T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ MERTEBELİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİ VE BU PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

MÜRSEL CEYLAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

YOZGAT – 2022

T.C.

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ MERTEBELİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİ VE BU PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

MÜRSEL CEYLAN

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

YOZGAT – 2022

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan eder, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Mürsel CEYLAN

……/……/2022

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİNCİ MERTEBELİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİ VE BU PROBLEMLERİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Mürsel CEYLAN

YOZGAT BOZOK ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

Bu tezde gösterilmiş kaynaklar incelenerek Cauchy ve Goursat problemleri ikinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemler için ele alındı ve ayrı ayrı örneklerde bu problemlerin çözümü gösterildi.

İkinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümünü bulmak için bu denklemlerin kanonik (sade) şekle getirilmesinin yöntemi gösterildi ve bazı kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin bulunması gösterildi.

İkinci mertebeli kısmi türevli diferansiyel denklemlerin karakteristik denklemleri tanımlandı ve karakteristik denklemlerin çözümünün varlığı için gerek ve yeter şartı gösteren teorem verildi ve ispatlandı.

2022, 41 SAYFA

ANAHTAR KELİMELER: Cauchy problemi,Goursat problemi,karakteristikler metodu.

ABSTRACT

MASTER THESIS

CAUCHY AND GOURSAT PROBLEMS FOR SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THE SOLUTION OF THESE PROBLEMS

Mürsel CEYLAN

YOZGAT BOZOK UNIVERSITY
SCHOOL OF GRADUATES STUDIES

MATHEMATICS DEPARTMENT

SUPERVISOR: Assoc. Prof. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU

By analyzing the sources cited in this thesis, Cauchy and Goursat problems are discussed for second-order partial differential equations and the solutions of these problems are shown in separate examples.

In order to find the general solution of second order partial differential equations, the method of converting these equations to canonical (simple) form is shown, and the general solutions of some partial differential equations are shown.

The characteristic equations of second order partial differential equations are defined and the theorem showing the necessary and sufficient condition for the solution of characteristic equations is given and proved.

2022, 41 PAGE

KEY WORDS: Cauchy problem, Goursat problem, characteristics method

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesi sırasında yardımlarını ve desteğini esirgemeyen sayın danışman hocam Doç. Dr. Abdullah SÖNMEZOĞLU'na, çalışmalarım sırasında desteğini her zaman hissettiren saygı değer hocam Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e teşekkür ederim.

02/02/2022

Mürsel CEYLAN

İÇİNDEKİLER

TEZ BEYANI i

ÖZET i

ABSTRACT ii

ÖNSÖZ iii

SİMGELER VE KISALTMALAR v

1.GİRİŞ 1

2. ÖN BİLGİLER VE BAZI AÇIKLAMALAR 3

2.1. İki serbest değişkene bağlı ikinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin kanonik (sade) şekle getirilmesi 3

3. İKİNCİ MERTEBELİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİ 16

3.1.Cauchy Problemi 16

3.2.Goursat problemi 16

4.CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNÜN BULUNMASINA AİT ÖRNEKLER 18

4.1.Sonsuz(sınırsız) telin serbest titreşimleri denklemi için Cauchy probleminin çözümü 18

4.2.Sınırsız(sonsuz) telde ısı iletişimi denklemi için Cauchy probleminin çözümü: 22

SONUÇ 29

KAYNAKÇA 30

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}$	$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}$

1.GİRİŞ

Aranan fonksiyonun ve onun farklı farklı mertebeden türevlerinin dahil olduğu her bir bağlantıya diferansiyel denklem denir.

Diferansiyel denkleme dahil olan aranan fonksiyon iki veya daha çok serbest değişkene bağlı olduğunda bu diferansiyel denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem veya sadece kısmi diferansiyel denklem denir.

İki serbest değişkene bağlı ikinci mertebeli kısmi diferansiyel denklem genel olarak aşağıdaki şekilde yazılır.

$$F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0 \qquad (1.1)$$

Bu denklemde $u=u(x,y)$ serbest x,y değişkenlerine bağlı aranan fonksiyondur. $F(\dots)$ fonksiyonu ise argumentlerinin verilmiş fonksiyonudur.

Ele aldığımız $u=u(x,y)$ fonksiyonunun (1.1) denkleminde iştirak eden türevlerini ve $u=u(x,y)$ fonksiyonunun kendisini (1.1) denkleminde uygun olarak yerlerine yazdığımızda (1.1) denklemi aynen sağlandığında bu $u=u(x,y)$ fonksiyonuna (1.1) diferansiyel denkleminin çözümü denir.

(1.1) diferansiyel denklemi yüksek mertebeli türevlere nazaran lineer olduğunda bu diferansiyel denkleme Kvazi lineer kısmi diferansiyel denir.

İki serbest x ve y değişkenlerine bağlı ikinci mertebeli Kvazi lineer kısmi diferansiyel denklem genel olarak

$$A\left(x,y,u,u_x,u_y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(\dots)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(\dots)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(\dots)=0 \qquad (1.2)$$

şeklinde yazılır.

Burada $A(\dots)$, $B(\dots)$ ve $f(\dots)$ fonksiyonları x,y,u_x,u_y argumentlerinin verilmiş fonksiyonlarıdır.

Ele aldığımız (1.1) diferansiyel denklemi aranan $u=u(x,y)$ fonksiyonuna ve kısmi diferansiyel denklemde iştirak eden $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},ve\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ türevlerine nazaran lineer olduğunda bu denkleme lineer kısmi diferansiyel denklem denir.

İki x,y serbest değişkenlerine bağlı lineer kısmi diferansiyel denklemi genel olarak

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + G(x,y)u = F(x,y) \tag{1.3}$$

şeklinde yazılır.

Mekaniğin ve fiziğin birçok problemlerinin çözümü ikinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünün bulunmasına ve incelenmesine getirilir.

Fiziksel problemlerin çözümünde fiziksel problemlerin anlamı ile bağlı ilave şartların sağlanması da gerekir. Bu ek şartlar adeta başlangıç şartları (Cauchy şartları, sınır şartlar (mesela Goursat şartları)) olabilir.

Dikkate alalım ki (1.1), (1.2) ve (1.3) şekilli diferansiyel denklemleri genel olarak çözmek için,yani çözümünü bulmak için bu denklemlerin sade (kanonik) şekilli denklemlere getirilmesi problemi kısmi diferansiyel denklemler teorisinde esas problemlerden biri sayılır.

İkinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemin genel çözümünün bulunması da esas problemlerdendir. İkinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemin genel çözümünü bulmak için bu denklemin kanonik (sade) şekle getirilmesi gerekir.

(1.1),(1.2),(1.3) kısmi diferansiyel denklemlerinin genel çözümü öyle $u= u(x,y)$ fonksiyonuna denir ki, bu fonksiyon ele alınmış diferansiyel denklemi sağlasın ve bu denklem için ele alınmış mesela Cauchy ve Goursat problemlerinin çözümü bu $u= u(x,y)$ çözümünden alınsın.

Bu tezde önce iki serbest değişkene bağlı ikinci mertebeli Kvazi lineer veya lineer diferansiyel denklemlerin kanonik şekle (sade şekle) getirilmesi yöntemi gösterilecek ve ikinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemler için Cauchy ve Goursat problemleri ele alınacak,incelenecek ve ayrı ayrı örneklerde bu problemlerin çözümü yapılacaktır.

2. ÖN BİLGİLER VE BAZI AÇIKLAMALAR

2.1. İki serbest değişkene bağlı ikinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin kanonik (sade) şekle getirilmesi

Burada ikinci mertebeli serbest x ve y değişkenlerine bağlı kısmi diferansiyel

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\ C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0 \qquad (2.1)$$

denklemini ele alalım ve bu denklemin kanonik şekle getirilmesi yöntemini gösterelim.

Bu (2.1) denklemini kanonik şekle getirmek için bu denklemdeki x ve y değişkenlerini yeni

$$\xi=\xi(x,y),\qquad \eta=\eta(x,y) \qquad (2.2)$$

değişkenleri ile değiştirelim (Mamedov,Cafarov,1971).

Buradaki (2.2) dönüşümündeki $\xi=\xi(x,y),\ \eta=\eta(x,y)$ fonksiyonlarının iki kez sürekli diferansiyellenen fonksiyonlar oldukları var sayılır.

Bu (2.2) sisteminin x ve y değişkenlerine nazaran bir değerli çözülebilmesi için (2.2) dönüşümlerinin Jakobiyanının ele alınmış bölgede sıfırdan farklı olduğu var sayılır. Böylece, burada (2.2) dönüşümünün

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} \qquad (2.3)$$

formülü ile tanımlanan Jakobiyanının ele alınmış D bölgesinde sıfırdan farklı olduğu var sayılır.(2.1) denklemini kanonik şekle getirmek için bu denklemdeki x ve y değişkenlerine nazaran kısmi türevleri ξ ve η değişkenlerine nazaran kısmi türevlerle ifade etmemiz gerekir. Bunun için aranan $u=u(x,y)$ fonksiyonunu x ve y değişkenlerini karmaşık fonksiyonu olarak alıp bu fonksiyonların uygun türevlerini bulmak gerekir.Böylece,burada aranan u fonksiyonu ξ ve η değişkenlerine bağlı ve ξ ve η değişkenleri x ve y değişkenlerine bağlı alınır.

Böylece, burada karmaşık fonksiyonun türevinin bulunması formülüne dayanarak

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (2.4)$$

eşitlikleri bulunur.

(2.1) denklemindeki ikinci mertebeden kısmi türevleri, mesela

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

türevlerini ξ ve η değişkenlerine nazaran türevlerle ifade etmek için, yine de karmaşık fonksiyonun türevinin bulunması formülünü uygulayarak aşağıdaki şekilde hesaplama yapılır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

Burada sonuncu eşitlikteki parantezleri açarak aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \qquad (2.5)$$

Aynı yöntemle (2.4) formüllerinin ikincisini kullanarak ve benzer hesaplamalar yaparak aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \qquad (2.7)$$

(2.1) denklemindeki kısmi türevler için bulunmuş olan (2.4),(2.5),(2.6) ve (2.7) ifadelerini uygun olarak (2.1) denkleminde yerlerine yazdığımızda (2.1) denklemi ξ ve η değişkenlerinde aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\bar{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \bar{F}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (2.8)$$

Burada (2.8) denklemindeki $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ katsayıları aşağıdaki eşitliklerle tanımlanmış olur:

$$\bar{A}(\xi, \eta) = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \qquad (2.9)$$

$$\bar{B}(\xi, \eta) = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (2.10)$$

$$\bar{C}(\xi, \eta) = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial \eta}{\partial x}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \qquad (2.11)$$

Burada (2.2) dönüşümündeki $\xi(x, y)\ ve\ \eta(x, y)$ fonksiyonlarını öyle seçmek olur ki; aşağıdaki üç halden yalnız bir tanesi sağlanır:

$\bar{A}$=0, $\bar{C} = 0$

$\bar{A}$=0, $\bar{B} = 0$

$\bar{A} = \bar{C}, \bar{B} = 0$

(2.8) denkleminde bu üç halden biri sağlandığında (2.1) denklemi kanonik (sade) şekle getirilmiştir denir.

Şimdi burada (2.1) denklemini kanonik şekle getirebilen $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ fonksiyonlarının varlığı hakkındaki teoremi yazıp ispatlayalım (Mamedov,R. ,Cafarov,G. ,1971).

2.2. Kısmi türevli (2.1) diferansiyel denklemini kanonik şekle getiren $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ fonksiyonlarının varlığı hakkındaki teorem

Burada, mesela $\bar{A}$=0 ve $\bar{C} = 0$ eşitliklerinin sağlanması için $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ fonksiyonlarının seçilebildiğini gösterelim.

Burada (2.9) ve (2.10) ifadelerini dikkate alarak

$$\bar{A}(\xi, \eta) = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial \xi}{\partial x}\,\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = 0$$

ve

$$\bar{C}(\xi,\eta) = A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\,\frac{\partial\eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 = 0$$

eşitliklerinin sağlanması için $\xi(x,y)\ ve\ \eta(x,y)$ fonksiyonlarının her birinin kısmi türevli

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (2.12)$$

diferansiyel denkleminin $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$ şartını sağlayan iki farklı çözümünün olması gerekir.

Burada aşağıdaki teorem doğrudur (Aliyev,1995;Tixonov,Saamarskiy,1962;Sobolev ,1966;Çağlayan,Çelebi,2010;Mamedov,Cafarov,1971).

Teorem. $z = \varphi(x,y)$ fonksiyonunun bir D bölgesinde

$$A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + 2B\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + C\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (2.12)$$

denkleminin çözümü olması için gerek ve yeter şart

$\varphi(x,y) = C_0, (C_0 = Sabit)$

bağlantısının

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\,\frac{dy}{dx} + C = 0 \qquad (2.13)$$

denkleminin bu D bölgesinde genel integrali olmasıdır.

Gerekliliğin ispatı: Burada $z = \varphi(x,y)$ fonksiyonunun (2.12) denkleminin çözümü olduğunu var sayalım. Bu durumda

$$\varphi(x,y) = C_0,$$

eşitliğini sağlayan eğriler ailesinin (2.13) denkleminin genel integrali olduğunu ispatlayalım. Burada

$$\varphi(x,y) = C_0,$$

eşitliğini sağlayan her bir eğri üzerinde $d\varphi$ diferansiyelinin sıfıra eşit olduğu, yani

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır.

Bu sonuncu eşitliğin her yanını $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ çarpımına böldüğümüzde

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \lambda$$

eşitliği bulunur. Bu sonuncu eşitlikten de

$$dx = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad dy = -\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

eşitlikleri bulunur.

Bu sonuncu eşitlikleri kullanarak

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = \lambda^2 \left[A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right]$$

eşitliği elde edilir.

Varsayımımıza göre $\varphi(x, y)$ fonksiyonu (2.12) denkleminin çözümü olduğundan sonuncu eşitliğin sağ yanındaki parantez içerisindeki ifade sıfıra eşit olur.

Buradan da D bölgesinde $\varphi(x, y) = C_0$ eşitliğini sağlayan her bir eğri üzerinde

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0$$

veya

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0$$

eşitliği sağlanır.

Bu $\varphi(x, y) = C_0$ bağlantısının (2.13) diferansiyel denkleminin genel integrali olduğunu gösterir. Teoremin gereklilik şartı ispatlanmış oldu.

Yeterliliğin ispatı: Burada $\varphi(x, y) = C_0$ bağlantısının (2.13) denkleminin genel integrali olduğunu var sayalım.Bu durumda z= $\varphi(x, y)$ fonksiyonunun (2.12) denkleminin çözümü olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla D bölgesinde keyfi bir $M_0(x_0,y_0) \in$ D noktasını alalım.

Burada

$\varphi(x, y) = C_0$

eşitliğinin $M_0(x_0,y_0)$ noktasından geçen eğrinin denklemi olduğunu, yani $M_0(x_0,y_0)$ noktasından geçen eğrinin $\varphi(x,y)=C_0$ denklemini aynen sağladığını var sayalım. Bu durumda adı geçen eğrinin tüm noktalarında

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=-\frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}=\lambda$$

eşitliği sağlanacaktır.

Bu sonuncu eşitlikten

$$dx=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad dy=-\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{2.14}$$

eşitlikleri bulunur.

Burada ele aldığımız eğri (2.13) denkleminin integral eğrisi olduğundan burada dx ve dy için bulunmuş olan (2.14) ifadesini (2.13) denkleminde dx ve dy -nin yerlerine yazdığımızda

$$\lambda^2\left[A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]=0$$

eşitliği bulunur.

Buradan da

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$$

eşitliğinin $M_0(x_0,y_0)\in$ D noktasından geçen ve $\varphi(x,y)=C_0$ eşitliğini sağlayan her bir eğri üzerinde sağlandığı görülür.

Burada $M_0(x_0,y_0)$ noktası D bölgesinden alınmış keyfi nokta olduğundan $z=\varphi(x,y)$ fonksiyonunun D bölgesinin her bir noktasında da

$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2=0$ (x, y) ∈ D eşitliğinin sağlandığı görülür.

Başka bir deyişle $z=\varphi(x,y)$ fonksiyonunun (2.12) denkleminin çözümlerinden biri olduğu görülür. Böylece yeterlilik şartı da ispatlandı. Teorem ispatlanmış oldu.

2.3. Kısmi türevli (2.1) şekilli diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması ve kanonik şekilleri

(2.13) denklemine (2.1) denkleminin karakteristik denklemi denir. Bu (2.13) denklemini $\frac{dy}{dx}$ ifadesine nazaran çözerek aşağıdaki denklemler sistemi bulunur.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{2.15}$$

Bu sonuncu denklemlerin genel integrallerini uygun olarak

$$\varphi(x, y) = C_1, (C_1 = Sabit)$$

$$\psi(x, y) = C_2, (C_2 = Sabit)$$

ile gösterelim.

Bu $\varphi(x, y) = C_1, \psi(x, y) = C_2$ eşitliklerinin tanımlandığı eğrilere (2.1) denkleminin karakteristikleri denir.

Dikkate alalım ki,

$$B^2 - AC > 0$$

şartı sağlandığında (2.1) denkleminin karakteristikleri reel ve farklı olurlar.

Burada

$$B^2 - AC < 0$$

şartı sağlandığında (2.15) sisteminin çözümleri kompleks eşlenik olduğundan bu hal için (2.1) denkleminin karakteristikleri kompleks eşlenik olurlar. Ama

$$B^2 - AC = 0$$

şartı sağlandığında (2.15) sisteminden bu karakteristiklerin birbirine eşit reel oldukları görülür.

(2.9),(2.10) ve (2.11) eşitliklerini kullanarak

$$\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} = \left(\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}\right)^2 (B^2 - AC)$$

eşitliğinin sağlandığı görülür.

Bu eşitlikten de $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$ şartında $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ dönüşümünün (2.1) denkleminin tipinin değişmediği görülür.

Karakteristiklere dayanarak (2.1) denklemi aşağıdaki şekilde sınıflandırılır:

1) $B^2 - AC > 0$ şartı sağlandığında (2.1) denklemine hiperbolik tip denklem denir.

2)$B^2 - AC < 0$ şartı sağlandığında (2.1) denklemine eliptik tip denklem denir.

3)$B^2 - AC = 0$ şartı sağlandığında (2.1) denklemine parabolik tip denklem denir.

(2.1) şekilli diferansiyel denklemlerde $\varphi(x,y)$ ve $\psi(x,y)$ fonksiyonları (2.15) sisteminin çözümü olduğunda (2.1) denklemi için $B^2 - AC > 0$ şartında

$$\bar{A} = 0, \qquad \bar{C} = 0$$

şartları sağlanır ve $\bar{B} \neq 0$ olur ve $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ dönüşümü ile (2.1) denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad F_1 = -\frac{1}{\bar{B}}\bar{F} \tag{2.16}$$

şeklinde denkleme getirilmiş olur.(2.16) şekilli denkleme hiperbolik tip diferansiyel denkleminin kanonik şekli denir.

(2.1) denklemi eliptik tip denklem olduğunda, yani bu denklem için $B^2 - AC < 0$ şartı sağlandığında (2.1) denkleminde $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$ dönüşümü yapıldığında

$$\bar{A} = \bar{C}, \qquad \bar{B} = 0$$

eşitlikleri sağlanır ve (2.1) denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), F_2 = -\frac{1}{\bar{A}}\bar{F} \tag{2.17}$$

şeklinde denkleme getirilmiş olur.

(2.17) şekilli denkleme eliptik tip diferansiyel denklem denir.

(2.1) denklemi parabolik tip diferansiyel denklem olduğunda bu denklemde $\xi = \varphi(x,y)$ ve $\eta = \eta(x,y)$ olarak $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$ şartını sağlayan ikinci mertebeden sürekli diferansiyellenen , $\eta = \eta(x,y)$ fonksiyonunu seçmekle

$$\bar{A} = 0, \quad \bar{B} = 0$$

şartını sağlayan dönüşümü yaparak (2.1) denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F_3\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \tag{2.18}$$

şekline getirilmiş olur.

(2.18) şekilli denkleme parabolik tip denklem denir.

Böylece,(2.1) şekilli kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması yapıldı ve kanonik şekilleri gösterilmiş oldu.

2.4. (2.1) şekilli kısmi diferansiyel denklemlerin kanonik şekle getirilmesine ait örnekler.

Örnek 1:Burada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2Sinx\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - Cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - Cosx\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

denkleminin kanonik şekle getirilmesini gösterelim ve bu denklemin genel çözümünü bulalım.

Ele aldığımız bu denklemde

A=1, $B = -Sinx$, C=$-Cos^2 x$ olduğundan

$B^2 - AC$ =$Sin^2 x$+$Cos^2 x$ =1>0

şartı sağlanır. Bu yüzden ele aldığımız denklem Oxy düzleminde hiperbolik tip denklemdir.

Ele aldığımız denklemin karakteristik denklemler sistemi

dy +(1+ $Sinx$)dx =0,

dy -(1- $Sinx$) dx =0

şeklindedir. Bu denklemler sistemini çözerek

x+$y - Cosx$=C_1,

x– y+$Cosx$ =C_2

eşitliklerini bulunur.

Bu yüzden de

ξ= x+$y - Cosx$,

η = x– y+$Cosx$

dönüşümlerini yaparak verilmiş denklemi kolaylıkla aşağıdaki kanonik şekle getirilmiş olur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

Bu denklemi önce η değişkenine nazaran sonra ise ξ değişkenine nazaran integralleyerek bu denklemin genel çözümü

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

şeklinde bulunur.

Buradaki φ ve ψ fonksiyonları ikinci mertebeye dek sürekli diferansiyellenen keyfi fonksiyonlardır. ξ ve η değişkenlerinin değerlerini bu genel çözümde yerlerine yazdığımızda ele aldığımız denklemin genel çözümü

$$u(x,y) = \varphi(x + y - cosx) + \psi(x - y + cosx)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Örnek 2: $x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ denkleminin tipini belirleyelim kanonik şekle getirelim ve bu denklemin genel çözümünü bulalım.

Ele aldığımız denklemde

$$A= x^2, B=0, C=-y^2$$

olduğundan

$$B^2 - AC = x^2y^2$$

eşitliği her bir $x\neq0, y\neq0$ için sağlanır. Bu yüzden de ele aldığımız denklem $x\neq0$ ve $y\neq0$ bölgesinde hiperbolik tip diferansiyel denklemdir.

Ele aldığımız denklemin karakteristik denklemini

$$x^2(dy)^2-y^2(dx)^2=0$$

veya

$$(xdy+ydx)(xdy-ydx)=0$$

şeklinde yazarak

$$xdy+ydx=0,$$

$$xdy-ydx=0$$

karakteristik denklemler sistemini buluruz. Bu denklemleri değişkenlerine ayırdığımızda

$$\frac{dy}{y}+\frac{dx}{x}=0,\quad \frac{dy}{y}-\frac{dx}{x}=0$$

sistemi bulunur. Bu sistemi çözerek

$$lny+lnx=lnc_1,$$

$$lny-lnx=lnc_2,$$

çözümleri elde edilir. Buradan da

$$xy=c_1,\frac{y}{x}=c_2$$

karakteristik denklemler sisteminin genel integralleri bulunmuş olur.

Ele aldığımız denklemde

$$\xi=xy,\qquad \eta=\frac{y}{x}$$

dönüşümlerini yaparak ele aldığımız denklemdeki kısmi türevleri

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\,y-\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{y}{x^2}\ ,$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\,x+\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{1}{x}$$

eşitliklerini kullanarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\,y^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\,\frac{y^2}{x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\,\frac{y^2}{x^4}+2\frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{y}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

şeklinde bulunur.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ kısmi türevleri için bulunmuş bu ifadeleri ele aldığımız denklemde uygun olarak yerlerine yazarak ele aldığımız denklemi aşağıdaki şekle dönüştürülmüş olur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0,$$

Bulduğumuz bu denklemi çözmek için bu denklemde

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = V$$

değişimini yapalım. Bu durumda sonuncu denklem aşağıdaki şekilde yazılır:

$$2\xi \frac{\partial v}{\partial \xi} = V,$$

sonuncu denklemi değişkenlerine ayırarak çözelim. Burada

$$\frac{dv}{V} = \frac{d\xi}{2\xi},$$

$$lnV = ln\xi^{\frac{1}{2}} + lnc$$

$$V = c(\eta)\sqrt{\xi}$$

eşitliği bulunur.

Burada $c(\eta)$ katsayısı η değişkenine bağlı keyfi fonksiyondur.

V fonksiyonu için bulduğumuz sonuncu ifadeyi

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = V$$

eşitliğinde yerine yazarak

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = c(\eta)\sqrt{\xi}$$

eşitliği bulunur.

Bu sonuncu denklemi çözerek

$$u = \sqrt{\xi} \int c(\eta)d\eta + c_1(\xi) = \sqrt{\xi}c_2(\eta) + c_1(\xi)$$

veya

$$u = \sqrt{\xi}c_2(\eta) + c_1(\xi)$$

eşitliği bulunur.

Bu sonuncu eşitlikte

$$\xi = xy\,,\ \ \eta = \frac{y}{x}$$

alarak ele aldığımız kısmi türevli diferansiyel denklemin genel çözümü

$$u(x,y) = \sqrt{xy}\, c_2\left(\frac{y}{x}\right) + c_1(xy)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Buradaki $c_1(xy)$ ve $c_2\left(\frac{y}{x}\right)$ fonksiyonları iki kez sürekli diferansiyellenen keyfi fonksiyonlardır.

Örnek 3: $xu_{xx} - 2\sqrt{xy}\, u_{xy} + yu_{yy} + 0{,}5u_y = 0$ denkleminin tipini belirleyelim ve bu denklemi kanonik şekle getirelim.

Ele aldığımız bu denklemde

$$A = x, \qquad B = -\sqrt{xy}\,, \qquad C = y$$

olduğundan

$$B^2 - AC = xy - xy = 0$$

eşitliği her bir x ve y için sağlandığından ele aldığımız denklem Oxy düzleminde parabolik tip denklemdir.

Bu denklemin bir tane karakteristik denklemi

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

şeklinde yazılır.

Bu denklemi değişkenlerine ayırarak çözelim.

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad \sqrt{x} + \sqrt{y} = c, \qquad (c = Sabit)$$

Bu yüzden de verilmiş denklemde

$$\xi = \sqrt{x} + \sqrt{y}\,, \eta = \sqrt{x}$$

değişimini yaparak verilmiş denklemin kanonik şekli

$$u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}\left(u_\xi + u_\eta\right) = 0$$

şeklinde elde edilir.

3. İKİNCİ MERTEBELİ KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİ

3.1.Cauchy Problemi

Burada ikinci mertebeli kısmi türevli lineer

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Gu=f \tag{3.1}$$

diferansiyel denklemini ele alalım.

Burada (3.1) kısmi diferansiyel denkleminin katsayıları olan $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $D(x,y)$, $E(x,y)$ ve $G(x,y)$ fonksiyonlarının ve diferansiyel denklemin sağ yanındaki $f(x,y)$ fonksiyonunun belli bir bölgede tanımlanmış yeterince sürekli diferansiyellenen fonksiyonlar olduklarını var sayalım.

Oxy düzleminde koordinat eksenlerine paralel olan her bir doğru ile yalnız bir noktada kesişen bir ℓ eğrisinin verildiğini, bu eğrinin denkleminin

$$y=g(x)$$

olduğunu ve ℓ eğrisinin (3.1) denkleminin karakteristikleri ile çakışmadığını var sayalım.

(3.1) diferansiyel denkleminin ℓ eğrisi üzerinde

$$u(x,y)|_{y=g(x)}=\varphi_0(x),$$

$$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=g(x)}=\varphi_1(x), \tag{3.2}$$

şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine (3.1) denklemi için Cauchy problemi denir (Petrovsky,1962).

3.2.Goursat problemi

Ele aldığımız (3.1)denkleminin karakteristiklerini

$$\xi(x,y)=c_1, \qquad \eta(x,y)=c_2$$

ile gösterelim.

Bu sonuncu eşitlikleri değişkenlerine nazaran çözüp

$$y=\xi_1(x,c_1),\ \ y=\eta_1(x,c_2)$$

eşitliklerini bulalım.

(3.1) denkleminin

$$u(x,y)|_{y=\xi_1(x,c_1)} = \psi_1(x),$$

$$u(x,y)|_{y=\eta_1(x,c_2)} = \psi_2(x), \qquad (3.3)$$

şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine Goursat problemi denir (Tixonov,Saamarskiy,1962;Sobolev,1966).

4. CAUCHY VE GOURSAT PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNÜN BULUNMASINA AİT ÖRNEKLER

4.1.Sonsuz(sınırsız) telin serbest titreşimleri denklemi için Cauchy probleminin çözümü

Burada sınırsız telin serbest titreşimlerinin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty, \qquad t > 0 \tag{4.1}$$

denkleminin (Tixonov,1962)

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$u_t\ (x,t)\big|_{t=0} = \varphi_2(x), \tag{4.2}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemini, yani (4.1)-(4.2) Cauchy probleminin çözümünü bulalım. Bu amaçla (4.1) denklemini

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{4.3}$$

şeklinde yazalım.

Bu (4.1) veya (4.3) denkleminde $a > 0$ sayısı telde dalganın ortalama yayımlanma hızını gösterir. Burada (4.3) denkleminin genel çözümünü bulmak için bu denklemi kanonik şekle getirelim. Bu denklemde

$$A = a^2,\ B = 0,\ C = -1$$

olduğundan ve uygun olarak

$$B^2 - AC = a^2 > 0$$

olduğundan (4.3) denklemi hiperbolik tip denklemdir.(4.3) denkleminin karakteristik denklemi

$$a^2 \left(\frac{dt}{dx}\right) - 1 = 0 \tag{4.4}$$

şeklinde yazılır.

Buradan da (4.3) denkleminin karakteristik denklemler sistemi

$$dx - adt = 0,$$

$$dx + adt = 0, \tag{4.5}$$

şeklinde bulunur.

(4.5) denklemlerinin genel integralleri uygun olarak

$x - at = c_1\,, \quad (c_1 = Sabit)$

$x + at = c_2\,, \quad (c_2 = Sabit)$ (4.5)

şeklinde bulunur.

Böylece,(4.3) denklemini kanonik şekle getirmek için (4.3) denkleminde

$\xi = x - at,$

$\eta = x + at$ (4.6)

dönüşümünü yapmamız gerekir.

Burada karmaşık fonksiyonun türevinin hesaplanması formülünü kullanarak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = -a\frac{\partial u}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \eta} = -a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

eşitlikleri bulunur.

Bu eşitlikleri kullanarak $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ türevleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

Böylece

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

eşitliği bulunmuş oldu.

Benzer şekilde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

eşitliği bulunur.

Burada $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ türevleri için bulunmuş bu ifadeleri (4.3) denkleminde uygun olarak yerlerine yazdığımızda (4.3) denkleminin kanonik şekli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad (4.7)$$

şeklinde elde edilir.

(4.7) denklemini

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0$$

şeklinde yazalım. Bu sonuncu denklemin her yanını ξ değişkenine nazaran integralleyerek

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \theta(\eta)$$

eşitliği bulunur. Burada $\theta(\eta)$ fonksiyonu η değişkenine bağlı keyfi fonksiyondur.

Bu sonuncu eşitliğin her yanını dη ile çarpıp η -ya nazaran integrallediğimizde

$$u = \int \theta(\eta)d\eta + \theta_1(\xi)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte

$$\int \theta(\eta)d\eta = \theta_2(\eta)$$

alarak sonsuz telin serbest titreşimlerinin denkleminin genel çözümü

$$u = \theta_1(\xi) + \theta_2(\eta) \qquad (4.8)$$

şeklinde bulunmuş olur.

Bu (4.8) eşitliğinde

$$\xi = x - at,$$

$$\eta = x + at$$

ifadelerini uygun olarak (4.8)de yerlerine yazarak (4.3) denkleminin genel çözümü

$$u(x,t) = \theta_1(x-at) + \theta_2(x+at) \qquad (4.9)$$

şeklinde bulunmuş olur.

(4.3) denkleminin (4.9) şeklindeki genel çözümüne Dalambert çözümü denir.

(4.9) formülündeki θ_1 ve θ_2 fonksiyonlarının argumentlerine nazaran iki kez sürekli diferansiyellenen keyfi alınmış fonksiyonlardır.

Şimdi burada (4.1) denkleminin (4.9) formülü ile verilen genel çözümünü kullanarak (4.1)-(4.2) Cauchy problemini çözelim bu amaçla (4.2) başlangıç şartlarını kullanarak

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_1(x),$$

$$-a\theta_1'(x) + a\theta_2'(x) = \varphi_2(x),$$

sistemini yazalım.

Bu sistemin ikinci denklemini $(0, x)$ aralığı üzere integralleyerek θ_1 ve θ_2 fonksiyonlarının bulunması için aşağıdaki denklemler sistemi bulunur.

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \varphi_1(x),$$

$$\theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \varphi_2(s)ds + c$$

Bu sistemde

$$c = \theta_1(0) - \theta_2(0)$$

olmakla keyfi sabit sayıdır.

Bu sonuncu sistemi $\theta_1(x)$ ve $\theta_2(x)$ fonksiyonlarına nazaran çözerek

$$\theta_1(x) = \frac{1}{2}\,\varphi_1(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_2(s)ds + \frac{c}{2},$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{2}\,\varphi_1(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \varphi_2(s)ds - \frac{c}{2}$$

eşitlikleri çıkar.

$\theta_1(x)$ ve $\theta_2(x)$ fonksiyonları için bulduğumuz bu ifadeleri (4.1) denkleminin genel (4.9) çözümünde uygun olarak yerlerine yazdığımızda (4.1)-(4.2) Cauchy probleminin çözümünü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$u(x,t) = \frac{\varphi_1(x-at)+\varphi_1(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \varphi_2(s)ds \qquad (4.10)$$

4.2.Sınırsız(sonsuz) telde ısı iletişimi denklemi için Cauchy probleminin çözümü:

Burada sonsuz telde ısı iletişiminin

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0 \qquad (4.11)$$

denkleminin (Tixonov,1962)

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \qquad (4.12)$$

başlangıç şartını sağlayan Cauchy probleminin çözümünü bulalım.

Bu problemdeki $\varphi(x)$ fonksiyonunun $-\infty < x < +\infty$ aralığında tanımlanmış, sürekli ve sınırlı fonksiyon olduğunu var sayalım.(4.11) denkleminde A=a^2, B=0, C=0 olduğundan $B^2 - AC$ =0 eşitliği sağlanır. Bu yüzden de (4.11) denklemi parabolik tip denklemdir.(4.11) denklemi parabolik tip denklemin kanonik şeklindedir.

Burada önce,(4.11) denkleminin

$$u(x,t) = T(t)X(x) \qquad (4.13)$$

şeklinde trivial (aynen sıfır olmayan) olmayan genel çözümünü bulalım.

(4.13) şeklinde aranan çözümü (4.11) denkleminde aranan $u(x,t)$ çözümünün yerine yazdığımızda

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

veya

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

eşitliğini bulunur. Burada λ^2 sabit bir parametredir.

Bu sonuncu eşitlikten aranan $T(t)$ ve $X(x)$ fonksiyonları için aşağıdaki

$$T'(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

denklemleri bulunur.

Burada

$$T(t) = e^{-a^2\lambda^2 t}$$

fonksiyonu birinci denklemin bir çözümüdür.

İkinci denklemin genel çözümü ise

$$X(x) = A cos\lambda x + B sin\lambda x$$

şeklindedir.

Burada A ve B sabit sayıları λ parametresine bağlı olabilen keyfi sabit sayılardır.

Burada λ parametresi keyfi değerler alabilen parametredir.

Burada (4.13) eşitliğine dayanarak

$$u(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)cos\lambda x + B(\lambda)sin\lambda x] \quad (4.14)$$

fonksiyonunun keyfi $A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ için (4.11) denkleminin çözümü olduğu görülür.

(4.11) denklemi lineer homojen kısmi diferansiyel denklem olduğundan bu denklemin (4.14) şekilli çözümünün λ parametresine nazaran integrali de (4.11) denkleminin çözümü olabilir.

Böylece,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}[A(\lambda)cos\lambda x + B(\lambda)sin\lambda x]\, d\lambda \quad (4.15)$$

formülündeki integral yakınsak olduğunda ve bu integrali bir kez t değişkenine nazaran diferansiyelleyebildiğimizde ve iki kez x değişkenine nazaran diferansiyelleyebildiğimizde bu (4.15) formülü ile bulunan $u(x,t)$ fonksiyonu (4.11) denkleminin genel çözümü olur.

Bu (4.15) formülündeki $A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ katsayılarını öyle seçelim ki,(4.12) Cauchy şartı da sağlansın.

Bu amaçla (4.15) formülünde t =0 alıp (4.12) Cauchy şartını kullanarak aşağıdaki eşitliği bulunur:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda)cos\lambda x + B(\lambda)sin\lambda x]\, d\lambda \quad (4.16)$$

Bu (4.16) eşitliğindeki $A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ katsayılarını bulmak için $\varphi(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü yazalım:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) cos\lambda\xi d\xi . cos\lambda x + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) sin\lambda\xi d\xi . sin\lambda x \right] d\lambda$$

Bu sonuncu açılımı $\varphi(x)$ fonksiyonunun (4.16) açılımı ile karşılaştırdığımızda $A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ katsayıları için aşağıdaki ifadeleri bulunur:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) cos\lambda\xi d\xi , \qquad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) sin\lambda\xi d\xi \tag{4.17}$$

$A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ katsayılarının (4.17) ifadelerini (4.15) formülünde uygun olarak yerlerine yazarak (4.11)-(4.12) Cauchy probleminin çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos(\xi - x) d\xi \right] d\lambda =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-a^2\lambda^2 t} cos\lambda(\xi - x) d\xi \right] d\lambda$$

Bu sonuncu açılımda integrallerin sırasını değiştirerek $u(x,t)$ fonksiyonu için aşağıdaki formülü elde edilir:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \left[\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} cos\lambda(\xi - x) d\lambda \right] d\xi \tag{4.18}$$

Burada (4.18) formülündeki parantez içerisindeki

$$\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} cos\lambda(\xi - x) d\lambda$$

integrali $e^{-a^2\lambda^2 t}$ fonksiyonunun kosinus Fourier dönüşümü olup

$$\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} cos\lambda(\xi - x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \tag{4.19}$$

formülü ile hesaplanır (Tixonov,Saamarskiy,1962).

Bu (4.19) eşitliğini (4.18) eşitliğinin sağ yanındaki parantezde yerine yazarsak (4.11)-(4.12) Cauchy probleminin çözümü

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}\,d\xi \tag{4.20}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

4.3.Goursat probleminin çözümüne ait bir örnek

Burada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\qquad (y<0) \tag{4.21}$$

denklemi için Goursat problemini yazıp çözelim.

Bu amaçla (4.21) denkleminin karakteristiklerini bulalım. Bu (4.21) denkleminde A=1,B=0, C=y olduğundan $B^2-AC=-y>0$ olur.

Bu yüzden de ele aldığımız (4.21) denklemi hiperbolik tip diferansiyel denklemdir.

Ele aldığımız (4.21) denkleminin karakteristik denklemi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y=0$$

şeklinde olur.(4.21) denkleminin karakteristik denklemler sistemi ise

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{-y},\qquad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{-y},$$

şeklinde bulunur.

Bu denklemlerin genel çözümleri

$$\varphi(x,y)=x-2\sqrt{-y}=c_1$$

$$\varphi(x,y)=x+2\sqrt{-y}=c_2$$

olduklarından (4.21) denkleminde x ve y değişkenlerini

$$\xi=x-2\sqrt{-y}$$

$$\eta=x+2\sqrt{-y} \tag{4.22}$$

değişimi ile yapılması gerekir.

Burada

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{1}{\sqrt{-y}}\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

olduğundan ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

böylece ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

olur.

Burada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$=-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{1}{y}+\frac{2}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{2y\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

böylece,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{1}{y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{2y\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

eşitliği elde edilir.

Bulunmuş bu türevleri ele aldığımız denklemde uygun olarak yerlerine yazıp sadeleştirdiğimizde ele aldığımız denklemin kanonik şekli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}=0$$

şeklinde bulunur. Bu sonuncu denklemin genel çözümü

$$u(\xi,\eta)=\theta_1(\xi)+\theta_2(\eta)$$

şeklinde yazılır.

Burada

$$\xi = x - 2\sqrt{-y}, \eta = x + 2\sqrt{-y}$$

karakteristiklerini üstteki eşitlikte ξ ve η -nın yerlerine yazdığımızda ele aldığımız (4.21) denkleminin genel çözümü

$$u(x,y) = \theta_1\left(x - 2\sqrt{-y}\right) + \theta_2\left(x + 2\sqrt{-y}\right) \tag{4.23}$$

şeklinde bulunur.

Burada θ_1 ve θ_2 fonksiyonlarının argumentlerinin iki kez sürekli diferansiyellenen keyfi alınmış fonksiyonlardır.

Şimdi (4.21) denkleminin

$$L_1: x - 2\sqrt{-y} = 0$$

karakteristiğinin OB kısmında ve

$$L_2: x + 2\sqrt{-y} = 0$$

karakteristiğinin AB kısmında verilmiş

$$\begin{aligned} u(x,y)|_{L_1} &= \psi_1(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ u(x,y)|_{L_2} &= \psi_2(x), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{aligned} \tag{4.24}$$

şartlarını sağlayan Goursat problemini çözelim.

Burada

$$\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

şartının sağlanması gerekir.

Şimdi ele aldığımız (4.21)-(4.24) Goursat problemini çözmek için (4.21) denkleminin genel (4.23) çözümünde (4.24) Goursat şartlarını kullanarak θ_1 ve θ_2 fonksiyonlarının bulunması için aşağıdaki denklemler sistemi bulunur:

$$\theta_1(0) + \theta_2(2x) = \psi_1(x), \qquad 0 \le x \le \frac{1}{2}$$

$$\theta_1(2x-1) + \theta_2(0) = \psi_2(x), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1$$

Bu sistemden

$$\theta_1(2x-1) = \psi_2(x) - \theta_2(0)$$

$$\theta_2(2x) = \psi_1(x) - \theta_1(0)$$

veya

$$\theta_1\left(x - 2\sqrt{-y}\right) = \psi_2\left(\frac{x - 2\sqrt{-y}+1}{2}\right) - \theta_2(1),$$

$$\theta_2\left(x + 2\sqrt{-y}\right) = \psi_1\left(\frac{x + 2\sqrt{-y}}{2}\right) - \theta_1(0)$$

eşitlikleri bulunur.

Buradan da

$$u(x,y) = \psi_1\left(\frac{x + 2\sqrt{-y}}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{x - 2\sqrt{-y}+1}{2}\right) - [\theta_1(0) + \theta_2(1)]$$

eşitliği çıkar.

Şarta göre $\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \psi_2\left(\frac{1}{2}\right)$ eşitliğinin sağlanmasından

$$\theta_1(0) + \theta_2(1) = \psi_1\left(\frac{1}{2}\right) - \psi_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

eşitliği sağlanır.

Böylece, ele aldığımız (4.21)-(4.24) Goursat probleminin çözümü

$$u(x,y) = \psi_1\left(\frac{x + 2\sqrt{-y}}{2}\right) + \psi_2\left(\frac{x - 2\sqrt{-y}+1}{2}\right) - \psi_1\left(\frac{1}{2}\right)$$

şeklinde bulunmuş olur.

SONUÇ

Bu tezde ikinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemler için Cauchy ve Goursat problemleri ele alındı. Tezin konusu ile bağlantılı ön bilgiler ve ön bilgilerin açıklamaları verildi. İkinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin kanonik (sade) şekle getirilmesinin yöntemi gösterildi. Ayrı ayrı örneklerde ikinci mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin kanonik şekle getirilmesi ve bu denklemlerin genel çözümünün bulunması gösterildi.

Sonsuz telin(sınırsız telin) titreşimleri denklemi için ve sınırsız telde ısı iletişimin denklemi için Cauchy problemlerinin çözümünün bulunması gösterildi.

İkinci mertebeli kısmi türevli bir diferansiyel denklem için bir Goursat problemi ele alındı ve çözüldü.

KAYNAKÇA

Aliyev, G. (1995), “Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler”,İstanbul.

Courant,R. ,Hilbert,D.(1968),” Methoden der Matematischen Physik”,Berlin.

Çağlayan, M., Çelebi, O.(2010), “Kısmi Diferansiyel Denklemler”, Dora Basım, Bursa.

Mamedov, R., Cafarov, G.(1971), “Riyazi Fizika Denklemleri”, Maarif Neşriyatı, Bakü.

Petrovsky, I. G.(1962), "Lectures on Partial Differential Equations." New York.

Sobolev, S.L.(1966), “Uravneniya Matematiçeskoy Fiziki Izd. Nauka”, Moskova.

Tixonov, A. N., Saamarskiy, A. A.(1962), “Riyazi Fizika Tenlikleri”, Azerbaycan öğrencisi yayınları.