat. Kabul edelim ki $\lim_n \frac{1}{\lambda_n}(\{\kappa \in I_n : \bar{d}(S_\lambda - limsup X_\kappa, \hat{X}) > r\}) \neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\bar{d}(S_\lambda - limsup X_\kappa, \hat{X}) - r}{2}$$

olacak şekilde $\tilde{\varepsilon} > 0$ tanımlanabilir.

S_λ-limit supremum tanımından $\delta_\lambda(K_1) \neq 0$ olacak şekildeki her bir $\kappa \in K_1$ için

$$\bar{d}(S_\lambda - limsup X_\kappa, X_\kappa) < \tilde{\varepsilon}$$

dir.

Diğer taraftan $\hat{X} \in S_\lambda - LIM^r X_\kappa$ olduğundan $\delta_\lambda(K_2) = 0$ olacak şekildeki her bir $\kappa \in K_2$ için

$\bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) \geq r + \tilde{\varepsilon}$

dir

$K = K_1 \cap K_2^c$ olsun. O zaman $\delta_\lambda(K) \neq 0$ olur. Böylece her $\kappa \in K$ için,

$\bar{d}(S_\lambda - limsupX_\kappa, \hat{X}) \leq \bar{d}(S_\lambda - limsupX_\kappa, X_\kappa) + \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) < r + 2\tilde{\varepsilon}$

$= r + \bar{d}(S_\lambda - limsupX_\kappa, \hat{X}) - r = \bar{d}(S_\lambda - limsupX_\kappa, \hat{X})$

yazılabilir. Buradan

$\bar{d}(S_\lambda - limsupX_\kappa, \hat{X}) < \bar{d}(S_\lambda - limsupX_\kappa, \hat{X})$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Benzer şekilde $\lim_n \frac{1}{\lambda_n}(\{\kappa \in I_n : \bar{d}(S_\lambda - liminfX_\kappa, \hat{X}) > r\}) = 0$ olduğu gösterilir.

Teorem 4.1.1. Eğer $S_\lambda - LIM^r X_\kappa \neq \emptyset$ ise

$S_\lambda - LIM^r X_\kappa \subseteq [S_\lambda - limsupX_\kappa - r, S_\lambda - liminfX_\kappa + r]$

dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $\hat{X} \in S_\lambda - LIM^r X_\kappa$ olsun. O halde

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \in l_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) \geq r + \varepsilon\}\right| = 0$$

dır. Yani $\delta_\lambda(K_1) \neq 0$ olacak şekildeki her bir $\kappa \in K_1$ için,

$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} max\left\{\left|\underline{X^\alpha} - \underline{\hat{X}_\kappa^\alpha}\right|, \left|\overline{X^\alpha} - \overline{\hat{X}_\kappa^\alpha}\right|\right\} < r + \varepsilon$

veya

$\sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left|\underline{X^\alpha} - \underline{\hat{X}_\kappa^\alpha}\right| < r + \varepsilon, \ \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \left|\overline{X^\alpha} - \overline{\hat{X}_\kappa^\alpha}\right| < r + \varepsilon$

dir. Böylece $\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |K_1| \neq 0$ olmak üzere tüm $\kappa \in K_1$ için,

$\hat{X} - (r_1 + \varepsilon) \prec X_k \prec \hat{X} + (r_1 + \varepsilon)$

dir. Buradan iki durum elde edilir.

Birinci durum:

$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{\kappa: X_\kappa \prec \hat{X} + (r_1 + \varepsilon)\}| \neq 0$ yani $\hat{X} + (r_1 + \varepsilon) \in G_X$ ve Lemma 4.1.1. den

$S_\lambda - limsup X_\kappa = sup G_x = \mu \leq \hat{X} + (r_1 + \varepsilon)$

dir.

İkinci durum:

$\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |\{\kappa: X_\kappa \succ \hat{X} - (r_1 + \varepsilon_1)\}| \neq 0$ yani $\hat{X} - (r_1 + \varepsilon_1) \in F_X$ ve Lemma 4.1.1. den

$S_\lambda - liminf X_\kappa = inf F_X = \rho \geq \hat{X} - (r_1 + \varepsilon_1)$

dir.

Böylece, $\hat{X} \in [S_\lambda - limsup X_\kappa - r, S_\lambda - liminf X_\kappa + r]$ elde edilir.

Teorem 4.1.2. $X = (X_\kappa)$ dizisinin $S_\lambda - LIM^r X_\kappa$ kümesinin çapı $2r$ den büyük değildir.

İspat. $\bar{d}(A,B) > 2r$ olacak şekilde $A, B \in S_\lambda - LIM^r X$ alalım. $\varepsilon \in (0, \bar{d}(A,B)/2 - r)$ keyfi olsun.

$A, B \in S_\lambda - LIM^r X$ olduğundan,

$K_1 := \{\kappa \in l_n: \bar{d}(X_\kappa, A) \geq r + \varepsilon\}$ ve $K_2 := \{\kappa \in l_n: \bar{d}(X_\kappa, B) \geq r + \varepsilon\}$

olmak üzere $\varepsilon > 0$ için, $\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |K_1| = 0$ ve $\lim_n \frac{1}{\lambda_n} |K_2| = 0$ dır.

Böylece, her bir $\kappa \in {K_1}^c \cap {K_2}^c$ için

$\bar{d}(A,B) \leq \bar{d}(X_\kappa, A) + \bar{d}(X_\kappa, B) < 2(r + \varepsilon) = \bar{d}(A,B)$

olduğundan çelişki elde edilir. O halde çap $2r$ den büyük olamaz.

Teorem 4.1.3. $\bar{B}_r(\hat{X}) = \{Y \in L(R): \bar{d}(Y, \hat{X}) \leq r\}$ olmak üzere eğer $X = (X_\kappa)$ dizisi $\hat{X}$ fuzzy sayısına λ – istatistiksel yakınsak ise $S_\lambda - LIM^r X_\kappa = \overline{B_r}(\hat{X})$ dir.

İspat. $\varepsilon > 0$ olsun. Kabulümüzden

$M_1 = \{\kappa \in I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) \geq \varepsilon\}$

olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |M_1| = 0$ dır.

$Y \in \overline{B_r}(\hat{X})$ alalım. O halde her $\kappa \in M_1^c$ için,

$\bar{d}(X_\kappa, Y) \leq \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) + \bar{d}(\hat{X}, Y) < \varepsilon + r$

vardır bu ise $Y \in S_\lambda - LIM^r X_\kappa$ olduğunu gösterir.

Şimdi $Y \in S_\lambda - LIM^r X_\kappa$ olduğunu kabul edelim. O halde

$M_2 = \{\kappa \in I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) \geq r + \varepsilon\}$

olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |M_2| = 0$ dir.

Böylece her $k \in M_1^c \cap M_2^c$ için,

$\bar{d}(Y, \hat{X}) \leq \bar{d}(X_\kappa, Y) + \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) < 2\varepsilon + r$

elde edilir. ε keyfi olduğundan her $k \in M_1^c \cap M_2^c$ için $\bar{d}(Y, \hat{X}) \leq r$ dir. Bu ise $Y \in \overline{B_r}(\hat{X})$ olduğunu gösterir.

4.2. Fuzzy Sayı Dizilerinin Kaba λ-İstatistiksel Yığılma Noktası

Tanım 4.2.1. $r \geq 0$ olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \eta) < r + \varepsilon\}\right| > 0$$

olacak şekilde η fuzzy sayısına X_κ dizisinin kaba λ – istatistiksel yığılma noktası (veya r_λ-istatistiksel yığılma noktası) denir.

Tüm r_λ-istatistiksel yığılma noktalarının kümesini $\Gamma_\lambda^r(X)$ ile gösterelim.

Eğer $r_1 \leq r_2$ ise $\Gamma_\lambda^{r_1}(X) \subseteq \Gamma_\lambda^{r_2}(X)$ dir. Ayrıca, $r = 0$ ve $\lambda_n = (n)$ için Aytar (Aytar, 2005) tarafından tanımlanan istatistiksel yığılma noktası kavramı elde edilir.

Teorem 4.2.1. Herhangi bir $X = (X_\kappa)$ dizisi ve $\forall r \geq 0$ için $\Gamma_\lambda^r(X)$ kümesi kapalıdır.

İspat. $\Gamma_\lambda^r(X) \neq \emptyset$ ve $\lim_{\kappa\to\infty} Y_\kappa = \hat{Y}$ olacak şekilde $Y = (Y_\kappa) \subseteq \Gamma_\lambda^r(X)$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{Y}) < r + \varepsilon\}\right| > 0$$

dir.

$\varepsilon > 0$ alalım. $\lim_{n\to\infty} Y_\kappa = \hat{Y}$ olduğundan $\forall \kappa > \kappa_0$ için $\bar{d}(Y_\kappa, \hat{Y}) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir $\kappa_0 = \kappa_0(\varepsilon) \in N$ vardır. $j_0 > \kappa_0$ olacak şekilde bir sabit j_0 alalım. O halde $\bar{d}(Y_{j_0}, \hat{Y}) < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

$j \in \left\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, Y_{j_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ olsun. $\bar{d}(X_\kappa, Y_{j_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}$ olduğundan

$$\bar{d}(X_\kappa, \hat{Y}) \leq \bar{d}(X_\kappa, Y_{j_0}) + \bar{d}(Y_{j_0}, \hat{Y}) < r + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = r + \varepsilon$$

dir. Bu ise $j \in \{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{Y}) < r + \varepsilon\}$ olduğunu gösterir.

Böylece, $\left\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, Y_{j_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \subseteq \{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{Y}) < r + \varepsilon\}$ elde edilir.

Buradan

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, Y_{j_0}) < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{Y}) < r + \varepsilon\}\right|$$

sağlandığından ve kabulümüzden $\hat{Y} \in \Gamma_\lambda^r(X)$ olduğu ispatlanır.

Teorem 4.2.2. $r > 0$ olsun $\hat{X} \in \Gamma_\lambda(Y)$ ve *h.h.*κ için $\bar{d}(X_\kappa, Y_\kappa) \leq r$ olacak şekilde $Y = (Y_\kappa)$ varsa $\hat{X} \in \Gamma_\lambda^r(X)$ dir.

İspat: $\varepsilon > 0$ olsun. Kabul edelim ki $\hat{X} \in \Gamma_\lambda(Y)$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(Y_\kappa, \hat{X}) < \varepsilon\}\right| > 0$$

dır.

$j \in \{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(Y_\kappa, \hat{X}) < \varepsilon\}$ alalım. Buradan

$$\bar{d}(X_j, \hat{X}) \leq \bar{d}(X_j, Y_j) + \bar{d}(Y_j, \hat{X}) < r + \varepsilon$$

olduğundan

$j \in \{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) < r + \varepsilon\}$ elde edilir. Bu ise

$$\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(Y_\kappa, \hat{X}) < \varepsilon\} \subseteq \{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) < r + \varepsilon\}$$

kapsamasının sağlandığını gösterir. O halde

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(Y_\kappa, \hat{X}) < \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) < r + \varepsilon\}\right|$$

eşitsizliği yazılır.

$\hat{X} \in \Gamma_\lambda(Y)$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n}\left|\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \hat{X}) < r + \varepsilon\}\right| > 0$$

dır. Sonuç olarak $\hat{X} \in \Gamma_\lambda^r(Y)$ elde edilir.

Teorem 4.2.3. $\bar{B}_r(C) = \left\{Y \in L(R) : \bar{d}(Y, C) \le r\right\}$ olmak üzere,

$$\bigcup_{C \in \Gamma_\lambda(X)} \overline{B_r}(C) \subseteq \Gamma_\lambda{}^r(X)$$

dir.

İspat. $\eta \in \bigcup_{C \in \Gamma_\lambda(X)} \overline{B_r}(C)$ olsun. O halde $\eta \in \overline{B_r}(C)$ olacak şekilde en az bir $C \in \Gamma_\lambda(X)$ vardır.

$\varepsilon > 0$ olsun. $C \in \Gamma_\lambda(X)$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n}|K| > 0$ olacak şekilde bir

$K = K(\varepsilon) = \left\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, C) < \varepsilon\right\}$ kümesi vardır. Buradan $\forall \kappa \in K$ için

$$\bar{d}(X_\kappa, \eta) \le \bar{d}(X_\kappa, C) + \bar{d}(C, \eta) < r + \varepsilon$$

yazılacağından

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n}\left|\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \eta) < r + \varepsilon\}\right| > 0$$

elde edilir. Bu ise $\eta \in \Gamma_\lambda^r(X)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.4. $X = (X_\kappa)$ dizisi λ-istatistiksel yakınsak bir dizi ise $st - LIM^r X_\kappa \subseteq \Gamma_\lambda^r(X)$ dir.

İspat. $X = (X_\kappa)$ dizisi $\hat{X}$ fuzzy sayısına λ-istatistiksel yakınsak olsun. O halde (X_κ) dizisinin λ- istatistiksel yığılma noktası tek ve $\Gamma_\lambda(X) = (\hat{X})$ dır. *Teorem 4.2.3.* den

$$\cup_{c \in \Gamma_\lambda(X)} \overline{B_r}(\hat{X}) = \overline{B_r}(\hat{X}) \subseteq \Gamma_\lambda^r(X)$$

dir. Ayrıca *Teorem 4.1.3.*den $S_\lambda - LIM^r X_\kappa = \overline{B_r}(\hat{X})$ olduğundan

$st - LIM^r X_\kappa \subseteq \Gamma_\lambda^r(X)$ sağlanır.

4.3. Fuzzy Sayı Dizilerinin Kaba λ-İstatistiksel Limit Noktası

Tanım 4.3.1. $r \geq 0$ olsun. $X = (X_\kappa)$ fuzzy sayı dizisinin bir ϑ fuzzy sayısına kaba yakınsayan ve λ-nonthin (seyrek olmayan) bir alt dizisi varsa, ϑ fuzzy sayısına (X_κ) fuzzy sayı dizisinin kaba λ-istatistiksel limit noktası (veya r_λ-istatistiksel limit noktası) denir.

Tüm r_λ-istatistiksel limit noktalarının kümesini $\Lambda_\lambda^r(X)$ ile gösterelim.

$r = 0$ ve $\lambda_n = (n)$ için Aytar (Aytar, 2005) tarafından tanımlanan istatistiksel limit noktası kavramı elde edilir.

Teorem 4.3.1. $\Lambda_\lambda^r(X) \subseteq \Gamma_\lambda^r(X)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\vartheta \in \Lambda_\lambda^r(X)$ olsun. Böylece (X_κ) dizisinin ϑ fuzzy sayısına kaba yakınsak λ-nonthin (seyrek olmayan) bir $(X_{\kappa_{(i)}})$ alt dizisi vardır. Yani

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} |\{\kappa(i) \epsilon I_n : i \in N\}| = t > 0$$

dir. $\forall \varepsilon > 0$için

$$\left\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \vartheta) < r + \varepsilon\right\} \supset \left\{\kappa(i) \epsilon I_n : \bar{d}\left(X_{\kappa_{(i)}}, \vartheta\right) < r + \varepsilon\right\}$$

kapsaması sağlandığından ,

$$\left\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \vartheta) < r + \varepsilon\right\} \supseteq \{\kappa(i) \epsilon I_n : i \in N\} \backslash \left\{\kappa(i) \epsilon I_n : \bar{d}\left(X_{\kappa_{(i)}}, \vartheta\right) \geq r + \varepsilon\right\}$$

yazabiliriz. $(X_{\kappa_{(i)}})$, ϑ ye kaba yakınsak olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{\kappa(i) \epsilon I_n : \bar{d}\left(X_{\kappa_{(i)}}, \vartheta\right) \geq r + \varepsilon\}$$

kümesi sonludur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \vartheta) < r + \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} |\{\kappa(i) \epsilon I_n : i \in N\}| - \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{\kappa(i) \epsilon I_n : \bar{d}\left(X_{\kappa_{(i)}}, \vartheta\right) \geq r + \varepsilon\right\}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} |\{\kappa(i) \epsilon I_n : i \in N\}| = t > 0$$

dir. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty} sup \frac{1}{\lambda_n} \left|\left\{\kappa \epsilon I_n : \bar{d}(X_\kappa, \vartheta) < r + \varepsilon\right\}\right| > 0$$

elde edilir. Bu ise $\vartheta \in \Gamma_\lambda^r(X)$ olduğunu ispatlar.

5. KAYNAKLAR

Aytar, S. (2004). Statistical Limit Points of Sequences of Fuzzy Numbers. *International Sciences* 165, 129-139.

Aytar, S. (2008). Rough Statistical Convergence. *Numerical Functional Analysis and Optimization* 29, 291-303

Aytar, S. (2017). Rough Statistical Cluster Points. *Filomat* 31(16), 5295-5304.

Akcay, F. G., Aytar, S. (2015). Rough Convergence of a Sequence of Fuzzy Numbers. *Bulletin of Mathematical Analysis and Applications* 7(4), 17-23.

Benli, F. B. (2013) Lambda-Statistical Limit Inferior and Limit Superior for Sequences of Fuzzy Numbers. *International Journal of Modeling and Optimization* 3(3), 307.

Debnath, S.,Rakshit, D. (2019). Rough Statistical Convergence of a Sequence of Fuzzy Numbers. *Mathematica* 61, 33–39.

Demir, N., Gümüş, H. (2020). Rough Convergence for Difference Sequences. *New Trends in Mathematical Sciences* 2(8), 22-28.

Diamond, P., Kloeden, P. (1994). Metric Spaces of Fuzzy Sets. Theory and Applications. *World Scientic, Singapore.*

Fast, H. (1951). Sur la Convergence Statistique. *Colloq. Math* 2, 241-244.

Freedman, A.,Sember, J. (1981). Densities and Summability. *Pacific Journal of Mathematics* 95 (2), 293-305.

Fridy, J. A. (1985). On Statistical Convergence. *Analysis* 5, 301-313.

Fridy, J. A. (1993). Statistical Limit Points. *Proceedings of the American Mathematical Society* 118(4), 1187-1192.

Kişi, O., Ünal, H. K. (2021). Rough Statistical Convergence of Difference Double Sequences in Normed Linear Spaces. *Honam Mathematical Journal* 43(1), 47-58.

Maity, M. (2016). A Note on Rough Statistical Convergence of Order α. *ArXiv:1603.00183.*

Matloka, M. (1986). Sequences of Fuzzy Numbers. *Busefal* 28, 28-37.

Mursaleen, M. (2000). λ -Statistical Convergence, *Math. Slovaca* 50 (1), 111-115.

Niven, I.,Zuckerman, H. S.,Montgomery, H. L. (1991). An introduction to the theory of numbers. *John Wiley&Sons*.

Nuray, F., Savaş, E. (1995). Statistical Convergence of Sequence of Fuzzy Numbers. *Math. Slovaca* 3(45), 269-273.

Pehlivan, S., Mamedov, M. A. (2000). Statistical Cluster Points and Turnpike. *Optimization* 48(1), 91-106.

Phu, H. X. (2001). Rough Convergence in Normed Linear Spaces. *Numer. Funct. Anal. And Optimiz*. 22, 201-204.

Phu, H. X. (2003). Rough Convergence in Infinite Dimensional Normed Spaces. *Taylor & Francis.*

Savaş, E. (2000). On Strongly λ-Summable Sequences of Fuzzy Numbers. *Information Sciences* 125(1-4), 181-186.

Schoenberg, I. J. (1959). The Integrabilitiy of Certain Functions and Related Summability Methods. *Amer. Math. Monthly* 66, 366-375.

Steinhaus, H. (1951). Sur la Convergence Ordinaire Etta Convergence Asymptotique. *Colloq. Math*. 2, 73-74.

Tuncer, A. N., Benli, F. B. (2007). λ-Statistical Limit Points of the Sequences of Fuzzy Numbers. *Information Sciences* 177 (16), 3297-3304.